GEOMETRÍA AXIOMÁTICA

Geometría plana neutral, euclídea y analítica

Segunda Edición, corregida y aumentada.

Gerard Romo Garrido



Toomates Cool·lección

Los documentos de **Toomates Cool·lección** son recopilaciones de materiales matemáticos, redactados, ordenados y sistematizados por **Gerard Romo**, con el objetivo de que puedan ser útiles para cualquier estudiante de matemáticas.

"**Always Under Construction**": Debido a lo ambicioso del proyecto, estos documentos se van ampliando, corrigiendo y completando continuamente a lo largo de los años.

Se agradecerá cualquier observación, comentario, rectificación o colaboración a
toomates@gmail.com



Todos los documentos se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición.

Actualmente **Toomates Cool·lección** consta de los siguientes documentos:

Geometría axiomática:

Geometría Axiomática (Teoría) pdf doc1 2 3 4 5 6 7 ... 20 21 22 portada
Problemas de Geometría (Vol. 1) pdf doc
Problemas de Geometría (Vol. 2) pdf doc
Problemas de Geometría (Vol. 3) pdf doc
Problemas de Geometría (Vol. 4) pdf doc
Problemas de Geometría (Vol. 5) pdf doc

Matemáticas para el bachillerato (en catalán):

Àlgebra Lineal Batxillerat pdf doc
Geometria Lineal Batxillerat pdf doc
Càlcul Infinitesimal Batxillerat pdf doc1 doc2
Programació Lineal Batxillerat pdf doc

Problemarios:

Problemas de Matemáticas (Vol. 1) pdf doc
Cangur Integral (en catalán) pdf doc

Versión de este documento: 12/04/2019

www.toomates.net



Dedicado a Carme, siempre.

Descarga de
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica.pdf

la versión más actualizada de este libro.

Descarga de
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria1.pdf
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria2.pdf
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria3.pdf
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria4.pdf
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria5.pdf

recopilaciones de ejercicios y problemas para practicar los conceptos de este libro.

Descarga de
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica01.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica02.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica03.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica04.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica05.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica06.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica07.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica08.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica09.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica10.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica11.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica12.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica13.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica14.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica15.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica16.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica17.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica18.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica19.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica20.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica21.doc
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica22.doc

Las versiones editables en formato **MSWord 2000-2003** de todos los capítulos de este libro.

Todas las fórmulas matemáticas se han escrito con el "**editor de ecuaciones**" de MS Word.
Todos los dibujos son capturas de **GeoGebra**.

Descarga de
http://www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomaticaPortada.pptx

la portada de este libro.

Índice.

Volumen III: Geometría analítica.

Volumen IV: Geometría no euclídea.

Presentación.

Este libro pretende ser una guía para aquellos que quieran aventurarse en un maravilloso viaje matemático que cruza, en el espacio y en el tiempo, toda la civilización occidental. Un sendero que va desde "**Los Elementos**" de Euclides, en la Grecia del siglo III AC, hasta "**Los Fundamentos de la Geometría**" de Hilbert, en la Prusia de 1899.

En este viaje vamos a andar mucho, no es un viaje para turistas sino para puristas, y sobre todo vamos a tener que acostumbrarnos a cambiar nuestros hábitos matemáticos. Vamos a tener que dejar nuestras cómodas zapatillas deportivas modernas, será necesario ponernos las rígidas botas de montaña de la Prusia del siglo XIX, o las ligeras sandalias tradicionales de la Grecia Clásica. Nuestros pies matemáticos están demasiado acostumbrados a caminar sobre la almohadilla de los números reales y sobre el asfalto del lenguaje del álgebra simbólica. Tendremos que pensar sin números y eso no va a ser fácil, al principio nos van a salir ampollas, ya te aviso, pero tú tranquilo, que será sólo al principio del viaje, durante los primeros dos o tres años, luego te vas acostumbrando, y de verdad, el paisaje vale la pena.

Gerard Romo

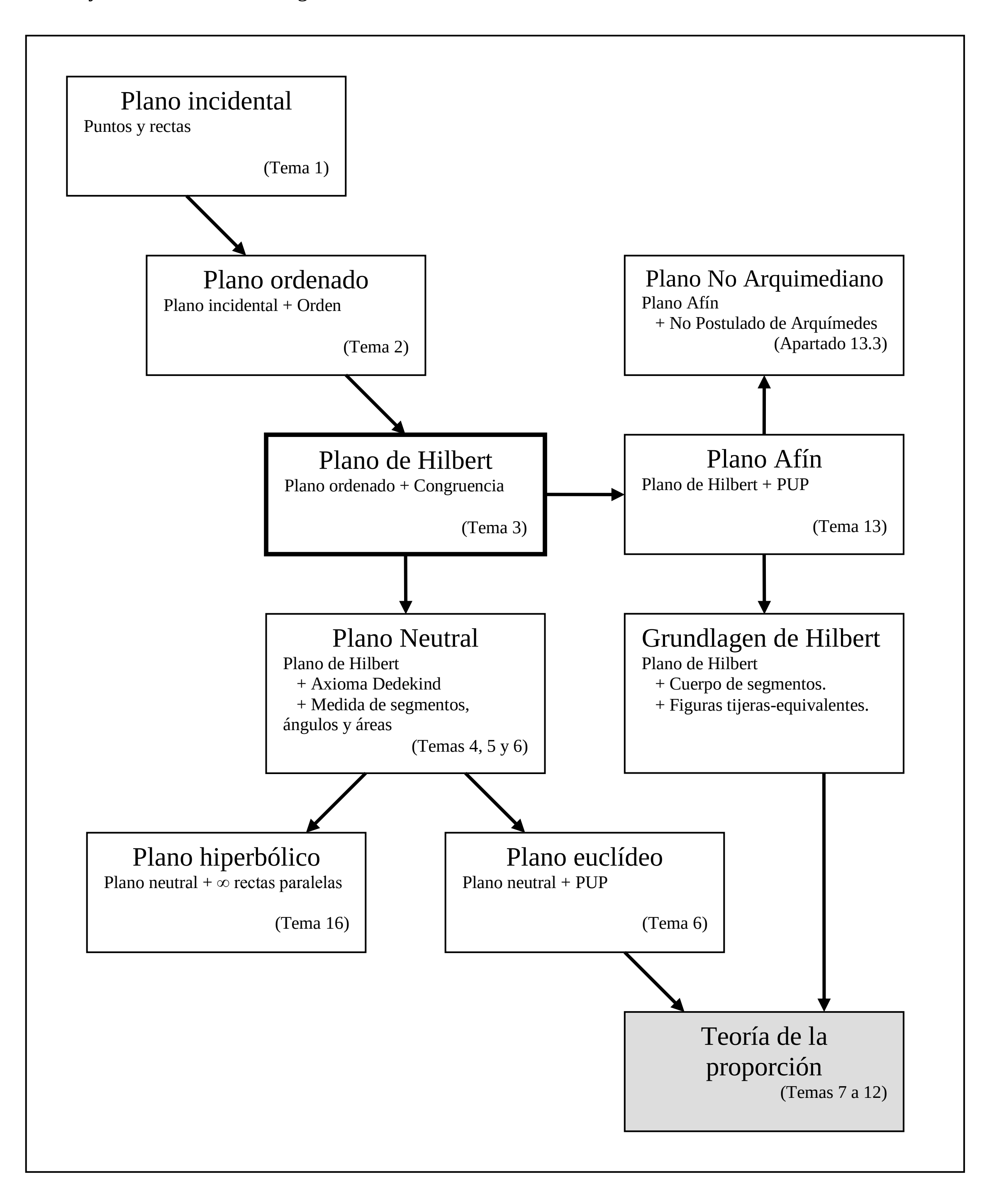
Otras veces toca preguntar al chico, para tormento del padre.
“Papá, ¿Por qué no tienen barba las mujeres?” A punto estuvo Carrascal de responder: “Porque las tienen los hombres; para diferenciarse en la cara”, pero se calló.
-Mira, hijo, en un triángulo que tenga dos ángulos desiguales, a mayor ángulo se opone mayor lado...
-Sí, ya lo veo, papá.
-No basta que lo veas, hay que demostrártelo.
-¡Pero si lo veo...!
-No importa; ¿de qué sirve que veamos las cosas si no nos las demuestran?

Miguel de Unamuno, Amor y pedagogía (1901)

Algunos esquemas transversales.

1. Guía de lectura de la primera parte.

El objetivo de este libro es llegar de forma axiomática hasta el plano euclídeo tradicional y toda la teoría de la proporción de la geometría clásica. Para llegar a esta *cumbre* estableceremos un "campo base" en el plano de Hilbert (Temas 1 a 3). Desde este campo base tendremos que escoger entre dos rutas: La convencional y moderna, que es dotar a nuestras rectas de las propiedades de IR mediante el "Axioma de Dedekind" (Tema 4) y armarnos con las poderosísimas herramientas de la "medida": Longitud de segmentos, amplitud de ángulos y medida de áreas (Tema 5)... o no hacerlo, siguiendo el camino de Hilbert en el Grundlagen, una ruta que siguiendo con la metáfora de la cima, es como pretender escalar el Himalaya sin bombonas de oxígeno.



2. Tabla Cronológica de la Grecia Clásica.

Todas las fechas son aproximadas y anteriores a Cristo.

Año	Historia General	Matemáticas
650	**Inicio del apogeo de Atenas (650 aprox.)**	
600	Primeras monedas (600 aprox.)	Tales de Mileto (624-546)
550		Pitágoras (570 - 495)
500	**Guerras Persas (500-480)** Batalla de Las Termópilas (480) **Edad de Oro de Atenas (460-429)**	
450	Pericles (450-430) Construcción del El Partenón (447-432) Sócrates (470-399)	
400	**Guerras del Peloponeso (432-402)** Platón (428-348) Aristóteles (384-322)	Eudoxo (408-355)
350	**Dominación macedónica (346-323)** Alejandro Magno (353-326)	
300	Fundación de la ciudad de Alejandría (332)	Elementos de Euclides (300) "**Edad de Oro**" de la matemática Griega Arquímedes (287-212)
250	**Época Helenística (323-30)**	Apolonio (262-190)
200		
150		

3. Cronología de los matemáticos griegos.

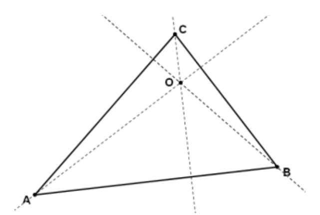
(Se han añadido personajes históricos no matemáticos en negrita)

Fecha	Nombre en castellano	Nombre en inglés
c. 624 AC – c. 546 AC	Tales de Mileto	Thales of Miletus
c. 585 AC – c. 528 AC	Anaximandro	Anaximenes of Miletus
c. 570 AC – c. 495 AC	Pitágoras	Pythagoras
c. 490 AC – c. 420 AC	Oenopide	Oenopides of Chios
480 AC – 411 AC	Antifón	Antiphon the Sophist
c. 470 AC – c. 399 AC	**Sócrates**	**Socrates**
465 AC – 398 AC		Theodorus of Cyrene
c. 460 AC – c. 370 AC	Demócrito	Democritus
c. 427 AC – c. 347 AC	**Platón**	**Plato**
c. 417 AC – 369 AC	Teeteto	Theaetetus
408 AC – 355 AC	Eudoxo de Cnido	Eudoxus of Cnidus
c. 400 AC – c. 350 AC		Thymaridas
c. 390 AC − c. 320 AC		Dinostratus
384 AC – 322 AC	**Aristóteles**	**Aristotle**
380 AC − 320 AC	Menecmo	Menaechmus
c. 370 AC – c. 300 AC	Arsiteo el Viejo	Aristaeus the Elder
c. 370 AC – c. 300 AC		Callippus
c. 360 AC – c. 290 AC	Autólico	Autolycus of Pitane
356 AC – 323 AC	**Alejandro Magno**	**Alexander the Great**
c. 340 AC – c. 285 AC		Polyaenus of Lampsacus
c. 320 AC – c. 280 AC	Euclides	Euclid
c. 287 AC – c. 212 AC	Arquímedes	Archimedes
c. 280 AC – c. 220 AC		Conon of Samos
c. 276 AC – c. 194 AC	Eratóstenes	Eratosthenes
c. 262 AC – c. 190 AC	Apolonio de Perga	Apollonius of Perga
c. 190 AC – c. 120 AC		Hipparchus
c. 160 AC – c. 100 AC		Theodosius of Bithynia
c. 150 AC		Perseus (geometer)
1st century AC		Geminus
c. 60 – c. 120	Nicómaco	Nicomachus
c. 70 – c. 135		Theon of Smyrna
c. 70 – c. 140	Menelao	Menelaus of Alexandria
c. 100 – c. 170	Ptolomeo	Ptolemy
c. 200/214 – c. 284/298	Diofanto	Diophantus
c. 290 – c. 350	Papo	Pappus of Alexandria
304 – 285/7	Tolomeo	
c. 335 – c. 405	Teón de Alejandría	Theon of Alexandria
c. 350 – 415		Hypatia of Alexandria
412 – 485	Proclo	Proclus
c. 420 – c. 480		Domninus of Larissa
c. 480 – c. 540		Eutocius

Fuente: Wikipedia.

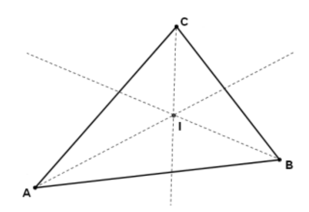
4. La foto de familia de las rectas notables del triángulo.

Alturas de un triángulo.
Las alturas son las rectas que pasan por un vértice y son perpendiculares al lado contrario.



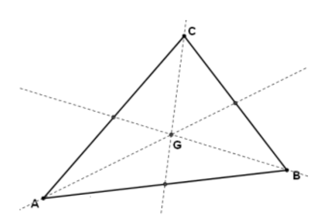
En un plano euclídeo, las alturas se encuentran en un único punto llamado **ortocentro**.

Bisectrices de un triángulo.
Las bisectrices de un triángulo son las rectas que biseccionan los ángulos correspondientes a los tres vértices, es decir, dividen los ángulos en dos iguales.



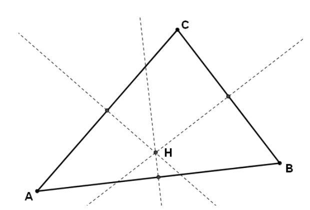
En un plano euclídeo, las bisectrices se encuentran en un único punto llamado **incentro.**

Medianas de un triángulo.
Las medianas son las rectas que pasan por cada vértice y el punto medio del lado opuesto.



En un plano euclídeo, las medianas se encuentran en un punto único llamado **baricentro.**

Mediatrices de un triángulo.
Las mediatrices son las rectas que son perpendiculares a cada lado y pasan por su punto medio.



En un plano euclídeo, las mediatrices se encuentran en un único punto llamado **circuncentro**.

5. La foto de familia de los cuadriláteros.

Volumen I: Geometría neutral

1 Incidencia.

1.1 Sistemas axiomáticos: De Euclides a Hilbert.

1.1.1 Los Elementos de Euclides.

“Los Elementos” es el primer manual de matemáticas de la Historia. Escrito por Euclides, un matemático griego del siglo III AC, pretende recoger, sistematizar, detallar y ordenar todo el saber geométrico de su época. La ordenación se hace de forma lógica, es decir, una propiedad sigue a otra si se puede deducir de ésta de forma lógica, por lo que estamos ante el primer tratado axiomático de la geometría.
Una obra tan inmensa como esta tuvo obviamente sus propias limitaciones. En Los Elementos encontramos un trabajo hercúleo para ofrecer una enciclopedia de resultados geométricos, y además presentarlos ordenados de forma lógica, pero no era su pretensión analizar y justificar los fundamentos, los primeros ladrillos que forman ese edificio. Por este motivo (y gracias a ello), Los Elementos se sustentan en unos conceptos fundamentales (Axiomas, definiciones, postulados, nociones comunes) usados de forma intuitiva, tomados prestados del espacio físico convencional. A lo largo de la Historia, pero sobre todo en el siglo XIX, aquellos conceptos fundamentales con los que se construyeron “Los Elementos” fueron sometidos a la más estricta revisión crítica, y gracias a esfuerzo metodológico la geometría se engrandeció aún más hasta límites insospechados.

1.1.2 Los trece libros de Los Elementos.

Los Elementos está dividido en trece capítulos, llamados "libros". Los seis primeros estudian la geometría del plano. Los tres siguientes tratan de la teoría de números. El libro décimo está dedicado a los inconmensurables y en los tres últimos se estudian las figuras en el espacio.

Libro 1. Los fundamentos de la geometría plana tradicional, con sus resultados más importantes.
Libro 2. Área de cuadrados y rectángulos, teorema del coseno, propiedades algebraicas fundamentales explicadas en términos geométricos...
Libro 3. Geometría del círculo: Circunferencia, arcos, cuerdas, tangentes...
Libro 4. Polígonos regulares.
Libro 5. Magnitudes, razones y proporcionalidad entre segmentos. Este libro es considerado como el primer tratado de álgebra abstracta de la historia.
Libro 6. Semejanza entre figuras planas, división áurea, Teorema de Tales, como hallar el cuarto proporcional...
Libro 7. Está dedicado a la aritmética. Se introducen los conceptos de unidad y número, divisor, pares e impares, primos y compuestos...
Libro 8. Números en progresión geométrica, interpolación de términos...
Libro 9. Números planos y sólidos, demostración de que hay infinitos números primos, como obtener números perfectos...
Libro 10. Segmentos conmensurables e inconmensurables. Con 115 proposiciones es el más extenso de todos los libros de los Elementos, pero la mayor parte de sus proposiciones no tienen actualmente mayor interés. Resulta difícil de estudiar, por lo que se le suele llamar "la cruz de los matemáticos".
Libro 11. Objetos y relaciones habituales de la geometría del espacio, como rectas y planos; paralelismo y perpendicularidad, ángulos diedros y poliedros; figuras sólidas: pirámide, prisma, esfera, cono...
Libro 12. Obtención del área del círculo y los volúmenes de los sólidos más corrientes mediante el "método de exhausción".
Libro 13. La construcción de los cinco sólidos regulares, la razón entre los lados de los pentágonos, hexágonos y decágonos inscritos en una misma circunferencia.

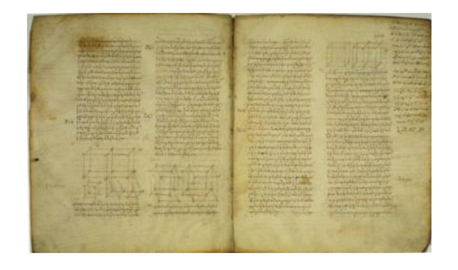
1.1.3 Estructura de Los Elementos.

Cada libro está dividido en apartados que pueden ser de seis tipos diferentes: Definiciones, proposiciones, porismas y lemas. En el Libro 1 aparecen, además, 5 postulados y 5 nociones comunes.

Libro	Definiciones	Proposiciones	Porismas	Lemas
I	23	48	0	0
II	2	14	0	0
III	11	37	1	0
IV	7	16	1	0
V	18	25	2	0
VI	3	33	3	0
VII	22	39	1	0
VIII	0	27	1	0
IX	0	36	1	0
X	16	115	4	11
XI	28	39	1	1
XII	0	18	2	2
XIII	0	18	2	3
Total	130	465	19	17

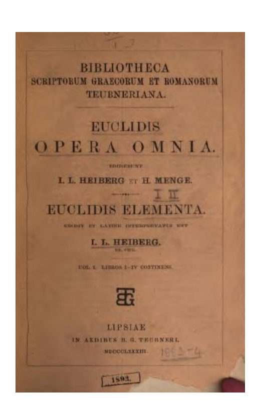
1.1.4 El manuscrito "Vat. Gr. 190".

Hasta el siglo XIX todas las versiones supervivientes de Los Elementos de Euclides derivan de una misma fuente, la que redactó **Teón de Alejandría** en el siglo IV DC. Lo sabemos porque dicho autor añadió ciertas aportaciones propias (que él mismo declara como suyas) y todas las obras conocidas contienen dichos cambios. Pero en 1808 el matemático francés **François Peyrand** (1760-1822) descubre en el Vaticano un manuscrito de Los Elementos previo a la de Teón, llamado "**Vaticanus graecus 190**" (o "**Vat. Gr. 190**" o simplemente "**P**"), que fue llevado a Francia como parte del botín de guerra de las tropas napoleónicas. Sabemos que este manuscrito es previo a la versión de Teon porque no incorpora las aportaciones que dicho autor añadió al Libro 6.
Este manuscrito contiene los trece libros de Los Elementos y está considerado como la versión íntegra más antigua de dicha obra.



1.1.5 El "Euclidis Opera Omnia" de Heiberg y Menge.

Entre 1883 y 1888 el filólogo danés Johan Ludvig Heiberg redacta una versión definitiva de Los Elementos sobre la base del manuscrito "Vaticanus graecus 190", cotejando sus textos con el resto de versiones "teoninas" y con todos los fragmentos de la obra de Euclides que han sobrevivido hasta nuestros días.


BIBLIOTHECA
SCRIPTORUM GRAECORUM ET ROMANORUM
TEUBNERIANA.

EUCLIDIS
OPERA OMNIA.

I. L. HEIBERG ET H. MENGE.

EUCLIDIS ELEMENTA.

I. L. HEIBERG.

LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.
MDCCCLXXXIII.

De esta versión se han realizado las traducciones "oficiales" de Los Elementos a la mayoría de idiomas.

1.1.6 Nota biográfica.

Johan Ludvig Heiberg (27 de noviembre de 1854 - 4 de junio de 1928) fue un filólogo e historiador danés. Es conocido por su descubrimiento de textos previamente desconocidos dentro del Palimpsesto de Arquímedes, y por su edición en inglés de los Elementos de Euclides. También publicó una edición del Almagesto de Ptolomeo.

Heiberg nació en Dinamarca, hijo de Johanne Henriette Jacoba (nacido Schmidt) y Emil Theodor Heiberg. Fue profesor de filología clásica en la Universidad de Copenhague desde 1896 hasta 1924. Entre sus más de 200 publicaciones se reconocen ediciones de los trabajos de Arquímedes (1880 y 1912), Euclides (con Heinrich Menge) (1883-1916), Apolonio de Perge (1891-93), Sereno de Antinouplis (1896), Ptolomeo (1898/1903), y Herón de Alejandría (1899). Muchas de sus ediciones se usan hoy día.



Fuente: wikipedia

1.1.7 El *Grundlagen* de Hilbert.

En el curso 1898-1899 el matemático alemán **David Hilbert** (Königsberg, 1862; Gotinga, 1943) de la Universidad de Göttingen sorprendió a sus alumnos ofreciendo un curso sobre los fundamentos de la geometría. La versión escrita de dicho curso *Grundlagen der Geometrie* (“**Los fundamentos de la Geometría**”) apareció en 1899 e inmediatamente se convirtió en un bestseller, rápidamente traducido al francés, inglés y otros idiomas.



En este trabajo Hilbert se propone un objetivo titánico: Limpiar y enmendar todos los puntos débiles de Los Elementos de Euclides que se habían detectado a lo largo del siglo XIX, una obra que había permanecido inalterada durante más de 2000 años. El resultado es una maestra de la simplicidad y la elegancia matemática, un referente de rigor científico, no sólo en el campo de la Geometría, sino en todo el ámbito de la Matemática y de la ciencia en general de todo el siglo XX.

Hilbert comienza enumerando los conceptos sin definición: “Consideramos tres sistemas diferentes de objetos, que llamaremos puntos, rectas y planos. Entre ellos imaginamos tres relaciones, que expresaremos por términos como “estar sobre”, “estar entre” o “ser congruente con”. La descripción exacta y las propiedades de estas relaciones vienen dadas por los axiomas.”, para después presentar los 20 axiomas con los que unificará toda la geometría, tanto la plana como la espacial, agrupados en cinco grupos según el tipo de propiedades que rigen:

Grupo I: Siete axiomas de incidencia.
Grupo II: Cuatro axiomas de orden.
Grupo III: El Postulado de la única paralela.
Grupo IV: Seis axiomas de congruencia.
Grupo V: El axioma de continuidad (o Axioma de Arquímedes)
Y un metaaxioma llamado “Axioma de completitud”.

Hilbert fue el precursor del llamado "**Formalismo matemático**", una de las tres escuelas matemáticas más importantes del siglo XX. El formalismo despoja a los objetos matemáticos de todo tipo de característica natural o intuitiva, los limpia de "polvo y paja" hasta convertirlos en meros símbolos carentes de significado y que interactúan mediante unas reglas formales establecidas de antemano. Lo dice el propio Hilbert, "los elementos tales como el punto, la recta o el plano se pueden sustituir con mesas, sillas, jarras de cerveza y otros objetos. Lo que se discute y se desarrolla son sus relaciones definidas". Los resultados matemáticos se asemejan a las construcciones de Lego, construcciones creadas mediante unas reglas muy claras y precisas que actúan sobre unos objetos (las piezas) perfectamente definidos.

1.1.8 Sistema axiomático del *Grundlagen*.
El sistema axiomático de Hilbert se compone de nueve nociones primitivas:
Tres términos primitivos: punto, línea recta, plano, y seis relaciones primitivas:
Orden, una relación ternaria entre puntos; **Pertenencia,** tres relaciones binarias, una de ellas entre puntos y rectas, otra entre puntos y planos, y otra entre rectas y planos;
Congruencia, dos relaciones binarias, una entre segmentos y otra entre ángulos, denotadas por $\cong$.

Grupo I. Incidencia

H1.1 Dos puntos distintos A y B determinan una recta $\overleftrightarrow{AB}$.

H1.2 Dos puntos cualesquiera de una recta la determinan por completo; es decir, por dos puntos diferentes pasa una única recta.

H1.3 Tres puntos A, B y C no situados en una misma recta determinan un plano α.

H1.4 Por tres puntos cualesquiera A, B y C no situados en una misma recta pasa un único plano.

H1.5 Si dos puntos A y B de la recta r yacen en el plano α, entonces todo punto de r yace en α.

H1.6 Si dos planos α y β tienen un punto A en común, entonces tienen al menos otro punto B en común.

H1.7 a) En cada recta hay al menos dos puntos;
b) En cada plano hay al menos tres puntos no situados en la misma recta;
c) Existen al menos cuatro puntos no situados en un mismo plano.

Grupo II: Orden

H2.1 Si un punto B está entre los puntos A y C, también está entonces entre C y A, y existe una recta que contiene a los tres.

H2.2 Si A y C son dos puntos de una recta, existe al menos otro punto B entre A y C, y al menos un punto D de tal manera que C está entre A y D.

H2.3 Dados tres puntos en una recta, solo uno de ellos está entre los otros dos.

H2.4 Axioma de Pasch: Sean A, B y C tres puntos no situados en la misma recta y sea r una recta contenida en el plano ABC, que no pasa por ninguno de los tres puntos mencionados. Entonces, si r pasa por algún punto del segmento AB, entonces pasa también por algún punto del segmento BC o del segmento AC, pero no por ambos a la vez.

Grupo III: Paralelismo

H3.1 Dado un plano α, una recta a contenida en el plano y un punto A del plano pero no contenido en la recta, puede encontrarse en dicho plano una única recta b que pase por A, de forma que a y b no tengan ningún punto en común.

Grupo IV: Congruencia

H4.1 Si A y B son dos puntos de la recta a, y A′ es un punto sobre la recta a′ (sea esta igual a a o no), se tiene que, de un lado cualquiera de A′ en la recta a', existe un único B′ tal que el segmento $\overline{AB}$ es congruente con el segmento $\overline{A'B'}$, y lo denotamos por $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Todo segmento es congruente consigo mismo.

H4.2 Si un segmento $\overline{AB}$ es congruente con el segmento $\overline{A'B'}$ y también con el segmento $\overline{A''B''}$, entonces estos dos últimos son congruentes entre sí (es decir, la congruencia entre segmentos es transitiva).

H4.3 Sean $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ dos segmentos de la misma recta sin puntos en común a excepción de B, y sean además $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ dos segmentos de la recta a′ (sea ésta igual o no a a) sin más puntos en común que B′. Entonces, si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, se tiene que $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

H4.4 Sea un ángulo $\angle(h,k)$ en el plano α y sea una recta a′ en el plano α′. Supóngase que en el plano α′, se escoge uno de los lados respecto a a ′. Sea un semirayo h′ de a′ que emana de un punto O′ de dicha recta. Entonces, en el plano α′ existe un único semirayo k′ que sale de O′ de forma que $\angle(h,k)$ es congruente con $\angle(h',k')$, y de forma que todos los puntos del interior de $\angle(h',k')$ están en el lado escogido de α′. Se denota por $\angle(h,k) \cong \angle(h',k')$. Todo ángulo es congruente consigo mismo.

H4.5 Si el ángulo $\angle(h,k)$ es congruente con el ángulo $\angle(h',k')$ y con el ángulo $\angle(h'',k'')$, entonces estos dos son congruentes entre sí (es decir, la congruencia de ángulos es transitiva).

H4.6 (Criterio SAS) Si dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ se tiene $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, entonces se tiene a su vez $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ y $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

Grupo V: Continuidad

H5.1 Axioma de Arquímedes: Sea A_1 un punto cualquiera de una recta, situado entre los puntos arbitrarios A y B de la misma. Tómense los puntos A_2, A_3,... de tal manera que A_1 esté entre A y A_2, A_2 esté entre A_1 y A_3, etc. Supóngase además que los segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ ... son todos congruentes entre sí. Entonces, en esta serie existe siempre un cierto A_n tal que B está entre A y A_n.

Axioma de completitud

HC: A este sistema de puntos, rectas y planos no pueden añadirse otros elementos de manera que el sistema resultante forme una geometría nueva, obedeciendo todos los axiomas de los cinco grupos. En otras palabras, los elementos de la geometría forman un sistema que no es susceptible de extensión, tomando los cinco grupos de axiomas como válidos.

Nota. El "Axioma 21".
Hilbert introdujo en la primera edición del ***Grundlagen*** un axioma más que reza: "Pueden escogerse cuatro puntos cualesquiera A, B, C y D de una recta de forma que B esté entre A y C y entre A y D, y que C esté entre A y D y entre B y D", pero **E.H Moore** en 1902 la dedujo como consecuencia de los axiomas de incidencia y orden establecidos.

1.1.9 Consistencia e independencia de sistemas axiomáticos.

Diremos que un sistema axiomático es **consistente** cuando todos sus axiomas pueden ser ciertos a la vez, es decir, cuando no nos lleva a contradicciones. En caso contrario diremos que el sistema axiomático es **inconsistente**.

La mejor forma de garantizar la consistencia de un sistema axiomático es encontrar un modelo para dicho sistema axiomático.

Diremos que un determinado axioma de un sistema axiomático es **dependiente** del resto si es posible llegar a demostrar su verdad deduciéndolo del resto de axiomas, es decir, si es redundante. En caso contrario diremos que el axioma es **independiente**.

Para demostrar la independencia de un axioma es suficiente encontrar un modelo en el que se cumplan todos los otros axiomas y la negación de éste.

Diremos que un sistema axiomático es **independiente** cuando todos sus axiomas son independientes del resto, es decir, cuando no contenga ningún axioma redundante.

También podemos decir que una determinada **proposición es independiente de un determinado axioma** cuando sea posible demostrar esa proposición sin utilizar dicho axioma. En caso contrario diremos que la proposición es dependiente del axioma.
Llegar a demostrar la dependencia o independencia de una proposición respecto de un axioma puede resultar una tarea muy difícil, pero se puede facilitar con la utilización de modelos: Una determinada proposición dependerá de un determinado axioma si encontramos un modelo en el que se no se cumpla dicho axioma y tampoco se cumpla dicha proposición. En efecto, si fuera independiente de dicho axioma se podría deducir del resto, y por lo tanto tendría que ser cierta también en este modelo.

El capítulo 2 del *Grundlagen* está dedicado a demostrar la consistencia y la mutua independencia de los axiomas del Sistema Axiomático de Hilbert.

1.1.10 Completitud de sistemas axiomáticos.

Diremos que dos modelos de un mismo sistema axiomático son **isomorfos** cuando sea posible establecer una correspondencia entre sus objetos de forma que se mantengan las relaciones. Es decir, cuando sean idénticos para todos los efectos.

Diremos que un sistema axiomático es **completo** cuando todos sus modelos asociados sean isomorfos.

El Axioma HC de Hilbert afirma que su sistema axiomático es completo, es decir, que no se puede ampliar más, todos sus modelos posibles son isomorfos al modelo de plano cartesiano común IR^2.

Este axioma es controvertido, pues en realidad sería un meta-axioma, es decir, un axioma sobre los sistemas axiomáticos. Los matemáticos más importantes han comentado, para bien y para mal, sobre el Axioma de Completitud de Hilbert:

"An axiom about axioms with a complicated logical structure" (Schmidt)
"An unhappy axiom" (Freudenthal)
"The axioms of continuity are introduced by Hilbert, to show that they are really unnecessary." (Freudenthal)
"Hilbert's completeness axiom is obviously not a geometric statement, and not a statement formalizable in the language used previously—so what does it accomplish?" (M.J. Greenberg, 2010)
"The foundations of geometry contain more than insight in the nature of axiomatic." (Freudenthal)
"The most original creation in Hilbert's axiomatic" (Baldus)
"Hilbert has made the philosophy of mathematics take a long step in advance." (H. Poincaré)

Fuente: Several Topics from Geometry, de Franz Rothe

1.1.11 Construcción de nuevas geometrías.
Tomando como punto de partida un sistema axiomático concreto podemos generar nuevas geometrías de dos maneras distintas:

a) Eliminando uno o más axiomas, es decir, dejar de exigirlos. Por ejemplo, podemos hablar de “Geometría no arquimediana” si dejamos de imponer el Axioma de Arquímedes. A medida que vamos añadiendo axiomas vamos reduciendo el número de modelos válidos.

b) Sustituyendo un axioma por su negación y comprobando que el sistema resultante es consistente. El grupo más importante son las llamadas “**geometrías no euclídeas**”, es decir, aquellas que niegan el Postulado de la única paralela (“por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela”). Se pueden negar de varias formas: Exigiendo que por cada punto exterior a una recta pase más de una recta paralela a la primera (**geometría hiperbólica**), o exigiendo que no pase ninguna, es decir, que no exista paralelismo (**geometría elíptica**). Estas geometrías se descubrieron en el siglo XIX y supusieron una auténtica revolución en las matemáticas, pues durante más de dos mil años se había pensado que la geometría euclídea era la única posible. En palabras del gran geómetra canadiense **H.S.M. Coxeter**:

> El efecto del descubrimiento de la geometría hiperbólica sobre nuestras ideas de verdad y realidad ha sido tan profundo que difícilmente podemos imaginar lo traumático que fue descubrir en 1820 que una geometría distinta de la euclídea era posible.

Como consecuencia del descubrimiento de modelos geométricos hiperbólicos en el siglo XIX se acabó finalmente con uno de los quebraderos de cabeza históricos de las matemáticas: Los infructuosos intentos a lo largo de los siglos de demostrar el Postulado de la única paralela.

c) Sustituyendo un axioma por una proposición y estudiando las propiedades del sistema axiomático resultante.

1.1.12 Nota. El sistema axiomático de este libro.
El origen de este libro está en el de los documentos pdf del profesor **Wayne Aitken** que encontrados en su página web personal **http://public.csusm.edu/aitken_html/m410/**, en el que se sigue el sistema axiomático de Hilbert con algunas variaciones menores.

Se ha procurado acompañar todas las definiciones de todos los objetos geométricos con referencias a sus equivalentes, tanto en Los Elementos de Euclides como en el Grundlagen de Hilbert.

1.1.13 Nota. Geometría del plano vs. Geometría del espacio.
Tenemos que tener en cuenta también que el sistema axiomático de Hilbert comprende puntos, rectas y también los planos en el espacio, mientras que en este libro nos limitamos al ámbito de la geometría plana.

Entendiendo que la geometría del espacio es una ampliación natural e independiente de la geometría del plano, ignoraremos los axiomas que afectan a los planos y sólo estudiaremos los 17 axiomas del Grundlagen que se refieren a puntos y rectas. Por ejemplo, del Grupo I los Axiomas 3, 4, 5 y 6 no tienen sentido en una geometría plana.

Sin embargo, plano y espacio no son totalmente independientes. Por ejemplo, el Teorema de Desargues (12.4.2), que es un teorema de geometría plana, se puede demostrar fácilmente si ese plano lo entendemos dentro de un espacio euclídeo y podemos "levantar" los triángulos, pero es mucho más difícil de demostrar si no podemos "salir" de dicho plano.

1.2 Los axiomas de incidencia. Planos incidentales.

1.2.1 Definición. Plano. Geometría plana.

Un plano (o una geometría plana) es un par (Ω, L) donde Ω es un conjunto de elementos llamados **puntos** y L es una colección de subconjuntos de Ω llamados **rectas.** Estos puntos y rectas están sometidos a un conjunto de condiciones llamadas **axiomas**. Cada conjunto concreto de objetos matemáticos que verifique los axiomas constituye un **modelo** de la Geometría.

La geometría axiomática fija unos determinados axiomas y estudia las propiedades que se deducen de estos, independientemente de cualquier modelo asociado que podamos encontrar.

Observación: Al definir las rectas como subconjuntos del conjunto de puntos, la teoría de conjuntos nos proporciona toda la base lógica para definir la relación fundamental entre puntos y rectas, la **inclusión**: El punto P está (contenido) en la recta r si $P \in r$.
Y la relación fundamental entre rectas, la **concurrencia**: Dos rectas r y s son concurrentes en un punto P cuando $P \in r \cap s$.

1.2.2 Definición. Plano incidental.

Un **plano incidental** es un plano que cumple los siguientes axiomas, llamados "Axiomas de incidencia". Estos axiomas corresponden al **Grupo I** del *Grundlagen* de Hilbert, aunque nosotros nos reduciremos a los que atañen a la Geometría plana.

Axioma I1. El axioma de incidencia. (Elementos, postulado 1.1, H1.1)
Si A y B son dos puntos diferentes, existe una única recta r tal que $A \in r$ y $B \in r$.
Denotaremos por $\overleftrightarrow{AB}$ la única recta que pasa por A y B.

Observación. Hilbert añade en el *Grundlagen* el Axioma H1.2 que garantiza que dos puntos diferentes de una recta la determinan completamente:

$$\text{Si } r = \overleftrightarrow{AB} \text{ y } r = \overleftrightarrow{AC} \text{ con } B \neq C \text{ entonces } r = \overleftrightarrow{BC}.$$

Euclides en Los Elementos se limita a postular que siempre se puede trazar una línea recta entre dos puntos diferentes (Postulado 1.1):

᾿Ηιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.

En Los Elementos no aparecen el resto de consideraciones que relacionan puntos y rectas.

Axioma I2. (H1.7a)
En toda recta hay al menos dos puntos diferentes.

Axioma I3. El axioma de existencia. (H1.7b)
Existirán tres puntos A, B y C diferentes que no están contenidos en la misma recta, es decir, que si r es una recta, al menos uno de ellos no pertenece a r.

1.2.3 Proposición.
Sean los puntos P y Q. Entonces:
a) $P, Q \in \overleftrightarrow{PQ}$.
b) Si $P \neq Q$ y r pasa por P y Q entonces $r = \overleftrightarrow{PQ}$.
c) $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QP}$.

Demostración. Se derivan directamente del Axioma I1.

1.2.4 Proposición.
Toda recta r se puede escribir como $\overleftrightarrow{PQ}$ para ciertos puntos P y Q diferentes.

Demostración. Por el Axioma I2 existen $P \neq Q \in r$ y por 1.2.3b deducimos $r = \overleftrightarrow{PQ}$.

1.2.5 Definición. Puntos colineales.
Diremos que los n puntos $P_1, P_2, ..., P_n$ son colineales cuando exista una recta r tal que $P_k \in r$ para todo k.

1.2.6 Proposición.
Existen al menos tres puntos no colineales.

Demostración. Es una interpretación del Axioma I3.

1.2.7 Definición. Rectas concurrentes.
Diremos que las n rectas $r_1, r_2, ..., r_n$ son **concurrentes** si existe un punto P tal que $P \in r_k$ para todo k.

1.2.8 Proposición. (Hilbert, Teorema 1)
Dos rectas diferentes se cortan como mucho en un punto. Dos rectas diferentes concurrentes se cortan en un único punto.

Demostración. Sean r y s dos rectas diferentes. Supongamos que se cortan en dos puntos diferentes P y Q. Entonces, aplicando 1.2.3b dos veces, $r = \overleftrightarrow{PQ} = s$, absurdo.
Dos rectas diferentes concurrentes se cortan en algún punto puesto que son concurrentes, y en no más de un punto puesto que son diferentes.

1.2.9 Ejercicio.
Demostrar que el plano no está vacío, y por tanto nuestra geometría no es trivial. Debes usar un único axioma.

Demostración. El Axioma I3 garantiza que existen al menos tres puntos diferentes.

1.2.10 Ejercicio.
Demostrar que existen rectas en el plano. Debes usar dos únicos axiomas.

Demostración. El Axioma I3 garantiza la existencia de tres puntos diferentes. Tomando dos, el Axioma I1 garantiza la existencia de una recta que pasa por ambos.

1.2.11 Ejercicio.
Supongamos que P, Q y R son puntos y $P \neq Q$. Entonces P, Q y R son colineales si y sólo si R pertenece a $\overleftrightarrow{PQ}$.

Demostración: Si $P \neq Q$, la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ será la única recta que contiene P y Q (Axioma I1). Si P, Q y R son colineales, sea r la recta que los contiene. Luego r contiene a P y a Q y por tanto, por unicidad, $r = \overleftrightarrow{PQ}$. Luego $R \in \overleftrightarrow{PQ}$.
Recíprocamente, P y Q pertenecen a $\overleftrightarrow{PQ}$ por el Axioma I1, y si además R pertenece a $\overleftrightarrow{PQ}$, los tres puntos serán colineales.

1.2.12 Ejercicio.
Supongamos que P, Q y R son puntos distintos. Entonces P, Q y R son colineales si y sólo si $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{QR}$

Demostración: Si P, Q son puntos distintos, la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ será la única recta que los contenga (Axioma I1). De la misma forma, Q y R distintos implica que la recta $\overleftrightarrow{QR}$ será la única recta que contenga a Q y R, y si P y R son distintos la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ será la única recta que contenga a la vez a P y a R.
Entonces, si P, Q y R pasan por una misma recta r, tendremos que $r = \overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{QR}$, y recíprocamente, si $r = \overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{QR}$, entonces $P, Q, R \in r$.

1.2.13 Ejercicio.
Existen al menos tres rectas no concurrentes.

Demostración: Por el Axioma I3, existirán al menos tres puntos diferentes A, B y C no colineales. Puesto que $A \neq B$, el Axioma I1 garantiza la existencia de la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Y puesto que $C \neq A$ y $C \neq B$, el mismo axioma garantizará la existencia de las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Estas tres rectas no pueden ser concurrentes. En efecto, supongamos que existe un punto $D \in \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BC}$. Si $D = A$, entonces $A \in \overleftrightarrow{BC}$ y los tres puntos serían colineales, y llegamos a contradicción. Luego $D \neq A$, y de la misma forma $D \neq B$ y $D \neq C$.
Si $D \neq A$ entonces existirá una única recta $\overleftrightarrow{AD}$ que contiene a D y A, pero $D, A \in \overleftrightarrow{AB}$, luego $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AD}$, y de la misma forma llegamos a $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AD}$, luego $C \in \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{AB}$ y por tanto C, A y B serán colineales, llegando igualmente a contradicción.

1.2.14 Ejercicio.
Para cualquier recta r podemos encontrar siempre un punto $P \notin r$.

Demostración: Sea r una recta. Sabemos que existen tres puntos A, B y C no alineados, (Axioma I3), luego al menos uno de los tres no pertenecerá a r.

1.2.15 Ejercicio.
Para cualquier punto P, existirá al menos una recta r que no pase por P.

Demostración: Por el ejercicio 1.2.13, existen al menos tres rectas no concurrentes, luego P no pertenecerá al menos a una de ellas, pues si perteneciera a las tres serían concurrentes en P.

1.2.16 Ejercicio.
Para cualquier punto P, existen al menos dos rectas diferentes pasando por P.

Demostración: Por el ejercicio anterior, existirá una recta r que no pasa por P. Por el Axioma I2, existirán al menos dos puntos diferentes A y B en r, por lo que $r = \overleftrightarrow{AB}$. Tenemos que $P \neq A$, pues P no pertenece a r por hipótesis, y de la misma forma $P \neq B$. Las rectas $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ pasan ambas por P, y son diferentes, pues si $\overleftrightarrow{PA} = \overleftrightarrow{PB}$, entonces $B \in \overleftrightarrow{PA} \Rightarrow P \in \overleftrightarrow{AB} = r$, llegando a contradicción.

1.2.17 Ejercicio.
Supongamos que reemplazamos el Axioma I3 por el siguiente axioma:

Axioma I3a: Existe una recta r y un punto $P \notin r$.

Demuestra que de los axiomas I1, I2 y I3a podemos deducir el Axioma I3. Recíprocamente, demuestra que de los axiomas I1, I2 y I3 podemos deducir el Axioma I3a. Así pues, reemplazando el Axioma I3 por el Axioma I3a obtenemos un sistema de axiomas equivalente.

Demostración: Por el Axioma I3a, existe una recta r y un punto $P \notin r$. Por el Axioma I2, existirán dos puntos diferentes A, B en r, luego $r = \overleftrightarrow{AB}$. Los puntos A, B y P satisfacen el Axioma I3. Efectivamente, si existe una recta s que pasa por A, B y P, entonces $s = \overleftrightarrow{AB} = r$, luego $P \in r$, contradiciendo la hipótesis.
Recíprocamente, por el Axioma I3 existirán tres puntos diferentes A, B y C no colineales. sea $r = \overleftrightarrow{AB}$. Entonces $C \notin r$. Efectivamente, si $C \in r$, entonces los tres puntos serían colineales, contradiciendo la hipótesis.

1.2.18 Ejercicio.
Sea $r = \overleftrightarrow{AB}$ y $C \notin r$. Si $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC}$ entonces $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC}$.

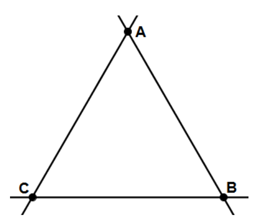
Demostración.
$$\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \in \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC} \\ B \in \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow r = \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC} \text{ por el Axioma I1.}$$

1.2.19 Definición. Rectas paralelas. (Elementos 1, definición 23)
Diremos que dos rectas r y s son paralelas cuando no tengan ningún punto común, es decir, cuando $r \cap s = \emptyset$.

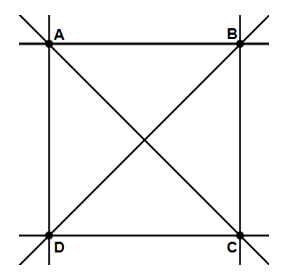
1.2.20 Definición. Plano afín.
Un plano afín es todo aquel plano incidental en el que se cumpla el **Postulado de la Única Paralela** "PUP": Dada una recta r y un punto P tal que $P \notin r$, existirá una única recta s paralela a r que pase por P.
Por ejemplo, en 13.1.4 se verá que todo plano cartesiano es afín.

1.3 Planos finitos.

1.3.1 Definición. El plano de tres puntos.
Puntos: Tres letras A, B y C.
Rectas: $\{\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\}\}$



1.3.2 Definición. El plano de cuatro puntos.
Puntos: Cuatro letras A, B, C y D.
Rectas: $\{\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\}\}$



Estos dos planos así definidos satisfacen los axiomas I1, I2 y I3, y por tanto son planos incidentales.

1.3.3 Definición. El plano de Fano.
Un plano de Fano es un plano cumpliendo los siguientes axiomas, llamados "Axiomas de Fano":

Axioma F1: Existe al menos una recta.
Axioma F2: Toda recta contiene exactamente tres puntos.
Axioma F3: Para toda recta r existe al menos un punto P tal que $P \notin r$.
Axioma F4: Todo par de puntos diferentes pertenecen a una única recta.
Axioma F5: Todo par de rectas tendrá al menos un punto en común.

1.3.4 Proposición.
Todo plano de Fano es un plano incidental.

Demostración. El Axioma I1 es el Axioma F4. El Axioma F2 implica el Axioma I2. El Axioma I3 se cumple aplicando el ejercicio 1.2.17.

1.3.5 Ejercicio.
En un plano de Fano existe al menos un punto.

Demostración. Basta aplicar el Axioma F1 y después el Axioma F2.

1.3.6 Ejercicio.
Todo par de rectas diferentes se cortan en un único punto.

Demostración. Dadas dos rectas r y s, por el Axioma F5 garantizamos que al menos existirá un punto $A \in r \cap s$. Supongamos que también $B \in r \cap s$, con $A \neq B$. Entonces las rectas r y s contienen ambos puntos, y por tanto, aplicando F4, tenemos $r = s$, contradiciendo la hipótesis.

1.3.7 Proposición.
En un plano de Fano existen exactamente siete puntos.

Demostración.
Por el Axioma F1 existirá al menos una recta r_1, y por el Axioma F2 dicha recta contendrá exactamente tres puntos, digamos A, B y C. Además, por el Axioma F3 existirá un punto D tal que $D \notin r_1$. Por lo tanto son cuatro puntos diferentes.
Los puntos A y D pertenecen a una recta r_2 por F4, y aplicando F2 a r_2 existirá tercer punto E. $E \notin r_1$, pues si $E \in r_1$ entonces $r_1 = r_2$ y por tanto $D \in r_1$, contradiciendo la hipótesis.
De la misma forma obtenemos los puntos $F \in BD$ y $G \in CD$.

1.3.8 Proposición.
En un plano de Fano cada punto pertenece a exactamente tres rectas.

Demostración.

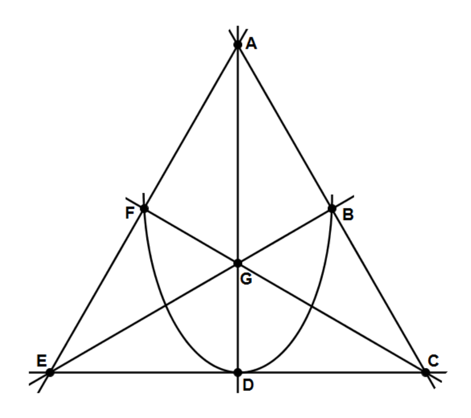
1.3.9 Proposición.
En un plano de Fano no existe ningún punto que pertenezca a todas las rectas a la vez.

Demostración.

1.3.10 Proposición.
En un plano de Fano existen exactamente siete rectas.

Demostración.

1.3.11 Definición. Un modelo para el plano de Fano.
Puntos: Siete letras diferentes A, B, C, D, E y F.
Rectas: Los conjuntos
$\{A,B,C\},\{A,F,E\},\{C,D,E\},\{F,G,C\},\{A,G,D\},\{E,G,B\},\{F,D,B\}$



1.3.12 Definición. Plano de Young.
El Plano de Young se diferencia del Plano de Fano únicamente en el quinto axioma:

Axioma Y1: Existe al menos una recta.
Axioma Y2: Toda recta contiene exactamente tres puntos.
Axioma Y3: Para toda recta r existe al menos un punto P tal que $P \notin r$.
Axioma Y4: Todo par de puntos diferentes pertenecen a una única recta.
Axioma Y5: Para cada recta r y para cada punto P tal que $P \notin r$, existe una única recta s que pasa por P y es paralela a r.

1.3.13 Definición. Un modelo para el plano de Young.
Puntos: Las letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J
Rectas: {A,B,C}, {A, D, G}, {A, E, H}, {A, F, I}, {B, D, H}, {B, E, I}, {B, F, G}, {C, D, I}, {C, E, G}, {C, F, H}, {D, E, F}, {G, H, I}

2 Orden.

2.1 Los axiomas de orden. Planos ordenados.

2.1.1 Definición. Axiomas de orden. Plano ordenado.
En una recta no tiene sentido hablar de puntos “más a la derecha” o “más a la izquierda”, pues no está orientada. No hay nada parecido a $A<B$. De lo que sí podemos hablar es de “punto entre otros dos”, y escribir $A*B*C$ (o $C*B*A$).
En Los Elementos no se dedica ni una sola frase a especificar qué se entiende por "un punto que está entre otros dos en una recta", y se supone evidente. Sin embargo, Hilbert en el ***Grundlagen*** corrige esta debilidad dedicando todo el Grupo II de axiomas a especificar esta relación.

Añadimos a los elementos y axiomas del apartado 1.2 una relación triádica entre los puntos, representada por A*B*C , y diremos que “**B está entre A y C**”. Esta relación deberá cumplir los siguientes axiomas B1, B2, B3 y B4. Un **plano ordenado** será aquel plano incidental que además incorpore una relación triádica de puntos A*B*C que cumpla estos cuatro axiomas.

Axioma B1. (H2.1)
Si A*B*C entonces:
a) C*B*A.
b) Los puntos A, B y C están en una misma recta.
c) A, B y C son puntos diferentes.

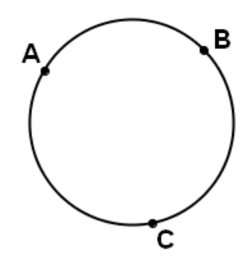
Axioma B2. (Elementos, Postulado 2; H2.2)
Si $A\neq B$, entonces existirán puntos C, D y E tales que $C*A*B$, $A*D*B$ y $A*B*E$.

Axioma B3. (H2.3)
Supongamos que A, B y C son puntos diferentes de una misma recta r. Entonces será cierta una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

a) A*B*C b) B*A*C c) A*C*B

Es decir, uno y sólo uno de ellos estará entre los otros dos.

Este axioma implica que las rectas no son circunferencias. Dados tres puntos de una circunferencia, siempre podemos decir que cualquiera de ellos está entre los otros dos.



2.1.2 Definición. Segmento.
Sean P y Q dos puntos no necesariamente diferentes. Definimos el **segmento** de extremos P y Q, que representaremos por $\overline{PQ}$, como el conjunto de puntos

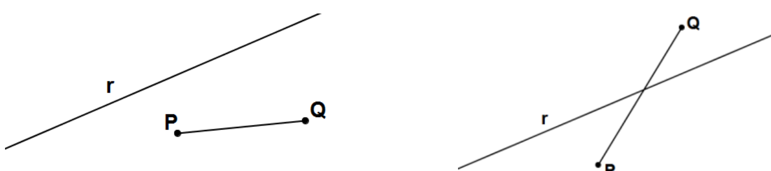
$$\overline{PQ} = \{X \mid P * X * Q\} \cup \{P, Q\}$$

Definimos **el interior del segmento** $\overline{PQ}$ como el conjunto de puntos

$$\overline{PQ} - \{P, Q\} = \{X \mid P * X * Q\}$$

2.1.3 Observación. Segmento degenerado.
Cuando $P = Q$ la definición anterior sigue siendo válida y se cumple $\overline{PP} = \{P\}$.

2.1.4 Definición. Puntos colaterales.
Sea una recta r y dos puntos P y Q (no necesariamente diferentes) que no pertenecen a r. Diremos que P y Q **están al mismo lado** de r, y escribiremos $P \approx_r Q$ cuando $\overline{PQ} \cap r = \varnothing$.
En caso contrario, diremos que P y Q **están en lados opuestos** de r, y escribiremos $P \not\approx_r Q$.

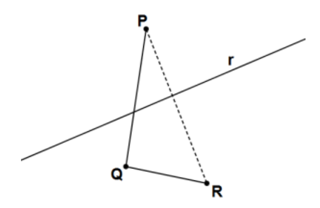


Axioma B4.
Si r es una recta, y P, Q y R puntos que no pertenecen a r. Entonces:

a) $P \approx_r Q$ y $Q \approx_r R$ entonces $P \approx_r R$, es decir, la relación $P \approx_r Q$ es transitiva.
b) $P \not\approx_r Q$ y $Q \not\approx_r R$ entonces $P \approx_r R$.

Este segundo axioma es muy importante porque limita a dos el número de lados que pueden tener las rectas. Es equivalente al "**Axioma de Pasch**" que se verá como consecuencia directa en 2.2.5.

2.1.5 Ejercicio.
Sean P, Q y R tres puntos que no pertenecen a una recta r. Si $P \not\approx_r Q$ y $Q \approx_r R$, entonces $P \not\approx_r R$.



Demostración. Si $P \approx_r R$, entonces puesto que $Q \approx_r R$, por el Axioma B4a se deduce $P \approx_r Q$, contradiciendo la hipótesis $P \not\approx_r Q$.

2.1.6 Proposición.
Sean dos puntos P y Q. Entonces $\overline{PQ} \subset \overleftrightarrow{PQ}$.

Demostración: Supongamos que $X \in \overline{PQ}$. Entonces se pueden dar tres casos: $X = P$, $X = Q$ o $P * X * Q$.
Si $X = P$ entonces $X \in \overleftrightarrow{PQ}$ por 1.2.3a y de la misma manera si $X = Q$.
Si $P * X * Q$ entonces X, P y Q pertenecen a la misma recta por el Axioma B1b, y la recta ha de ser necesariamente $\overleftrightarrow{PQ}$ por 1.2.3b.

2.1.7 Proposición.
Sean dos puntos P y Q. Entonces $\overline{PQ} = \overline{QP}$.

Demostración: Sea $X \in \overline{PQ}$. Entonces $X = P \in \overline{QP} \vee X = Q \in \overline{QP} \vee P * X * Q$
Si $P * X * Q$ entonces también $Q * X * P$, por lo que $X \in \overline{QP}$.

2.1.8 Definición. Semirrecta.
Sean dos puntos diferentes P y Q. Definiremos la semirrecta $\overrightarrow{PQ}$ por

$$\overrightarrow{PQ} = \overline{PQ} \cup \{X \mid P * Q * X\}$$



2.1.9 Proposición.
Sean P y Q dos puntos diferentes. Entonces $\overline{PQ} \subset \overrightarrow{PQ} \subset \overleftrightarrow{PQ}$.

Demostración. La inclusión de la izquierda se demuestra por unión de conjuntos.
Para la de la derecha, si $X \in \overrightarrow{PQ} \Rightarrow X \in \overline{PQ} \subset \overleftrightarrow{PQ} \vee P * Q * X$
Si $P * Q * X$ entonces P, Q y X pertenecen a una misma recta por el Axioma B1b y esta recta tiene que ser forzosamente $\overleftrightarrow{PQ}$ por 1.2.3b.

2.1.10 Proposición.
Si A*B*C o C*A*B entonces $C \notin \overline{AB}$.

Demostración. Si A*B*C entonces $C \neq A$ y $C \neq B$ por el Axioma B1c, y también no se cumple A*C*B por el Axioma B3, luego no se cumplirá ninguna de las condiciones para que $C \in \overline{AB}$. De la misma forma si C*A*B.

2.1.11 Ejercicio.
Demostrar que si $C * A * B$ entonces $C \notin \overrightarrow{AB}$.

Demostración. Supongamos que $C \in \overrightarrow{AB}$. Entonces C=A o C=B o A*C*B o A*B*C.
Ninguna de las cuatro posibilidades es compatible con la hipótesis $C * A * B$, por el Axioma B3 o por el Axioma B1c.

2.1.12 Ejercicio.

Demostrar que si $A \neq B$, entonces $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$.

Demostración. Si $P = A \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} \wedge P \in \overline{AB}$.

De la misma $P = B \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} \wedge P \in \overline{AB}$.

Si $P \neq A, B$ entonces

$P \in AB \cap BA$

$\Leftrightarrow (A * P * B \vee A * B * P) \wedge (B * P * A \vee B * A * P)$

$\Leftrightarrow A * P * B \vee (A * B * P \wedge B * A * P)$

Pero $A * B * P \wedge B * A * P$ es imposible por el Axioma B3, luego

$P \in \overline{AB} \cap \overline{BA} \Leftrightarrow A * P * B \Leftrightarrow P \in \overline{AB}$

2.1.13 Ejercicio.

Demostrar que si $A \neq B$, entonces $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$.

Demostración. Si $P = A \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \wedge P \in \overleftrightarrow{AB}$.

De la misma $P = B \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \wedge P \in \overleftrightarrow{AB}$.

Si $P \neq A, B$ entonces

$P \in AB \cup BA$

$\Leftrightarrow (A * P * B \vee A * B * P) \vee (B * P * A \vee B * A * P)$

$\Leftrightarrow A * P * B \vee A * B * P \vee B * A * P$

Pero por el Axioma B3:

$A * P * B \vee A * B * P \vee B * A * P \Leftrightarrow P \in \overleftrightarrow{AB}$

2.2 Semiplanos.

2.2.1 Proposición.
La relación $\approx_r$ definida en 2.1.4 es una **relación de equivalencia** en el conjunto de puntos que no pertenecen a r, es decir, cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Demostración. Sea una recta r y sean P, Q y R tres puntos que no pertenecen a r.
a) Propiedad reflexiva: $P \approx_r P$.

Por definición $\overline{PP} = \{P\}$, y $\{P\} \cap r = \varnothing$, luego $P \approx_r P$.

b) Propiedad simétrica: $P \approx_r Q \Rightarrow Q \approx_r P$

$P \approx_r Q \Rightarrow \overline{PQ} \cap r \neq \varnothing$, pero $\overline{PQ} = \overline{QP}$, luego $\overline{QP} \cap r \neq \varnothing \Rightarrow Q \approx_r P$

c) Propiedad transitiva: $P \approx_r Q \wedge Q \approx_r R \Rightarrow P \approx_r R$

Es el Axioma B4a.

2.2.2 Definición. Semiplano.
Sea P un punto que no pertenece a la recta r. Definiremos el semiplano determinado por P con frontera r por la clase de equivalencia $[P]_r$.

$$[P]_r = \{Q \notin r \mid P \approx_r Q\}$$

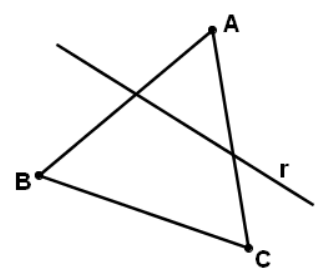
2.2.3 Lema.
Toda recta r determina al menos dos semiplanos.

Demostración. Sea $r = \overleftrightarrow{AB}$. Por 1.2.14 existirá un punto $C \notin r$. Por el Axioma B2 existirá un D tal que $D * A * C$.
$D \notin r$, pues si $D \in r$ entonces $r = \overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{AC}$ y por tanto $C \in r$, llegando a contradicción.
Claramente $D \not\approx_r C$ pues $A \in \overline{CD} \cap r$.

2.2.4 Proposición.
Toda recta determina exactamente dos semiplanos.

Demostración. En la proposición anterior hemos visto que determina al menos dos semiplanos. Veamos que no puede determinar ninguno más.
Sea $r = \overleftrightarrow{AB}$, y sean C y D en lados opuestos de r: $C \not\approx_r D$.
Supongamos que existe un tercer punto E tal que $E \not\approx_r C$ y $E \not\approx_r D$.
Por el Axioma B4(b), $C \not\approx_r D \wedge E \not\approx_r C \Rightarrow D \not\approx_r E$, llegando a una contradicción.

2.2.5 Teorema. Teorema de Pasch. Lema de Bernays. (H2.4).
Sean tres puntos A, B y C, y sea r una recta que pasa por $\overline{AB}$. Entonces
a) r pasa por $\overline{AC}$ o por $\overline{BC}$.
b) Si r no contiene ninguno de los puntos A, B o C, entonces pasa exclusivamente por uno de los dos segmentos anteriores. ("**Lema de Bernays**").
c) Si r pasa por los tres lados del triángulo, entonces cortará dos de sus lados por el vértice común.



Demostración. a) Supongamos que A, B y C no pertenecen a r. La recta r pasa por $\overline{AB}$, luego $A \not\approx_r B$. Entonces o bien $A \approx_r C$ y por tanto $B \not\approx_r C$, es decir, r pasa por $\overline{BC}$, o bien $A \not\approx_r C$, es decir, r pasa por $\overline{AC}$.
Si $A \in r$, entonces $A \in \overline{AC} \cap r$, Si $B \in r$, entonces $B \in \overline{BC} \cap r$, y si $C \in r$, entonces $C \in \overline{AC} \cap r$.
b) Supongamos que A, B y C no pertenecen a r. Si r pasa por $\overline{AC}$ y por $\overline{BC}$ entonces $A \approx_r C$ y $B \approx_r C$, luego por el Axioma B4(a) tenemos que $A \approx_r B$, lo cual es absurdo porque la recta r pasa por $\overline{AB}$ por hipótesis.
c) Supongamos que r pasa por los tres lados del triángulo. Si r no pasara por ninguno de los tres vértices entraríamos en contradicción con (b), luego pasará por al menos uno de sus vértices.

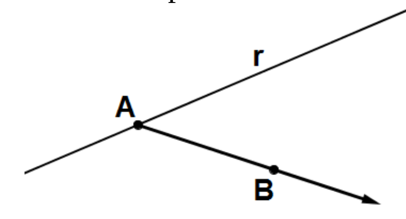
Observación: En los Elementos se supone que toda recta que entre por un lado de un triángulo deberá salir por uno de los otros dos lados. El matemático **M. Pasch** (1843-1930) fue el primero en proclamar que esta propiedad debía figurar como axioma, en su obra *Vorlesungen über neuere Geometrie*, (Leipsic, 1882).

2.2.6 Proposición.
El Lema de Bernays (2.2.5b) es equivalente al Axioma B4.

Demostración. En 2.2.5 acabamos de ver que el Axioma B4 implica el Lema de Bernays. Veamos ahora el recíproco.
Sea r una recta y P, Q y R puntos que no pertenecen a r. Veamos el apartado (a): Supongamos que $P \approx_r Q$ y $Q \approx_r R$. Si $P \not\approx_r R$, entonces por el Lema de Bernays tendríamos que o bien $P \not\approx_r Q$ o bien $Q \not\approx_r R$, contradiciendo la hipótesis. Luego $P \approx_r Q$.
Veamos el apartado (b): Supongamos que $P \not\approx_r Q$ y $Q \not\approx_r R$, es decir, la recta r pasa por $\overline{PQ}$ y por $\overline{QR}$. Si además $P \not\approx_r R$ entraríamos en contradicción con el Lema de Bernays cuando exige que solo puede pasar por uno de los dos. Luego $P \approx_r R$.

2.2.7 Ejercicio.

Sean una recta r, $A \in r$ y $B \notin r$. Todo punto de la semirrecta $\overrightarrow{AB}$, excepto A, pertenece a $[B]_r$, es decir, es colateral con B respecto a r.



Demostración. En primer lugar observamos que el único punto de corte entre r y $\overleftrightarrow{AD}$ es A, pues son rectas diferentes.

$P \in \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A*P*B \vee A*B*P \vee P = A \vee P = B$

El caso $P = A$ queda descartado, y el caso $P = B$ es trivial. Vamos los dos casos restantes.

Supongamos A*P*B o A*B*P. Si $X \in \overline{PB} \cap r \Rightarrow X = A$, pues $\overline{PB} \subset \overleftrightarrow{AD}$. Luego tendríamos P*A*B, contradiciendo la hipótesis (Axioma B3). Luego $\overline{PB} \cap r = \varnothing$, es decir, $P \in [B]_r$.

2.2.8 Ejercicio.

Sea una recta $\overleftrightarrow{AB}$ y sean C y D puntos en lados opuestos de la recta. Si C, A y D están alineados, entonces $C*A*D$.

Demostración. Si C y D están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, entonces $\overline{CD}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ se cortan en un punto P, es decir, $C*P*D$ con $P \in \overleftrightarrow{AB}$.

Las rectas $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ son diferentes, luego sólo pueden tener un punto de corte, que será el punto P.

Por otro lado, si C, A y P están alineados, $A \in \overleftrightarrow{CD}$, y claramente $A \in \overleftrightarrow{AB}$, luego $A \in \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{AB}$. Por la unicidad del punto de corte se deduce que $A = P$ y por tanto $C*A*D$.

2.3 Relación de orden de cuatro puntos.

La relación de orden de tres puntos en una recta se puede ampliar de forma natural a cuatro o más puntos. Definir una relación de orden de cuatro puntos será muy útil posteriormente para facilitar y simplificar la demostración de muchos de los resultados.

2.3.1 Definición. Relación de orden de cuatro puntos.
Sean cuatro puntos A, B, C, D . Diremos que A*B*C*D cuando se cumplan las siguientes cuatro condiciones al mismo tiempo:

A*B*C, A*B*D, A*C*D y B*C*D

Es decir, los cuatro puntos estarán ordenados cuando, descartando cualquiera de los cuatro, los otros tres mantienen el orden.

2.3.2 Proposición.
Si A*B*C*D entonces A, B, C y D son diferentes y colineales.

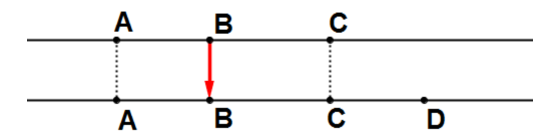
Demostración. Puesto que se cumple A*B*C, los puntos A, B y C son diferentes y colineales (Axioma B1). Sea r la recta que pasa por los tres. Claramente $r = \overleftrightarrow{AB}$.
Puesto que A*B*D, los tres puntos A, B y D son diferentes y $D \in \overleftrightarrow{AB}$, luego los cuatro puntos son colineales.
Por último, A*C*D implica que los puntos A, C y D son diferentes, por lo tanto los cuatro puntos son diferentes.

2.3.3 Proposición.
Si A*B*C*D entonces D*C*B*A.

Demostración. Aplicamos el Axioma B1a para cada condición:

$$A*B*C*D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B*C*D \Rightarrow D*C*B \\ A*C*D \Rightarrow D*C*A \\ A*B*D \Rightarrow D*B*A \\ A*B*C \Rightarrow C*B*A \end{array} \right\} \Leftrightarrow D*C*B*A$$

2.3.4 Proposición.
Si A*C*D y A*B*C entonces A*B*C*D



Demostración. $A*B*C*D \Leftrightarrow B*C*D \wedge A*C*D \wedge A*B*D \wedge A*B*C$
Tenemos que comprobar B*C*D y A*B*D.

$A*C*D \Rightarrow A,C,D \in \overleftrightarrow{AC}$, y de la misma forma $A*B*C \Rightarrow A,B,C \in \overleftrightarrow{AC}$, luego $A,B,C,D \in \overleftrightarrow{AC}$. Definimos $r = \overleftrightarrow{AC}$.

Sea E un punto $E \notin \overleftrightarrow{AC}$ (1.2.14).

Las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{CE}$ se cortan única y exclusivamente en el punto C, pues son diferentes (1.2.8)

$A*B*C \Rightarrow C \notin \overline{AB}$, luego $\overline{AB} \cap r = \emptyset$, y por lo tanto $A \approx_r B$

$A*C*D \Rightarrow A \not\approx_r D$

Aplicando el Axioma B4a tenemos que $B \not\approx_r D$, luego $\overline{BD} \cap r \neq \emptyset$. Pero $\overline{BD} \subset \overleftrightarrow{AC}$, luego forzosamente $\overline{BD} \cap r = C$, es decir B*C*D.

De la misma forma se demuestra la condición A*B*D.

2.3.5 Proposición.

Si A*B*D y B*C*D entonces A*B*C*D.

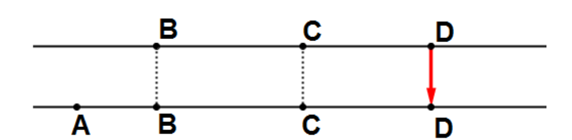
Demostración.

$$\left.\begin{array}{l} A*B*D \Rightarrow D*B*A \\ B*C*D \Rightarrow D*C*B \end{array}\right\} \Rightarrow D*C*B*A \Rightarrow A*B*C*D$$

Donde hemos utilizado el Axioma B1a y las proposiciones 2.3.3 y 2.3.4.

2.3.6 Proposición.

Si $A*B*C$ y $B*C*D$, entonces $A*B*C*D$.



Demostración. $A*B*C$ y $B*C*D$ implica que los cuatro puntos son diferentes y colineales. Sea r la recta que contiene a los cuatro puntos.

Desarrollando la definición de $A*B*C*D$, sólo tenemos que demostrar dos implicaciones:

i) $A*B*C \wedge B*C*D \Rightarrow A*C*D$

Hay tres posibilidades: $D*A*C$, $A*D*C$ y $D*C*A$. Veamos que las dos primeras nos llevan a contradicción.

Supongamos $D*A*C$. Por 2.3.5, $D*A*C \wedge A*B*C \Rightarrow D*A*B*C \Rightarrow D*B*C$, incompatible con $B*C*D$.

Supongamos $A*D*C$. Seguiremos un razonamiento similar al de 2.3.4:

Sea $E \notin \overleftrightarrow{AD}$ y $s = \overleftrightarrow{ED}$. El único punto de intersección entre r y s es D.

$$\left.\begin{array}{l} A*D*C \Rightarrow A \not\approx_s C \\ B*C*D \Rightarrow B \approx_s C \end{array}\right\} \Rightarrow A \not\approx_s B \Rightarrow A*D*B$$

Ahora $A*D*B \wedge A*B*C \Rightarrow A*D*B*C \Rightarrow D*B*C$ que es incompatible con $B*C*D$.

Luego la única posibilidad es $A*C*D$.

ii) $A*B*C \wedge B*C*D \Rightarrow A*B*D$. Hay tres posibilidades: $A*D*B$, $B*A*D$ y $A*B*D$. Veamos que las dos primeras nos llevan a contradicción.

Supongamos $A*D*B$. Entonces $A*D*B \wedge A*B*C \Rightarrow A*D*B*C \Rightarrow D*B*C$, incompatible con $B*C*D$.
Supongamos $A*D*B$. Entonces $A*D*B \wedge A*B*C \Rightarrow A*D*B*C \Rightarrow D*B*C$, incompatible con $B*C*D$.

2.3.7 Proposición.
Si $A*B*C$, $A*B'*C$ y $B \neq B'$ entonces $A*B*B'*C$ o $A*B'*B*C$.

Demostración. A, B y B' son diferentes y colineales, luego se tiene que dar uno de los tres casos siguientes: i) $A*B*B'$, ii) $A*B'*B$ o iii) $B*A*B'$.
i) $A*B*B' \wedge A*B'*C \Rightarrow A*B*B'*C$.
ii) $A*B'*B \wedge A*B*C \Rightarrow A*B'*B*C$
iii) $B*A*B' \wedge A*B'*C \Rightarrow B*A*B'*C \Rightarrow B*A*C$ absurdo, pues suponemos $A*B*C$.

2.3.8 Proposición.
Si $A*B*C$, $A*B*C'$ y $C \neq C'$ entonces $A*B*C*C'$ o $A*B*C'*C$.

Demostración. A, C y C' son tres puntos diferentes y colineales, luego se tiene que dar uno de los tres casos siguientes: i) $A*C*C'$, ii) $A*C'*C$ o iii) $C*A*C'$.
i) $A*C*C' \wedge A*B*C \Rightarrow A*B*C*C'$
ii) $A*C'*C \wedge A*B*C' \Rightarrow A*B*C'*C$
iii) $C*A*C' \wedge A*B*C' \Rightarrow C*A*B*C' \Rightarrow C*A*B$ absurdo, pues suponemos $A*B*C$.

2.3.9 Proposición.
Si A, B, C y D son cuatro puntos diferentes y colineales, y se cumple $A*B*C$.
Entonces se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

i) $D*A*B*C$ ii) $A*D*B*C$ iii) $A*B*D*C$ iv) $A*B*C*D$

Demostración. Si A, B, D son distintos y colineales entonces se da una situación: A*B*D, A*D*B o D*A*B. Por otro lado, A, C, D son distintos y colineales, luego se da una de las situaciones siguientes: A*C*D, C*A*D, o C*D*A. Aplicamos las proposiciones anteriores para estudiar caso por caso:

	A*B*D	A*D*B	D*A*B
A*C*D	A*B*C*D (iv) o A*C*B*D imposible	A*C*D*B imposible	D*C*A*B imposible
C*A*D	C*A*B*D imposible	C*A*D*B imposible	B*D*A*C imposible o D*B*A*C (i)
C*D*A	A*B*D*C (iii)	A*D*B*C (ii) o A*D*C*B imposible	C*D*A*B imposible

2.3.10 Corolario.
Si A, B, C y D son cuatro puntos diferentes y colineales, entonces existe una permutación X, Y, Z, W de estos cuatro puntos tal que X*Y*Z*W.

Demostración. Los puntos A, B y C son diferentes, luego i) $A*B*C$, ii) $A*C*B$ o iii) $B*A*C$. Basta construir las tres tablas anteriores con cada caso para obtener los 24 casos posibles.

2.3.11 Definición. Extremos de un segmento.
Los puntos A y B del segmento $\overline{AB}$ se denominan **extremos** del segmento. El siguiente ejercicio demuestra que los puntos A y B pueden ser determinados exclusivamente mediante la relación de orden en su conjunto de puntos.

2.3.12 Ejercicio.
Los extremos A y B de $\overline{AB}$ son los únicos puntos del segmento que no están entre dos puntos del mismo.

Demostración. Supongamos que $C*A*D$ y $C,D \in \overline{AB}$.
Supongamos en primer lugar que $D \neq B$ y $C \neq B$.
Sabemos que $D \neq A$ y $C \neq B$ por el Axioma B1c.
Luego $A*C*B$ y $A*D*B$. Por hipótesis $C*A*D$, luego por 1.4.5, $C*A*D*B$, y por tanto $C*A*B$, pero $A*C*B$, contradiciendo el Axioma B3.
Supongamos que $D = B$. Entonces $C*A*B$ con $C \in \overline{AB}$. Ahora $C \neq A$ y $C \neq B$, luego A*C*B. pero esto contradice el Axioma B3.
Supongamos que $C = B$. Entonces tenemos $B*A*D$, con $D \in \overline{AB}$. Ahora $D \neq A$ y $D \neq B$, luego A*D*B. pero esto contradice el Axioma B3.

2.3.13 Teorema.
Si $B*A*C$ entonces $\overline{BA} \subset \overline{BC}$.

Demostración. $P \in \overline{BA} \Rightarrow B*P*A$.
$B*P*A \wedge B*A*C \Rightarrow B*P*A*C \Rightarrow B*P*C \Rightarrow P \in \overline{BC}$.
Si $P = A$ o $P = C$ es trivial.

2.3.14 Ejercicio.
Supongamos que $B*A*C$. Entonces $\overline{BA} \cup \overline{AC} = \overline{BC}$, y $\overline{BA} \cap \overline{AC} = \{A\}$.

Demostración.
$$B*A*C \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{BA} \subset \overline{BC} \\ C*A*B \Rightarrow \overline{AC} \subset \overline{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{BA} \cap \overline{AC} \subset \overline{BC}.$$
Está claro que $\{A\} \subset \overline{BA} \cap \overline{AC}$. Veamos $\overline{BA} \cap \overline{AC} \subset \{A\}$. Sea $P \in \overline{BA} \cap \overline{AC}$
Si $P = B \Rightarrow A*B*C$, incompatible con $B*A*C$.
Si $P = A \Rightarrow A \in \{A\}$.
Si $P = C \Rightarrow B*C*A$, incompatible con $B*A*C$.
Si $B*P*A \wedge A*P*C$: $A*P*C \wedge B*A*C \Rightarrow A*B*P*C \Rightarrow A*B*C$, incompatible con $B*A*C$.

2.3.15 Proposición.
Si C*A*B entonces $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = \{A\}$.

Demostración.

$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = (\overline{AB} \cap \{P \mid A*B*P\}) \cup (\overline{AC} \cap \{P \mid A*C*P\}) =$
$= (\overline{AB} \cap \overline{AC}) \cup \left(\overline{AB} \cap \{P \mid A*B*P\}\right) \cup$
$\cup (\{P \mid A*B*P\} \cap \overline{AC}) \cup \left(\{P \mid A*B*P\} \cap \{P \mid A*C*P\}\right) =$
$= \{A\}$

$\overline{AB} \cap \overline{AC} = \{A\}$ por 2.3.14.

$\overline{AB} \cap \{P \mid A*B*P\} = \varnothing$ pues A*P*B y A*B*P son incompatibles.

$\{P \mid A*B*P\} \cap \overline{AC} = \varnothing$ pues $A*P*C \wedge C*P*A*B \Rightarrow P*A*B$ incompatible con A*P*C.

$\{P \mid A*B*P\} \cap \{P \mid A*C*P\} = \varnothing$, pues
$A*B*P \wedge C*A*B \Rightarrow C*A*B*P \Rightarrow C*A*P$, incompatible con $A*C*P$.

2.3.16 Definición. Semirrectas opuestas por el vértice.
Si A*B*C, diremos que $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BA}$ son semirrectas opuestas.

2.3.17 Proposición.
Si A*B*C, entonces $\overleftrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$

Demostración. Veamos que $\overleftrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$:

Aplicando B3, $P \in \overleftrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} P = A \vee P = B \\ P*A*C \vee A*P*C \vee A*C*P \end{cases}$

Si $P = A \vee P = B \Rightarrow P \in \overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$
Si $P*A*C$, entonces puesto que $A*B*C$ tenemos $P*A*B*C$ (2.3.6), luego $P*A*B$, por tanto $B*A*P$ y en consecuencia $P \in \overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$
De la misma manera
$A*C*P \wedge A*B*C \Rightarrow A*B*C*P \Rightarrow B*C*P \Rightarrow P \in \overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$
Por último, si $A*P*C \wedge A*B*C \Rightarrow A*P*B*C \vee A*B*P*C$
$A*P*B*C \Rightarrow A*P*B \Rightarrow P \in \overline{AB} \subset \overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$
$A*B*P*C \Rightarrow B*P*C \Rightarrow P \in \overline{BC} \subset \overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$
Veamos que $\overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA} \subset \overleftrightarrow{AC}$:
$A*B*C \Rightarrow A, B, C \in \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \subset \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BA} \subset \overleftrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$, luego $\overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA} \subset \overleftrightarrow{AC}$.

2.3.18 Ejercicio.
Supongamos que A*B*C. Entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Demostración. Veamos en primer lugar $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{AC}$. Si $P \in \overrightarrow{AB}$ entonces
i) $P = A \Rightarrow P \in \overrightarrow{AC}$
ii) $P = B \Rightarrow A*P*C \Rightarrow P \in \overrightarrow{AC}$
iii) $A*P*B$. Puesto que por hipótesis $A*B*C$, tenemos $A*P*B*C$, y por tanto $A*B*C$. Luego $P \in \overrightarrow{AC}$
iv) $A*B*P$. Puesto que por hipótesis $A*B*C$, sólo puede suceder $A*B*P*C$, y por tanto $B*P*C$ y $P \in \overrightarrow{AC}$, o bien $A*B*C*P$ y por tanto $B*C*P$ y $P \in \overrightarrow{AC}$.

Veamos ahora $\overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{AB}$. Si $P \in \overrightarrow{AC}$ entonces:
i) $P = A \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB}$
ii) $P = C \Rightarrow A*B*P \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB}$
iii) $A*P*C$. Puesto que por hipótesis $A*B*C$, tenemos o bien $A*P*B*C$, y por tanto $A*P*B$. Luego $P \in \overrightarrow{AB}$, o bien $A*B*P*C$, y por tanto $A*B*P$. Luego $P \in \overrightarrow{AB}$,
iv) $A*C*P$. Puesto que por hipótesis $A*B*C$, deducimos que $A*B*C*P$, y por tanto $A*B*P$.

2.3.19 Ejercicio.
Supongamos que $P \in \overrightarrow{AB}$, y $P \neq A$. Entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$, y $B \in \overrightarrow{AP}$.

Demostración. Si $P = B$ trivialmente $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$.
Si $A*P*B$ entonces por el ejercicio anterior, 2.3.18, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}$.
Si $A*B*P$, igualmente por 2.3.18 deducimos que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}$.
Ahora es trivial que $B \in \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$.

2.3.20 Ejercicio.
Toda recta contiene infinitos puntos.

Demostración. Sea una recta r. $r = \overleftrightarrow{A_1A_2}$ con $A_1 \neq A_2$ por 1.2.4.
Por el Axioma B2, existirá un A_3 tal que $A_1 * A_2 * A_3$. $A_3 \in r$ por el Axioma B1b, y $A_3 \neq A_2$ y $A_3 \neq A_1$ por el Axioma B1c.
De la misma forma, podemos ir añadiendo puntos $A_k \in r$ tales que $A_{k-2} * A_{k-1} * A_k$, $A_k \neq A_{k-1}$ y $A_k \neq A_{k-2}$.
Tenemos una sucesión de puntos $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ tales que $A_{k-2} * A_{k-1} * A_k$.
Veamos que se cumple $A_1 * A_{k-1} * A_k$ para todo k, por inducción:
Es cierto para k=3: $A_1 * A_2 * A_3$, y si suponemos que es cierto hasta k-1: $A_1 * A_{k-2} * A_{k-1}$, entonces, puesto que $A_{k-2} * A_{k-1} * A_k$, tenemos que $A_1 * A_{k-2} * A_{k-1} * A_k$, luego $A_1 * A_{k-1} * A_k$, como queríamos ver.
Veamos ahora que es una sucesión de segmentos encajados: $\overline{A_1A_2} \subset ... \subset \overline{A_1A_k}$, nuevamente por inducción: $\overline{A_1A_2} \subset \overline{A_1A_3}$ pues $A_1 * A_2 * A_3$ (Teorema 2.3.13).
Supongamos ahora que es cierto hasta k-1: $\overline{A_1A_2} \subset \overline{A_1A_3} \subset \overline{A_1A_4} ... \subset \overline{A_1A_{k-1}}$. Puesto que $A_1 * A_{k-2} * A_{k-1}$, y $A_{k-2} * A_{k-1} * A_k$ tenemos que $A_1 * A_{k-2} * A_{k-1} * A_k$, y por tanto $A_1 * A_{k-1} * A_k$, luego por 2.3.13 deducimos que $\overline{A_1A_{k-1}} \subset \overline{A_1A_k}$.
Veamos, por último, que $A_k \notin \overline{A_1A_j}$ para todo j<k. Puesto que son segmentos encajados, es suficiente ver $A_k \notin \overline{A_1A_{k-1}}$. Supongamos que $A_k \in \overline{A_1A_{k-1}}$. Puesto que hemos demostrado $A_1 * A_{k-1} * A_k$, los tres puntos son diferentes, luego $A_1 * A_k * A_{k-1}$, pero esto contradice el Axioma B3.
Así pues, la cadena de segmentos encajados es estricta: $\overline{A_1A_{k-1}} \subset \overline{A_1A_k}$ y $\overline{A_1A_{k-1}} \neq \overline{A_1A_k}$.

Veamos que son todos diferentes: $A_k \neq A_j$ para todo $k \neq j$.
Si $A_k = A_j$ para $j < k$, entonces $\overline{A_1 A_k} = \overline{A_1 A_j}$, contradiciendo el hecho demostrado anteriormente de que los intervalos están encajados de forma estricta: $\overline{A_1 A_k} \neq \overline{A_1 A_j}$.
Así pues, la sucesión de puntos $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ son todos diferentes.

2.3.21 Ejercicio.
Todo segmento contiene infinitos puntos.

Demostración. Dado un segmento $\overline{AB}$, existirá un B_1 tal que $A * B_1 * B$, por el Axioma B2. De la misma forma podemos obtener un B_2 tal que $A * B_2 * B_1$, un B_3 tal que $A * B_3 * B_2$, etc. Es fácil demostrar que la sucesión $\{B_1, B_2, ...\}$ se compone de infinitos puntos diferentes del segmento $\overline{AB}$.

2.3.22 Definición. Extremo de una semirrecta.
Llamaremos extremo de la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ al punto A. El siguiente lema nos garantiza que el extremo de una semirrecta queda determinado en el conjunto de puntos de la misma por la relación de orden, y por lo tanto es único. Así pues, el extremo de una semirrecta está bien definido, pues no depende de la pareja de puntos que tomemos para su definición.

2.3.23 Lema.
El punto A de la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ es el único punto de la semirrecta que no está entre otros dos puntos cualesquiera de la misma.

Demostración. Claramente $A \in \overline{AB} \subset \overrightarrow{AB}$ por 2.1.9.
Supongamos que existen $C, D \in \overrightarrow{AB}$ tales que $C * A * D$, es decir, A está entre otros dos puntos de la semirrecta. Luego $A \neq D$ por el Axioma B1c, y por 2.3.17 tenemos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. Pero ahora, por 2.1.14, deducimos que $C \notin \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$, contradiciendo la hipótesis.
Veamos que el resto de puntos de la semirrecta están entre dos puntos de la misma.
Sea $C \in \overrightarrow{AB}$, $C \neq A$. Nuevamente por 2.3.19 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, y por el Axioma B2, existirá un D tal que A*C*D. El punto $D \in \overrightarrow{AC}$ claramente, luego $D \in \overrightarrow{AB}$, y por tanto C está entre dos puntos de la semirrecta.

2.3.24 Corolario.
Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son iguales como conjuntos, entonces A=C.

Demostración. A es el único punto del conjunto $\overrightarrow{AB}$ que no está entre otros dos puntos del mismo. Y por otro lado, C es el único punto del conjunto $\overrightarrow{CD}$ que no está entre otros dos puntos del mismo. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, entonces A=C por unicidad.

2.3.25 Ejercicio.
Si $A * B * C$, $D \in \overrightarrow{BC}$ y $D \neq B$ entonces A*B*D.

Demostración. Si $D \in \overrightarrow{BC}$ tendremos una de las siguientes situaciones:
i) $B*C*D \Rightarrow A*B*C*D \Rightarrow A*B*D$
ii) $B*D*C \Rightarrow A*B*D*C \Rightarrow A*B*D$
iii) D=C, y por tanto A*B*D
iv) D=B no sucede por hipótesis.

2.3.26 Ejercicio.
Si $A*B*C$, $D \in \overrightarrow{BC}$ y $D \neq B$ entonces A*B*D.

Demostración. Sea $D \in \overrightarrow{BC} \wedge D \neq B$. Si $D = C$ es trivial.
Si $B*D*C \Rightarrow A*B*D*C \Rightarrow A*B*D$.
Si $B*C*D \Rightarrow A*B*C*D \Rightarrow A*B*D$.

2.3.27 Definición. Semirrecta opuesta.
Dada una semirrecta $\overrightarrow{AB}$, definimos su semirrecta opuesta $op(\overrightarrow{AB})$ como
$$op(\overrightarrow{AB}) = \{P \mid P*A*B\} \cup \{A\}$$

2.3.28 Proposición.
$$op(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \text{ para cualquier punto } C*A*B.$$

Demostración. Sea C cualquier punto $C*A*B$.
Veamos en primer lugar $op(\overrightarrow{AB}) \subset \overrightarrow{AC}$.
Sea $P \in (\overrightarrow{AB})$. Si $P = A$ entonces claramente $P = A \in \overrightarrow{AC}$, y de la misma forma, si $P = C$ entonces $P = C \in \overrightarrow{AC}$. Supongamos que $P \neq A, C$, es decir, $P*A*B$.
$P*A*B$ y $C*A*B$ implica $P*C*A*B$ o $C*P*A*B$ (2.3.7)
Si $P*C*A*B$ entonces $P*C*A$ y por tanto $P \in \overrightarrow{AC}$.
Si $C*P*A*B$ entonces $C*P*A$ y por tanto $P \in \overrightarrow{AC}$.
En todo caso, $P \in \overrightarrow{AC}$.
Veamos ahora que $\overrightarrow{AC} \subset op(\overrightarrow{AB})$.
Sea $P \in \overrightarrow{AC}$. Se pueden dar los siguientes casos:
a) $P = A$. Entonces $P \in op(\overrightarrow{AB})$ por construcción de $op(\overrightarrow{AB})$.
b) $P = C$. Luego $C*A*B \Rightarrow P*A*B$ y por tanto $P \in op(\overrightarrow{AB})$.
c) $A*P*C$. Entonces
$C*A*B \Rightarrow B*A*C \Rightarrow B*A*P*C \Rightarrow B*A*P \Rightarrow P*A*B \Rightarrow P \in op(\overrightarrow{AB})$
d) $A*C*P$. De la misma manera,
$C*A*B \Rightarrow B*A*C \Rightarrow B*A*C*P \Rightarrow B*A*P \Rightarrow P*A*B \Rightarrow P \in op(\overrightarrow{AB})$

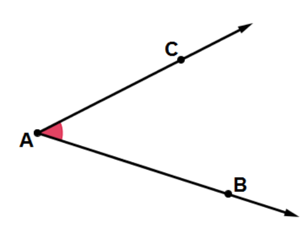
2.3.29 Ejercicio.
a) $\overrightarrow{AB} \cap op(\overrightarrow{AB}) = \{A\}$
b) $\overrightarrow{AB} \cup op(\overrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{AB}$

2.4 Ángulos.

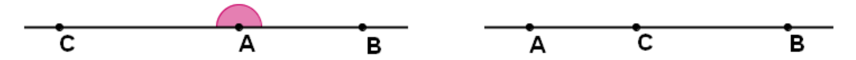
2.4.1 Definición. Ángulo.

Un ángulo son dos semirrectas no alineadas con el extremo en común.
Es decir, si tomamos tres puntos A, B y C no alineados, definiremos el ángulo $\angle BAC$ por

$$\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$$

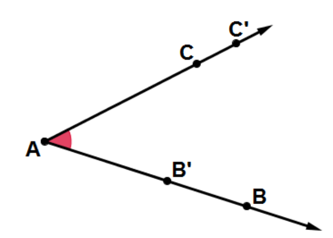


Observación: Al exigir que los puntos no estén alineados quedan excluidos como ángulos los "planos" y los "nulos":



2.4.2 Proposición.

Sean A, B, C tres puntos no colineales. Si $B' \in \overrightarrow{AB}$ y $C' \in \overrightarrow{AC}$, con $B' \neq A$ y $C' \neq A$, entonces A, B' y C' son también no colineales y $\angle BAC = \angle B'AC'$.



Demostración. Supongamos que existe una recta r tal que $A, B', C' \in r$.

$B' \in \overrightarrow{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$ y por lo tanto $\overleftrightarrow{AB} = r$ (Axioma I1)

De la misma forma llegamos a $\overleftrightarrow{AC} = r$, luego $A, B, C \in r$, absurdo.

Por lo tanto $B' \in \overrightarrow{AB}$ y $B' \neq A$ entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'}$ (2.3.19), y de la misma manera $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$, luego $\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} \cup \overrightarrow{AC'} = \angle B'AC'$

2.4.3 Definición. Vértice de un ángulo.

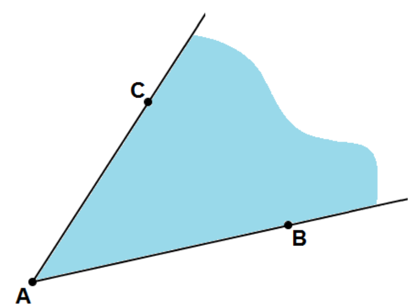
Diremos vértice del ángulo $\angle BAC$ al punto A. Por 2.3.24, el vértice de un ángulo es el único punto del ángulo que no está entre dos puntos del mismo.

2.4.4 Definición. Lados de un ángulo.

Diremos **lados** del ángulo $\angle BAC$ a las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

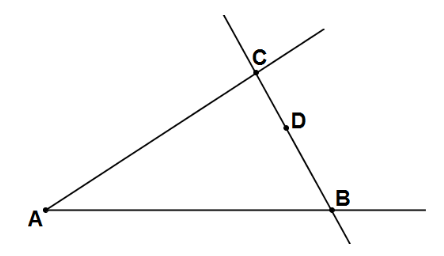
Observación: Los lados de un ángulo son independientes de los puntos B y C escogidos para definirlo (ver 2.4.2).

2.4.5 Definición. Interior y exterior de un ángulo.
Sean A, B y C tres puntos no colineales. Definimos el **interior del ángulo** $\angle BAC$ por $[B]_{\overleftrightarrow{AC}} \cap [C]_{\overleftrightarrow{AB}}$, es decir los puntos que son colaterales con B respecto $\overleftrightarrow{AC}$ y colaterales con C respecto a $\overleftrightarrow{AB}$.



Se define el **exterior del ángulo** $\angle BAC$ por el conjunto de todos los puntos que no están en su interior.

2.4.6 Proposición. El Teorema del segmento cruzado.
Supongamos que A, B y C son tres puntos no colineales, y sea $D \in \overline{BC}$. Entonces D pertenece al interior de $\angle BAC$ si y sólo si B*D*C.



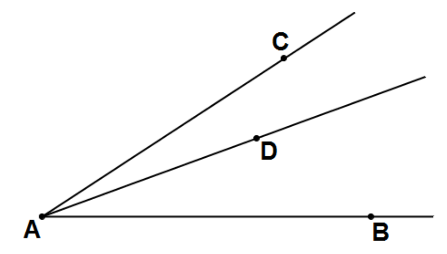
Demostración. Supongamos que D pertenece al interior de $\angle BAC$. Entonces $D \approx_{\overleftrightarrow{AC}} B$ y $D \approx_{\overleftrightarrow{AB}} C$.

En particular $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ y $D \notin \overleftrightarrow{AB}$, por lo tanto $D \neq C$ y $D \neq B$.
Por el Axioma B3 sólo se puede dar una de las siguientes tres situaciones:
i) D*B*C, ii) B*D*C o iii) B*C*D.
Veremos que se cumple la segunda viendo que las otras dos nos llevan a absurdo.
Supongamos que i) D*B*C. Entonces $B \in \overline{DC} \cap \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow D \not\approx_{\overleftrightarrow{AB}} C$, contradiciendo la hipótesis.
De la misma forma vemos que iii) B*C*D nos lleva al absurdo. Así pues se cumple B*D*C.
Supongamos por el contrario que B*D*C. Entonces $B \notin \overline{DC}$ por (2.1.10). Pero B es el único punto de intersección posible entre $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ (por 1.2.8), luego $\overline{DC} \cap \overleftrightarrow{AB} = \varnothing$, es decir $D \approx_{\overleftrightarrow{AB}} C$. De la misma forma vemos que $D \approx_{\overleftrightarrow{AC}} B$.

2.5 Ordenación de semirrectas con extremo común.

2.5.1 Proposición.

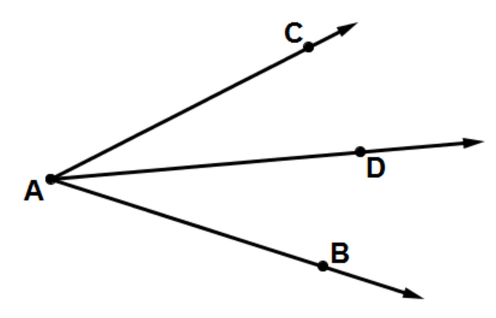
Sea un ángulo $\angle BAC$ y D un punto de su interior. Entonces todos los puntos de $\overrightarrow{AD}$, exceptuando A, pertenecen también al interior de $\angle BAC$.



Demostración. $P \in \overrightarrow{AD} - \{A\} \Rightarrow P \in [D]_{\overleftrightarrow{AB}}$ por 2.2.7.
Pero $C \in [D]_{\overleftrightarrow{AB}} \Rightarrow [D]_{\overleftrightarrow{AB}} = [C]_{\overleftrightarrow{AB}}$ (una propiedad fundamental de las clases de equivalencia)
Luego $P \in [C]_{\overleftrightarrow{AB}}$. De la misma forma se comprueba que $P \in [B]_{\overleftrightarrow{AC}}$, es decir, P pertenece al interior de $\angle BAC$.

2.5.2 Definición. Ordenación de semirrectas con extremo común.

Sean cuatro puntos diferentes A, B, C y D, tales que las semirrectas $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ son diferentes, y tales que los puntos A, B y C no son colineales. (es decir, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no son semirrectas opuestas. Si D está en el interior de $\angle BAC$ entonces diremos que $\overrightarrow{AD}$ está entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, y escribiremos $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

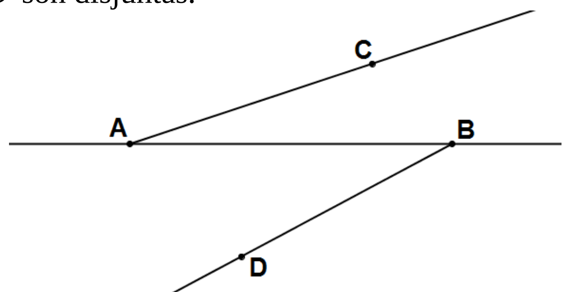


Observación 1: Por construcción está claro que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ es equivalente a $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

Observación 2: La Proposición 2.4.2 garantiza que el ángulo $\angle BAC$ depende de las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, y no de la elección de los puntos $B \in \overrightarrow{AB}$ y $C \in \overrightarrow{AC}$ escogidos. Por otro lado, la proposición 2.5.1 garantiza que si $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, todo punto de la semirrecta $\overrightarrow{AD}$, excepto A, pertenece al interior de $\angle BAC$. Todo esto garantiza que la definición del orden entre semirrectas con extremo común está bien definido, es decir, es independiente de la elección de los puntos B, C y D de cada semirrecta.

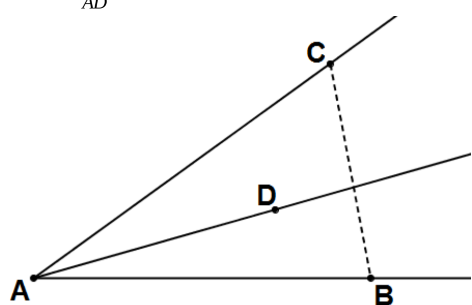
2.6 El Teorema de la semirrecta interior.

2.6.1 Lema.
Si C y D son dos puntos en lados opuestos de una recta $r = \overleftrightarrow{AB}$, $A \neq B$, entonces las semirrectas $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ son disjuntas.



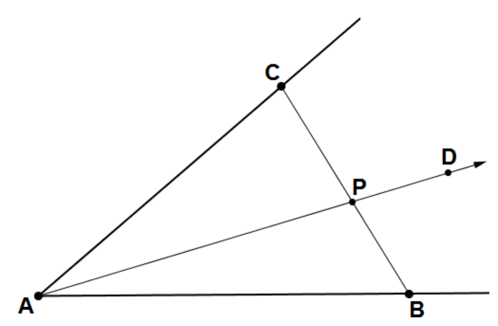
Demostración. Por el ejercicio 2.2.7, todo punto de la semirrecta $\overrightarrow{AC}$, exceptuando el extremo A, es colateral con C respecto a r. De la misma forma todo punto de la semirrecta $\overrightarrow{BD}$, exceptuando el extremo B, será colateral con D respecto a r. Pero C y D están en lados opuestos, luego A y B serían los únicos puntos que pueden ser colaterales respecto r, pero $A \neq B$.

2.6.2 Lema. Propiedad de separación.
Si $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ entonces $B \not\approx_{\overleftrightarrow{AD}} C$.



Demostración. Si $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ entonces D está en el interior de $\angle BAD$, luego $D \approx_{\overleftrightarrow{AC}} B$ y $D \approx_{\overleftrightarrow{AB}} C$.
Sea E un punto tal que E*A*C. Entonces $E \not\approx_{\overleftrightarrow{AB}} C$, y puesto que $D \approx_{\overleftrightarrow{AB}} C$, tenemos que $E \not\approx_{\overleftrightarrow{AB}} D$ (2.2.6). Luego $\overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BE} = \varnothing$ (2.6.1), luego en particular $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BE} = \varnothing$.
Sea F un punto tal que F*A*D. Entonces $F \not\approx_{\overleftrightarrow{AC}} D$, y puesto que $D \approx_{\overleftrightarrow{AC}} B$, tenemos que $F \not\approx_{\overleftrightarrow{AC}} B$. Luego $\overrightarrow{AF} \cap \overrightarrow{BE} = \varnothing$ (2.6.1), y en particular $\overrightarrow{AF} \cap \overline{BE} = \varnothing$
Pero $\overleftrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} \cup \overrightarrow{AD}$ (2.1.13), luego $\overleftrightarrow{AD} \cap \overline{BE} = \varnothing$, es decir, $B \approx_{\overleftrightarrow{AD}} E$. Teniendo en cuenta que $C * A * E \Rightarrow C \not\approx_{\overleftrightarrow{AD}} E$, llegamos a $B \not\approx_{\overleftrightarrow{AD}} C$.

2.6.3 Teorema. El teorema de la semirrecta interior.
Supongamos $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$, es decir, A, B y C son puntos no colineales y D pertenece al interior de $\angle BAC$. Entonces la semirrecta $\overrightarrow{AD}$ corta el interior del segmento $\overline{BC}$.
Recíprocamente, si A, B y C son puntos no colineales y B*D*C, entonces
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.



Demostración. Por el lema anterior (2.6.2) sabemos que $B \not\approx_{\overline{AD}} C$, es decir, la recta $\overleftrightarrow{AB}$ corta el segmento $\overline{BC}$ en un punto P, $B*P*C$.
Veamos ahora que P pertenece a la semirrecta $\overrightarrow{AD}$.
Supongamos, por el contrario, que P*A*D. Entonces $P \not\approx_{\overline{AB}} D$, pero D pertenece al interior de $\angle BAC$, luego $D \approx_{\overline{AB}} C$, y por tanto $P \not\approx_{\overline{AB}} C$, que está en contradicción con B*P*C, pues $P \in \overline{BC} \subset [C]_{\overline{AB}}$ (2.2.7)

Veamos el recíproco: Supongamos que A,B y C son tres puntos no colineales, y B*D*C. Por lo tanto D pertenece a $\overleftrightarrow{BC}$ y podemos aplicar 2.4.6 para deducir que D pertenece al interior de $\angle BAC$.

2.6.4 Proposición.
Si $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$ entonces $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.

Demostración. Si $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$ entonces, por 2.6.3, $\overrightarrow{AD}$ corta $\overline{BC}$ en un punto D' tal que B*D'*C.
Puesto que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD'}$ tenemos que $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD'}$, por lo que aplicando nuevamente 2.6.3, existirá un E' en $\overrightarrow{AE}$ tal que B*E'*D'. Luego aplicando 2.3.4, B*E'*D'*C, y por tanto B*E'*C, por lo que, por el recíproco de 2.6.3, llegamos a $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE'}-\overrightarrow{AC}$, es decir, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}$, y E'*D'C, luego $\overrightarrow{AE'}-\overrightarrow{AD'}-\overrightarrow{AC}$, que es equivalente a $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.

2.6.5 Proposición.
Si D está en el interior de $\angle BAC$, el interior de $\angle BAD$ es un subconjunto del interior de $\angle BAC$.

Demostración. Si D está en el interior de $\angle BAC$, entonces $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.
Sea P un punto del interior de $\angle BAD$. Entonces $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD}$, luego aplicando la proposición anterior deducimos que $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}$, es decir, P está en el interior de $\angle BAC$.

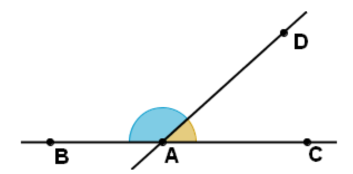
2.6.6 Proposición.
Dadas tres semirrectas con origen A, como mucho una de ellas puede estar entre las otras dos.

Demostración. Supongamos $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$. Entonces, aplicando 2.6.4 llegaríamos al absurdo $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

2.6.7 Ejercicio.
Dibuja en un papel tres semirrectas para las cuales ninguna de ellas está entre las otras dos. El Axioma B3 no es válido para la relación de orden que hemos establecido con los ángulos (sólo funciona cuando dos de las semirrectas están en el mismo semiplano que determina la tercera).

2.7 Ángulos suplementarios.

2.7.1 Definición. Ángulos suplementarios.
Diremos que los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DAC$ son suplementarios cuando se cumple B*A*C y el punto D no pertenece a $\overleftrightarrow{BC}$.



2.7.2 Proposición. Existencia del ángulo suplementario.
Todo ángulo tiene un ángulo suplementario.

Demostración. Sea un ángulo $\alpha = \angle BAD$. Por el Axioma B2 existirá un punto C tal que B*A*C. El punto D no pertenece a $\overleftrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{BC}$, luego tenemos todas las condiciones de la definición de ángulos suplementarios.

2.7.3 Proposición.
Los interiores de dos ángulos suplementarios son disjuntos.

Demostración. Supongamos que E pertenece al interior de $\angle BAC$, luego $E \approx_{\overleftrightarrow{AB}} C$ y $E \approx_{\overleftrightarrow{AC}} B$. Supongamos que E también pertenece al interior de $\angle DAC$, luego $E \approx_{\overleftrightarrow{AC}} D$ y $E \approx_{\overleftrightarrow{DA}} C$. Así pues, por transitividad, tenemos que $E \approx_{\overleftrightarrow{AC}} B$ y $E \approx_{\overleftrightarrow{AC}} D$, luego $B \approx_{\overleftrightarrow{AC}} D$, contradiciendo la hipótesis B*A*C.

2.7.4 Proposición.
Supongamos B*A*C y sea $D \notin \overleftrightarrow{BC}$. Sea E un punto al mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$ que D. Entonces será cierta una y sólo una de las siguientes sentencias: (a) E está en el interior de $\angle BAD$, (b) E está en la semirrecta $\overrightarrow{AD}$, (c) E está en el interior de $\angle CAD$.

Demostración. Si $E \in \overrightarrow{AD}$ entonces no puede pertenecer a ningún interior, puesto que no se puede cumplir $E \approx_{\overleftrightarrow{AD}} B$ ni $E \approx_{\overleftrightarrow{AD}} C$, y se cumple (b).
Supongamos que $E \notin \overrightarrow{AD}$. Entonces $E \notin \overleftrightarrow{AD}$, pues seguro que no pertenece a la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{AD}$ pues todos estos puntos están al otro lado de $\overleftrightarrow{BC}$.
Como $E \notin \overleftrightarrow{AD}$, puesto que B*A*C, tenemos que $B \not\approx_{\overleftrightarrow{AD}} C$, luego o bien $E \approx_{\overleftrightarrow{AD}} B$ o bien $E \approx_{\overleftrightarrow{AD}} C$.
Si $E \approx_{\overleftrightarrow{AD}} B$, puesto que además $E \approx_{\overleftrightarrow{BC}} D$ por hipótesis, tenemos que E pertenece al interior de $\angle BAD$ (a), y si $E \approx_{\overleftrightarrow{AD}} C$, puesto que $E \approx_{\overleftrightarrow{BC}} D$, tenemos que E pertenece al interior de $\angle CAD$.
Por 2.7.3 si E pertenece a un interior no puede pertenecer al otro.

2.7.5 Proposición.

Supongamos que B*A*C. Si $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}$ entonces $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}$.

Demostración. Si $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}$ entonces D pertenece al interior de $\angle BAE$, luego $D \approx_{\overleftrightarrow{AB}} E$.

Por lo tanto, por 2.7.4 o bien (a) $E \in \overrightarrow{AD}$, o bien (b) E pertenece al interior de $\angle BAD$, o bien (c) E pertenece al interior de $\angle CAD$. Veamos que (a) y (b) nos llevan al absurdo:

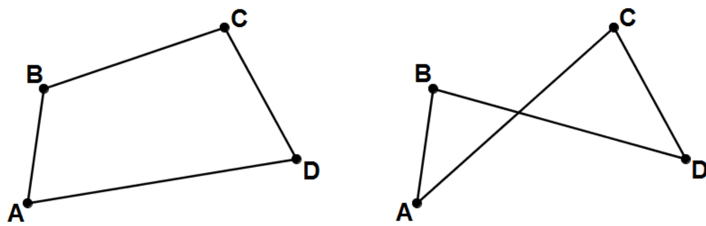
Si $E \in \overrightarrow{AD}$, entonces $D \in \overrightarrow{AE}$, y D no puede pertenecer al interior de $\angle BAE$, contradiciendo $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}$.

Si E pertenece al interior de $\angle BAD$, entonces $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$, pero por hipótesis $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}$, contradiciendo la proposición 2.6.6.

2.8 Polígonos, triángulos, cuadriláteros.

2.8.1 Definición. Polígono.
Dado un conjunto ordenado de puntos $(P_1, P_2, ..., P_n)$ llamados **vértices**, definimos el polígono que determinan como la unión de los segmentos entre uno de los puntos y el siguiente $\overline{P_k P_{k+1}}$, y el segmento entre el último punto y el primero $\overline{P_n P_1}$. Estos segmentos se denominarán **lados** del polígono. Denotaremos el polígono $(P_1, P_2, ..., P_n)$ como $P_1 P_2 \dots P_n$.

Observación. Un conjunto de vértices sin ordenar no determinan de forma unívoca un polígono. Por ejemplo, los polígonos $ABCD$ y $ABDC$ son polígonos diferentes:



Sólo en el caso más simple, el de tres puntos o triángulo, la figura sí queda determinada por sus vértices independientemente del orden.

Diremos que un polígono es **equilátero** cuando todos sus lados sean congruentes.

2.8.2 Definición. Triángulo. Interior y exterior de un triángulo.
Un triángulo es un polígono de tres lados, es decir, dados A, B, C tres puntos no colineales. Definimos el triángulo ΔABC por

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$$

Los puntos A, B y C son los **vértices** del triángulo. Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ son los **lados** del triángulo. Los ángulos $\angle B = \angle ABC$, $\angle C = \angle ACB$ y $\angle A = \angle CAB$ son los **ángulos** del triángulo.

El **interior del triángulo** ΔABC se define como la intersección de los interiores de los ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$. El **exterior del triángulo** ΔABC es el conjunto de puntos que no están en el triángulo ni en su interior.

2.8.3 Observación.
Los vértices del triángulo son los únicos puntos que no están entre otros puntos del triángulo. Así pues, los vértices están bien definidos, es decir, no dependen de cómo queda determinado, sólo del triángulo en sí mismo como conjunto de puntos.

2.8.4 Proposición.
Sean A, B, C tres puntos no colineales. El interior del triángulo ΔABC es la intersección de tres semiplanos, en concreto es $[A]_{\overline{BC}} \cap [B]_{\overline{CA}} \cap [C]_{\overline{AB}}$

Demostración.

$P \in Int\ \angle A \cap Int\ \angle B \cap Int\ \angle C \Leftrightarrow$

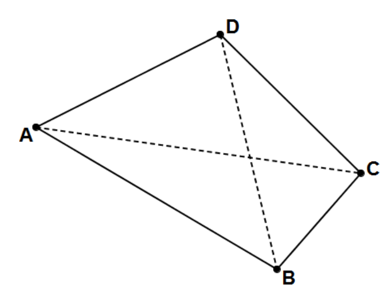
$P \approx_{\overline{AB}} C \wedge P \approx_{\overline{AC}} B \wedge P \approx_{\overline{AB}} C \wedge P \approx_{\overline{BC}} A \wedge P \approx_{\overline{AC}} B \wedge P \approx_{\overline{BC}} A \Leftrightarrow$

$P \approx_{\overline{AB}} C \wedge P \approx_{\overline{AC}} B \wedge P \approx_{\overline{BC}} A \Leftrightarrow P \in [A]_{\overline{BC}} \cap [B]_{\overline{CA}} \cap [C]_{\overline{AB}}$

2.8.5 Definición. Cuadrilátero.
Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados, es decir, dados cuatro puntos ordenados A, B, C y D definimos el cuadrilátero $ABCD$ por

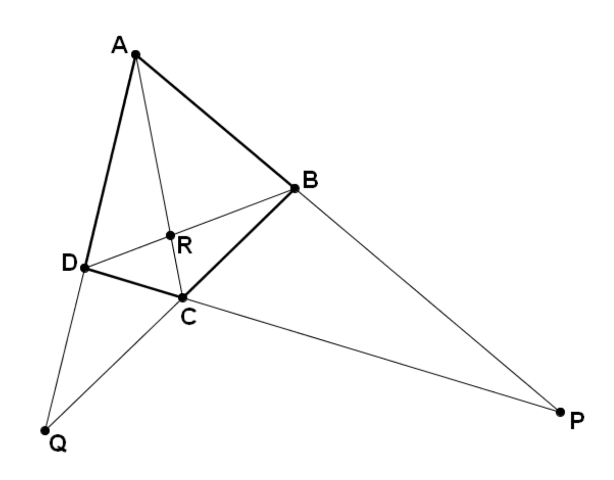
$$ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$$

Para poder definir correctamente los ángulos imponemos, además, que ningún grupo de tres vértices esté alineado.



Los puntos A, B, C y D se denominan **vértices** del cuadrilátero. Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ se denominan **lados**. Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son las **diagonales**.
Los cuatro **ángulos** del cuadrilátero se definen por $\angle A = \angle DAB$, $\angle B = \angle ABC$, $\angle C = \angle BCD$, y $\angle D = \angle CDA$.
Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son **lados opuestos**. Igualmente son lados opuestos los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$.
Los vértices A y C son **vértices opuestos**. Igualmente son vértices opuestos B y D.

2.8.6 Definición. Cuadrilátero completo. Triángulo diagonal.
Todo cuadrilátero $ABCD$ cuyos lados no sean paralelos determina una figura geométrica muy interesante llamada **cuadrilátero completo**, que consta del propio cuadrilátero junto a los puntos $P = AB \cap CD$, $Q = AD \cap BC$, $R = AC \cap BD$, y las que determinan. El triángulo ΔPQR se denomina **triángulo diagonal** asociado al cuadrilátero.



2.9 Cuadriláteros convexos. Trapecios. Paralelogramos.

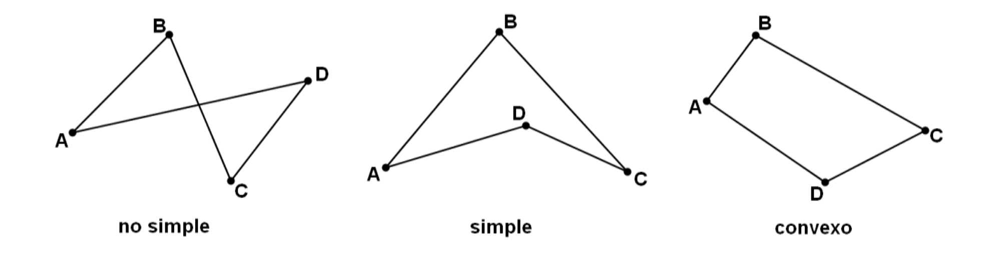
2.9.1 Definición. Polígono simple.
Está claro que en todo polígono, dos lados consecutivos se cortan en su extremo común:

$$P_k = P_{k-1}P_k \cap P_kP_{k+1}$$

Diremos que el polígono es **simple** cuando no existen otros puntos de corte entre sus lados. Es decir, un polígono es simple cuando los lados sólo se cortan en los vértices comunes. Cuando un polígono no es simple diremos que es un polígono con autointersecciones.

2.9.2 Definición. Cuadrilátero convexo.
Diremos que un cuadrilátero $ABCD$ es convexo cuando
a) C está en el interior de $\angle A$.
b) D está en el interior de $\angle B$.
c) A está en el interior de $\angle C$.
d) B está en el interior de $\angle D$.

Nota: En 2.9.6 se verá que sólo hace falta que se cumplan dos de estas cuatro condiciones.



Más adelante se demostrará que todo cuadrilátero convexo es simple.

2.9.3 Lema.
Un cuadrilátero $ABCD$ es convexo si y sólo si se cumplen las cuatro condiciones siguientes:
a) $\overline{AB}$ no se corta con $\overleftrightarrow{CD}$.
b) $\overline{BC}$ no se corta con $\overleftrightarrow{DA}$.
c) $\overline{CD}$ no se corta con $\overleftrightarrow{AB}$.
d) $\overline{DA}$ no se corta con $\overleftrightarrow{BC}$.

Nota. En 2.9.6 se verá que sólo hace falta que se cumplan tres de las cuatro condiciones.

Demostración. Este lema se deduce directamente de la definición de lateralidad. Por ejemplo, supongamos que C está en el interior de $\angle A$. Entonces $C \approx_{\overline{AB}} D$ y $C \approx_{\overline{AD}} B$.

$C \approx_{\overline{AB}} D$ implica que $\overline{CD}$ no se corta con $\overleftrightarrow{AB}$.

$C \approx_{\overline{AD}} B$ implica que $\overline{CB}$ no se corta con $\overleftrightarrow{AD}$.

De la misma manera se demuestran el resto de implicaciones.

2.9.4 Corolario.
Sea un cuadrilátero $ABCD$. Si C está en el interior de $\angle A$ y A está en el interior de $\angle C$ entonces es convexo.

Demostración. Veamos que se cumplen las cuatro condiciones del lema 2.9.3. Si C está en el interior de $\angle A$. Entonces $C \approx_{\overline{AB}} D$ y $C \approx_{\overline{AD}} B$. $C \approx_{\overline{AB}} D$ implica que $\overline{CD}$ no se corta con $\overleftrightarrow{AB}$ (condición c). $C \approx_{\overline{AD}} B$ implica que $\overline{CB}$ no se corta con $\overleftrightarrow{AD}$ (condición b). De la misma manera, si A está en el interior de $\angle C$. Entonces $A \approx_{\overline{CD}} B$ y $A \approx_{\overline{BC}} D$. $A \approx_{\overline{CD}} B$ implica que $\overline{AB}$ no se corta con $\overleftrightarrow{CD}$ (condición a). $A \approx_{\overline{BC}} D$ implica que $\overline{AD}$ no se corta con $\overleftrightarrow{BC}$ (condición d).

2.9.5 Proposición.
Si tres de las cuatro condiciones del lema 2.9.3 son ciertas, el cuadrilátero es convexo.

Demostración. Supongamos que son ciertas las tres primeras:

a) $\overline{AB}$ no se corta con $\overleftrightarrow{CD}$.
b) $\overline{BC}$ no se corta con $\overleftrightarrow{DA}$.
c) $\overline{CD}$ no se corta con $\overleftrightarrow{AB}$.

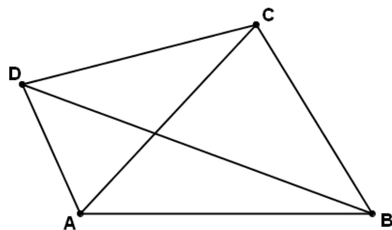
Supongamos que no se cumple la d), es decir, $\overline{DA}$ se corta con $\overleftrightarrow{BC}$. Sea $X = \overline{DA} \cap \overleftrightarrow{BC}$.
Se pueden dar tres casos: X*B*C, B*X*C o B*C*X.
El caso B*X*C implica que $\overline{BC}$ corta a $\overline{DA}$, contradiciendo b).
Supongamos el primer caso: X*B*C.
$\angle A = \angle DAB = \angle XAB$, y puesto que X*B*C, se deduce que C no está en el interior de $\angle A$ (2.4.6). Pero las condiciones b) y c) juntas aseguran precisamente lo contrario, llegando a una contradicción.
El tercer caso B*C*X nos llevará igualmente a una contradicción, por lo que vemos que la condición d) se debe cumplir, es decir, el cuadrilátero es convexo.

2.9.6 Corolario.
Si un cuadrilátero cumple dos de las cuatro condiciones de la definición 2.9.2 entonces es convexo.

Demostración. Supongamos que se cumple a) y b).
a) C está en el interior de $\angle A$ implica $C \approx_{\overline{AB}} D \Rightarrow \overline{CD} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ y también $C \approx_{\overline{AD}} B \Rightarrow \overline{CB} \cap \overleftrightarrow{AD} = \emptyset$.
b) D está en el interior de $\angle B$ implica $D \approx_{\overline{AB}} C \Rightarrow \overline{CD} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ y también $D \approx_{\overline{BC}} A \Rightarrow \overline{DA} \cap \overleftrightarrow{BC} = \emptyset$.
Por lo tanto se cumplen las condiciones b), c) y d) del lema 2.9.3, luego aplicando el lema 2.9.5, el cuadrilátero es convexo.

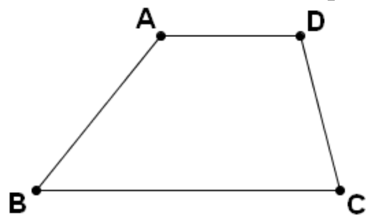
2.9.7 Proposición.
En todo cuadrilátero convexo las diagonales se cortan en un punto.

Demostración. Sea un cuadrilátero convexo $ABCD$.



Las rectas $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ son diferentes, pues si fueran la misma recta los cuatro puntos serían colineales, contradiciendo la definición de cuadrilátero. Por lo tanto la intersección de $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ será como mucho un punto.
C está en el interior de $\angle DAB$, luego por el Teorema de la semirrecta interior (2.6.3) la semirrecta $\overrightarrow{AC}$ corta el segmento $\overline{BD}$ en un punto E. Siguiendo el mismo razonamiento, A está en el interior de $\angle DCB$, luego nuevamente por 2.6.3 la semirrecta $\overrightarrow{CA}$ corta el segmento $\overline{BD}$ en un punto E'. Y puesto que hemos visto al principio que las dos rectas $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ se cortarán como mucho en un punto, nos queda $E = E' = \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{CA} \cap \overline{BD} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$, puesto que $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{CA} = \overline{AC}$ por 2.3.14.

2.9.8 Definición. Trapecio.
Un trapecio es un cuadrilátero $ABCD$ con al menos dos lados opuestos paralelos: $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$ y los puntos C y D están a un mismo lado respecto a $\overleftrightarrow{AB}$.



Los dos lados paralelos se llaman **bases del trapecio**. Puesto que, en general, las bases tienen longitudes diferentes, hablamos de base mayor y base menor del trapecio. Los lados no paralelos se llaman **lados laterales** del trapecio.

Nota: Si se consulta bibliografía en inglés hay que tener en cuenta que “trapezoid” y “trapezium” tienen significados opuestos en Estados Unidos y en el Reino Unido:

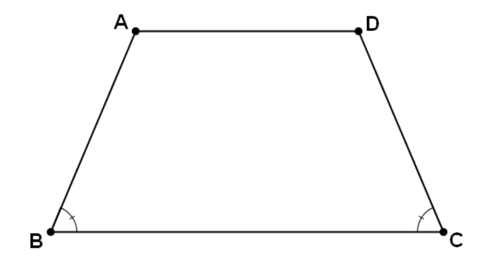
	Trapezoid	Trapezium
US:	a pair of parallel sides	NO parallel sides
UK:	NO parallel sides	a pair of parallel sides

Nota: Existen dos definiciones diferentes de lo que es un trapecio: La “**incluyente**”, con “<u>al menos</u> dos lados opuestos paralelos”, y la “**excluyente**”, con “<u>únicamente</u> dos lados opuestos paralelos”, es decir, descartando los paralelogramos como trapecios. En este libro consideramos la definición “incluyente”.

2.9.9 Proposición.
Todos los trapecios son convexos.

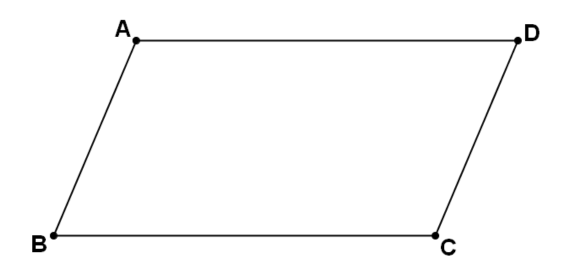
Demostración. Vemos que se cumplen tres de las cuatro condiciones del lema 2.9.3
$\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \overline{AD} \cap \overleftrightarrow{BC} = \varnothing$ (d),
$\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \overline{BC} \cap \overleftrightarrow{AD} = \varnothing$ (b)
C y D están al mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ implica $\overline{CD} \cap \overleftrightarrow{AB} = \varnothing$ (c)
Luego aplicando la proposición 2.9.5 deducimos que es convexo.

2.9.10 Definición. Trapecio isósceles.
Diremos que un trapecio es isósceles cuando cumpla las dos condiciones siguientes:
a) Los ángulos en los extremos de una de las dos bases son congruentes.
b) Los lados laterales son congruentes.



Nota: En 9.2.7 veremos que, en el contexto de un plano euclídeo, ambas condiciones son equivalentes, y por tanto basta con tomar una de las dos para caracterizar un trapecio isósceles.

2.9.11 Definición. Paralelogramo.
Un paralelogramo es un cuadrilátero $\lozenge ABCD$ en el que los lados opuestos son paralelos, es decir, la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a $\overleftrightarrow{CD}$ y la recta $\overleftrightarrow{AD}$ sea paralela a $\overleftrightarrow{BC}$.



2.9.12 Proposición.
Todo paralelogramo es un trapecio, y por tanto es un cuadrilátero convexo.

Demostración. Se comprueba fácilmente que entonces C y D están en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{AB}$, A y B están en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{CD}$, A y D están en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{BC}$ y B y C están en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{AD}$.

3 Congruencia.

3.1 Los axiomas de congruencia. Planos de Hilbert.

3.1.1 Definición. Axiomas de congruencia. Plano de Hilbert.

Un plano de Hilbert es un plano ordenado al que añadimos una relación entre segmentos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y una relación entre ángulos $\angle ABC \cong \angle DEF$ cumpliendo los siguientes axiomas:

Axioma C1.
La relación de congruencia entre segmentos es una **relación de equivalencia**, es decir, cumple las propiedades:
a) simétrica: $\overline{AB} \cong \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \cong \overline{AB}$
b) reflexiva: $\overline{AB} \cong \overline{AB}$
c) transitiva: $\overline{AB} \cong \overline{CD} \wedge \overline{CD} \cong \overline{EF} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{EF}$ (H4.2)

Axioma C2. (H4.1)
Sea $\overline{AB}$ un segmento y $\overrightarrow{CD}$ una semirrecta. Entonces existe un único punto $E \in \overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.

Axioma C3.
Si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y C es un punto tal que A*C*B, entonces existirá un punto C' tal que A'*C'*B' y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\overline{CB} \cong \overline{C'B'}$. Más adelante se demostrará que dicho punto es único.

Axioma C4.
La relación de congruencia entre ángulos es una relación de equivalencia, es decir, cumple las propiedades:
a) simétrica: $\angle BAC \cong \angle DEF \Rightarrow \angle DEF \cong \angle BAC$
b) reflexiva: $\angle BAC \cong \angle BAC$ (H4.4)
c) transitiva: $\angle BAC \cong \angle DEF \wedge \angle DEF \cong \angle GHI \Rightarrow \angle BAC \cong \angle GHI$ (H4.5)

Axioma C5. (Elementos 1.23; H4.4)
Sea $\angle BAC$ un ángulo y $\overrightarrow{DE}$ una semirrecta. Entonces en cualquiera de los dos lados de $\overrightarrow{DE}$ existirá una única semirrecta $\overrightarrow{DF}$ tal que $\angle BAC \cong \angle EDF$.

Definición. Triángulos congruentes.
Diremos que dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son **congruentes**, y escribiremos $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, cuando podamos establecer una biyección entre sus vértices

$$A \leftrightarrow A' \quad B \leftrightarrow B' \quad C \leftrightarrow C'$$

de forma que se correspondan lados y ángulos congruentes:

$$\angle A \cong \angle A',\ \angle B \cong \angle B',\ \angle C \cong \angle C',\ \overline{AB} \cong \overline{A'B'},\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \text{ y } \overline{AC} \cong \overline{A'C'}.$$

Axioma C6.
Sea ABC un triángulo y $\overline{A'B'}$ un segmento tal que $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$. Entonces en cada uno de los lados de $\overleftrightarrow{A'B'}$ existirá un punto C' tal que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

3.1.2 Observación.
La congruencia entre triángulos será claramente una relación de equivalencia, pues lo son por separado la congruencia de segmentos y de ángulos.

3.1.3 Proposición.
El punto C’ del Axioma C3 es único.

Demostración. Sea $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y C un punto tal que A*C*B. Sea el punto C’ tal que A’*C’*B’ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\overline{CB} \cong \overline{C'B'}$.
Supongamos que existe otro punto C’’ tal que A’*C’’*B’ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$ y $\overline{CB} \cong \overline{C''B'}$.
Entonces $C', C'' \in \overrightarrow{A'B'}$ cumpliendo ambos $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, luego $C' = C''$ por la unicidad del Axioma C2.

3.1.4 Proposición.
El punto C’ del Axioma C6 es único.

Demostración. Supongamos que existe un C’’ que también cumple las condiciones del axioma.
Entonces $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ y también $\angle CAB \cong \angle C''A'B'$, luego por la unicidad del Axioma C5 tenemos que $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'C''}$. Pero también tenemos que $\overline{AC} \cong \overline{AC'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{AC''}$, luego por la unicidad del Axioma C2 tenemos que $C' = C''$.

3.1.5 Proposición. Criterio SAS de congruencia. (Elementos 1.4; H4.6)
Sean dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ para los cuales se cumple $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\angle A \cong \angle A'$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Demostración. Por el Axioma C6 existirá un punto D en el mismo lado que C’ respecto de la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$ tal que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'D$.
Puesto que $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle A \cong \angle B'A'D$, por la unicidad del Axioma C5, $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'C'}$.
Por otro lado $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'D}$, y por tanto $C' = D$ (Axioma C2) y por tanto $\Delta ABC \cong \Delta A'B'D = \Delta A'B'C'$.

Observación:
Está claro que el Criterio SAS y el axioma C5 son equivalentes. En el *Grundlagen* el criterio SAS se considera axioma, pero es fácil deducir del mismo el axioma C5 que entonces queda como proposición.

3.1.6 Proposición. (H4.3 como axioma)
Si A*B*C, A’*B’*C’, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

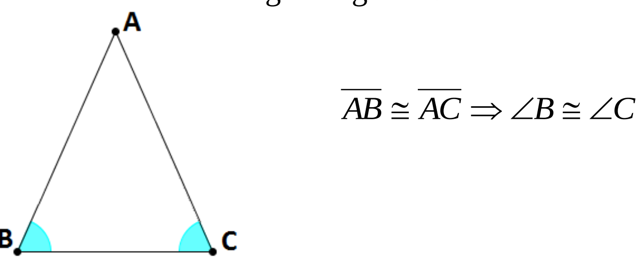
Demostración. Por el Axioma C2 existirá un punto $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$.
Queremos ver que C’’=C’.
Existirá un punto $B'' \in \overline{A'C''}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B''}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B''C''}$
Pero $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, luego por unicidad tenemos que $B' = B''$.
Ahora bien, tenemos que $\overline{BC} \cong \overline{B''C''} = \overline{B'C''}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, luego por unicidad llegamos a C’’=C’.

3.1.7 Proposición.
Supongamos que $A*B*C$ y $A'*B'*C'$. Si $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ entonces $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.

Demostración. Por C3 existirá un punto X en $\overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'X}$ y $\overline{BC} \cong \overline{XC'}$.
Pero por la unicidad de C2 tenemos que X=B', y por tanto $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.

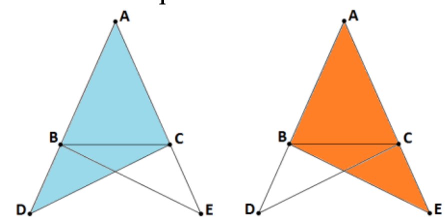
3.1.8 Definición. Triángulo isósceles. (Elementos 1 Definición 20)
Un triángulo es isósceles cuando tenga dos lados congruentes.

3.1.9 Proposición. (Elementos 1.5)
Un triángulo ΔABC isósceles tiene dos ángulos iguales.

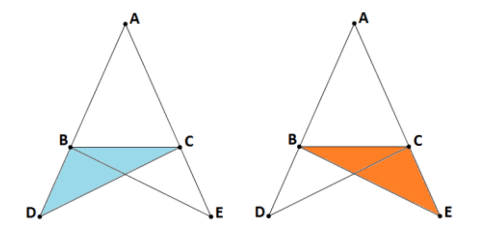


Observación: La implicación contraria también es cierta y se demostrará en 3.8.3.

Demostración. Basta aplicar el criterio SAS a los triángulos ΔABC y ΔACB.
La demostración que encontramos en Los Elementos 1.5 se llama "**Pons Asinorum**", es decir, "el puente del burro", puesto que muchos alumnos de geometría al llegar a este punto abandonaban los estudios pues no encontraban el sentido a demostrar algo que "se ve evidente", como los testarudos burros que se niegan a cruzar el puente.
Sea ΔABC un triángulo isósceles, con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Prolongamos el segmento $\overline{AB}$ hasta un punto D cualquiera tal que $A*B*D$ (Axioma B2).
De la misma forma prolongamos el segmento $\overline{AC}$ hasta un punto E , $A*B*E$, y tomamos dicho punto de forma que $\overline{AD} \cong \overline{AE}$.
Puesto que $\overline{AD} \cong \overline{AE}$, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\angle BAC \cong \angle BAC$, aplicando el criterio SAS de congruencia de triángulos deducimos que $\Delta ACD \cong \Delta ABE$.



Luego $\angle ADC \cong \angle AEB$, $\angle ABE \cong \angle ACD$ y $\overline{CD} \cong \overline{BE}$.
Puesto que $\overline{AD} \cong \overline{AE}$ y $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ se deduce que $\overline{BD} \cong \overline{CE}$.
Por lo tanto podemos aplicar nuevamente el criterio SAS para deducir que $\Delta BCD \cong \Delta CBE$.



Por lo tanto $\angle BCD \cong \angle CBE$. Y puesto que $\angle ABE \cong \angle ACD$, restando los ángulos llegamos a $\angle ABC \cong \angle ACB$, tal y como queríamos ver.

Problema propuesto: Problema #4 de [Prob1]**.** Este problema es muy famoso y en su solución únicamente se utiliza la propiedad fundamental del triángulo isósceles.

3.1.9 Definición. Triángulo equilátero. (Elementos 1 Definición 20)
Un triángulo es equilátero cuando tenga los tres lados congruentes.

3.1.10 Proposición. Ángulos de un triángulo equilátero.
Todo triángulo equilátero tiene sus tres ángulos congruentes.

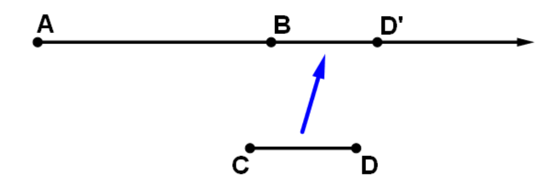
Demostración. Basta aplicar el criterio SAS a los triángulos ΔABC, ΔACB y ΔBAC.

3.1.11 Triángulo escaleno. (Elementos 1 Definición 20)
Un triángulo es escaleno cuando sus lados no son congruentes.

3.2 Suma, comparación y resta de segmentos.

3.2.1 Definición. Suma de segmentos.
Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, definimos el segmento suma de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, y escribiremos $\overline{AB}+\overline{CD}$ de la siguiente forma:

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD'}$ donde D' es el único punto de $op(\overrightarrow{BA})$, es decir $A*B*D'$, tal que $\overline{BD'}\cong\overline{CD}$.

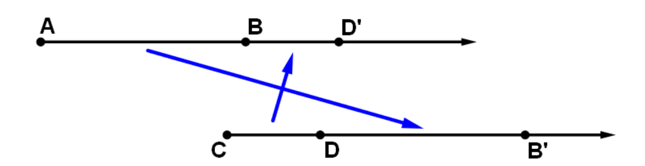


La existencia y unicidad de dicho punto D' queda garantizada por el Axioma C3.

3.2.2 Corolario.
La suma de segmentos es conmutativa:

$$\overline{AB}+\overline{CD}\cong\overline{CD}+\overline{AB}$$

Demostración. Por un lado construimos $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD'}$ con D' tal que $A*B*D'$ y $\overline{BD'}\cong\overline{CD}$, y por otro lado construimos $\overline{CD}+\overline{AB}=\overline{CB'}$ con B' tal que $C*D*B'$ y $\overline{DB'}\cong\overline{AB}$.

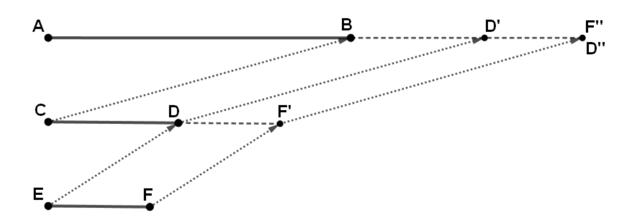


Pero entonces $C*D*B'\Rightarrow B'*D*C$ se cumplen las hipótesis de 3.1.6, y por tanto $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD'}\cong\overline{CB'}=\overline{CD}+\overline{AB}$.

3.2.3 Proposición.
La suma de segmentos es asociativa:

$$\overline{AB}+\left(\overline{CD}+\overline{EF}\right)=\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)+\overline{EF}$$

Demostración.
Para realizar $\overline{AB}+\left(\overline{CD}+\overline{EF}\right)$ sea F' el único punto tal que $C*D*F'$ y $\overline{DF'}\cong\overline{EF}$, y sea F'' el único punto tal que $A*B*F''$ y $\overline{BF''}\cong\overline{CF'}$.
Para realizar $\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)+\overline{EF}$ sea D' el único punto tal que $A*B*D'$ y $\overline{BD'}\cong\overline{CD}$, y sea D'' el único punto tal que $A*D'*D''$ y $\overline{D'D''}\cong\overline{EF}$.



Queremos ver que $D''=F''$.

$$\left.\begin{array}{l} A*D'*D'' \\ A*B*D' \end{array}\right\} \Rightarrow A*B*D'*D'' \Rightarrow A*B*D''$$

Y también se cumple $A*B*F''$, luego por el axioma C2 sólo hay que demostrar que $\overline{BF''} \cong \overline{BD''}$.

De $A*B*D'*D''$ se deduce también que $B*D'*D''$, luego

$\overline{BD''} = \overline{BD'} + \overline{D'D''} \cong \overline{CD} + \overline{EF} \cong \overline{CD} + \overline{DF'} = \overline{CF'} \cong \overline{BF''}$.

3.2.4 Proposición.

La suma de segmentos es compatible con la relación de equivalencia de la congruencia de segmentos:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{CD} \cong \overline{C'D'} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{CD} \cong \overline{A'B'} + \overline{C'D'}$$

Observación: Este resultado justifica el poder definir una suma en el conjunto de clases de equivalencia de los segmentos congruentes:

$$\left[\overline{AB}\right] + \left[\overline{CD}\right] = \left[\overline{AB} + \overline{CD}\right]$$

Y acabamos de ver que esta operación es conmutativa y asociativa, y dispone de un elemento neutro que es la clase de equivalencia del segmento degenerado $\overline{AA} = \{A\}$ (ver 3.1.3).

Demostración.

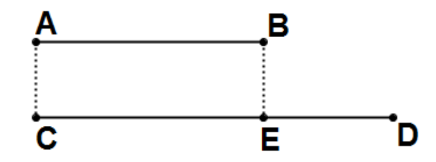
Para construir $\overline{AB} + \overline{CD}$ sea D' el único punto tal que $A*B*D'$ y $\overline{BD'} \cong \overline{CD}$.

Para construir $\overline{A'B'} + \overline{C'D'}$ sea D'' el único punto tal que $A'*B'*D''$ y $\overline{B'D''} \cong \overline{C'D'}$.

Entonces $\overline{BD'} \cong \overline{CD} \cong \overline{C'D'} \cong \overline{B'D''} \Rightarrow \overline{BD'} \cong \overline{B'D''}$. Por otro lado, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, luego podemos aplicar 3.1.6 para concluir que $\overline{AD'} \cong \overline{A''D''}$, es decir $\overline{AB} + \overline{CD} \cong \overline{A'B'} + \overline{C'D'}$.

3.2.5 Definición. Comparación de segmentos.

Sean dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Diremos que $\overline{AB} < \overline{CD}$ (o equivalentemente $\overline{CD} > \overline{AB}$) cuando exista un punto E tal que C*E*D y $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.



3.2.6 Proposición. Substitución.
a) Si $\overline{AB} < \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, entonces $\overline{AB} < \overline{C'D'}$.
b) Si $\overline{AB} < \overline{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, entonces $\overline{A'B'} < \overline{CD}$.
c) Si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$ y $\overline{AB} < \overline{CD}$ entonces $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$.

Observación: La propiedad c nos permite justificar una relación de equivalencia en el conjunto de clases de equivalencia de la congruencia de segmentos. Diremos que $[\overline{AB}] < [\overline{CD}]$ si $\overline{AB} < \overline{CD}$ para cualquier par $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de representantes de las clases de equivalencia.

Demostración.
a) $\overline{AB} < \overline{CD} \Rightarrow \exists B', C*B'*D \wedge \overline{AB} \cong \overline{CB'}$. Por C3, existirá un B’’ en $\overline{C'D'}$ tal que $\overline{CB'} \cong \overline{C'B''}$, luego $\overline{AB} \cong \overline{CB'} \cong \overline{C'B''}$, y por tanto $\overline{AB} < \overline{C'D'}$.
b) $\overline{AB} < \overline{CD} \Rightarrow \exists B', C*B'*D \wedge \overline{AB} \cong \overline{CB'}$. luego $\overline{A'B'} \cong \overline{AB} \cong \overline{CB'}$, y por tanto $\overline{A'B'} < \overline{CD}$.
c) Es la combinación de las dos anteriores: Si $\overline{AB} < \overline{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ entonces $\overline{A'B'} < \overline{CD}$ por b), pero puesto que, además, $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, aplicando a) tenemos $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$.

3.2.7 Proposición.
Si $A*B*C$ entonces $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Demostración. Se deduce directamente de la definición (3.2.5), y el hecho de que $\overline{AB} \cong \overline{AB}$.

3.2.8 Proposición. Transitividad de la comparación de segmentos.
Si $\overline{AB} < \overline{CD}$ y $\overline{CD} < \overline{EF}$ entonces $\overline{AB} < \overline{EF}$.

Demostración. $\overline{AB} < \overline{CD} \Rightarrow \exists B' \mid C*B'*D \wedge \overline{AB} \cong \overline{CB'}$.
$\overline{CD} < \overline{EF} \Rightarrow \exists D' \mid E*D'*F \wedge \overline{CD} \cong \overline{ED'}$
Puesto que C*B’*D y $\overline{CD} \cong \overline{ED'}$, por el Axioma C3 existirá B’’ tal que E*B’’*D’ y $\overline{CB'} \cong \overline{EB''}$.
E*B’’*D’ y E*D’*F implica E*B’’*D’*F (2.3.4) luego E*B’’*F, y por tanto, de la cadena de congruencias $\overline{AB} \cong \overline{CB'} \cong \overline{CB'} \cong \overline{EB''}$ obtenemos $\overline{AB} < \overline{ED'}$.

3.2.9 Lema.
Si $\overline{AB}$ es un segmento, no es cierto que $\overline{AB} < \overline{AB}$.

Demostración. Si $\overline{AB} < \overline{AB}$, entonces por definición existirá un B’ tal que A*B’*B y $\overline{AB} \cong \overline{AB'}$.
Pero $B' \in \overrightarrow{AB}$, luego por unicidad del Axioma C2, $B' = B$, pero es imposible A*B*B por el Axioma B1c.

3.2.10 Proposición. Tricotomía.
Dados dos segmentos a y b, ocurre una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

a) $a \cong b$ b) $a < b$ c) $a > b$

O equivalentemente, dados dos segmentos a y b, ocurre una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

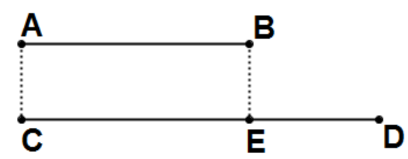
a) $a \cong b$
b) existe un segmento c tal que $a + c = b$
c) existe un segmento c tal que $b + c = a$

Demostración. Consideramos el segmento $\overline{AB}$ y la semirrecta $\overrightarrow{CD}$. Por el Axioma C2 existirá un único punto $E \in \overrightarrow{CD}$, tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
Entonces, (i) C*E*D o (ii) E=D o (iii) C*D*E.
Si sucede (i), significa que $\overline{AB} < \overline{CD}$. Si sucede (ii), entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, y si sucede (iii), tenemos que $\overline{CD} < \overline{CE}$ por definición, y puesto que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, se deduce que $\overline{AB} < \overline{CE}$ por 3.2.6.
Veamos ahora que son incompatibles entre ellas: Si sucede (a) y (b) entonces $\overline{AB} < \overline{AB}$, si sucede (a) y (c), por la transitividad (3.2.8), llegamos también al absurdo $\overline{AB} < \overline{AB}$, y por último, si sucede (b) y (c), llegamos a $\overline{AB} > \overline{AB}$. En todos los casos llegamos a contradecir el lema anterior 3.2.9.

3.2.11 Proposición.
Supongamos que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$. Entonces $\overline{AD} < \overline{AE} \Rightarrow A * D * E$.

Demostración. Si $\overline{AD} < \overline{AE}$ entonces existe un punto F en $\overline{AE}$ tal que $\overline{AD} \cong \overline{AF}$, luego A*F*E. Pero por la unicidad del Axioma C2, F=D.

3.2.12 Definición. Resta de segmentos.
Ya hemos visto en 3.2.5 que $\overline{AB} < \overline{CD}$ quiere decir que existe un punto E tal que C*E*D y $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.



En este caso definimos $\overline{CD} - \overline{AB}$ como el segmento $\overline{ED}$.

3.2.13 Proposición.

$$\overline{CD} - \overline{AB} + \overline{AB} \cong \overline{CD}$$

Demostración.
Suponemos que $\overline{AB} < \overline{CD}$. Existirá un E tal que $C * E * D$ y $\overline{AB} \cong \overline{CE}$, y por definición $\overline{CD} - \overline{AB} = \overline{ED}$. Ahora realizamos $\overline{ED} + \overline{AB}$, es decir, tomamos el punto $B' \in op\left(\overrightarrow{DE}\right)$ tal que $\overline{DB'} \cong \overline{AB}$. Luego $\overline{DB'} \cong \overline{AB} \cong \overline{CE} \Rightarrow \overline{DB'} \cong \overline{CE}$.

Ahora tenemos por un lado $C*E*D$ y por otro $E*D*B' \Rightarrow B'*D*E$ cumpliendo $\overline{CE} \cong \overline{DB'}$ y $\overline{ED} \cong \overline{DE}$, con lo cual se cumplen las condiciones de la proposición 3.1.6, y por tanto $\overline{CD} \cong \overline{EB'} = \overline{ED} + \overline{DB'} = \overline{CD} - \overline{AB} + \overline{DB'}$.

3.2.14 Proposición.
La comparación de segmentos es compatible con la suma:

$$\overline{AB} < \overline{CD} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{EF} < \overline{CD} + \overline{EF}$$

Demostración.
$\overline{AB} < \overline{CD} \Leftrightarrow$ existe un B' tal que $C*B'*D$ y $\overline{CB'} \cong \overline{AB}$
$\overline{AB} + \overline{EF} = \overline{AF'}$ para un cierto punto F' tal que $A*B*F'$ y $\overline{BF'} \cong \overline{EF}$.
$\overline{CD} + \overline{EF} = \overline{CF''}$ para cierto punto F'' tal que $C*D*F''$ y $\overline{DF''} \cong \overline{EF}$.

$$\left.\begin{array}{l} C*D*F'' \\ C*B'*D \end{array}\right\} \Rightarrow C*B'*D*F'' \Rightarrow B'*D*F''$$

Existirá un único $F''' \in \overrightarrow{B'D}$ tal que $\overline{B'F'''} \cong \overline{BF'} \cong \overline{EF}$ (axioma C2).
Puesto que $F''' \in \overrightarrow{B'D}$, se pueden dar tres casos: a), b) y c) $F''' = D$.
a) $B'*F'''*D$.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} B'*F'''*D \\ B'*D*F'' \end{array}\right\} \Rightarrow B'*F'''*D*F'' \Rightarrow B'*F'''*F''$$

$$\left.\begin{array}{l} C*D*F'' \\ C*B'*D \end{array}\right\} \Rightarrow C*B'*D*F'' \Rightarrow C*B'*F''$$

$$\overline{CF'''} \cong \overline{AF'} = \overline{AB} + \overline{EF} \Rightarrow \overline{CD} + \overline{EF} = \overline{CF''} > \overline{AB} + \overline{EF}$$

b) $B'*D*F'''$.

Entonces, puesto que $B'*D*F''$, sólo se pueden dar dos casos:

b1) $B'*D*F'''*F'' \Rightarrow B'*F'''*F''$ y seguimos el mismo razonamiento que en el apartado anterior.

b2) $B'*D*F''*F'''$. Pero entonces $\overline{EF} \cong \overline{DF''} < \overline{DF'''} < \overline{B'F'''} \cong \overline{EF}$ contradiciendo 3.2.9

c) $F''' = D$.

Entonces $C*D*F'' \Rightarrow C*F'''*F''$ con $\overline{CF'''} \cong \overline{AB} + \overline{EF}$, y por tanto $\overline{CD} + \overline{EF} = \overline{CF''} > \overline{AB} + \overline{EF}$

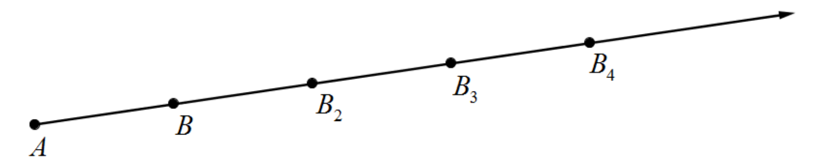
3.3 Segmentos múltiples.

3.3.1 Definición. Múltiples de segmentos.
Dado cualquier segmento $\overline{AB}$, quedan definidos los múltiples de dicho segmento $n \cdot \overline{AB}$ para cualquier entero positivo n, de la siguiente forma:

$$n \cdot \overline{AB} = \underbrace{\overline{AB} \oplus \overline{AB} \oplus \ldots \oplus \overline{AB}}_{\text{n veces}}$$

Es decir, $n \cdot \overline{AB}$ es el segmento $\overline{AB_n}$ para un conjunto de puntos $B_2, B_3, \ldots, B_n$ tales que $A * B * B_k * B_{k+1}$ y $\overline{B_k B_{k+1}} \cong \overline{AB}$. Este conjunto de puntos es único y se construye a partir de la definición de suma de segmentos introducida en 3.2.1.

Una definición equivalente es la siguiente:
Sea $\overrightarrow{AB}$ una semirrecta.
Definimos $1 \cdot \overline{AB}$ como el propio $\overline{AB}$. Definimos $B_0 = A$ y $B_1 = B$.
Sea B_2 el punto (único y diferente de A y B) tal que $A * B * B_2$ y $\overline{BB_2} \cong \overline{AB}$.
Definimos $2 \cdot \overline{AB}$ como el segmento $\overline{AB_2}$.
Este procedimiento lo podemos repetir tantas veces como queramos: Supongamos que hemos definido $k \cdot \overline{AB}$ como el segmento $\overline{AB_k}$, donde $B_k \neq A$ pertenece a $\overrightarrow{AB}$. Sea B_{k+1} el punto tal que $A * B_k * B_{k+1}$ y $\overline{B_k B_{k+1}} \cong \overline{AB}$. Entonces definimos el segmento $(k+1) \cdot \overline{AB}$ por el segmento $\overline{AB_{k+1}}$.



De esta manera obtenemos los puntos $B_0 = A, B_1 = B, B_2, B_3, B_4, \ldots,$ y por tanto una función

$$\Phi : IN \to \overrightarrow{AB}$$
$$n \mapsto n \cdot B = B_n$$

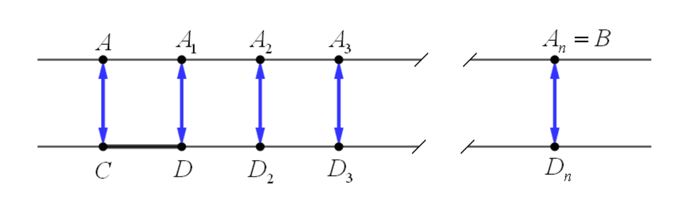
3.3.2 Definición. Segmento múltiple.
Diremos que un segmento $\overline{AB}$ es múltiple de otro segmento $\overline{CD}$ cuando exista un n entero positivo n tal que

$$\overline{AB} \cong n \cdot \overline{CD}$$

3.3.3 Proposición. Caracterización de los segmentos múltiples.
Se cumple $\overline{AB} \cong n \cdot \overline{CD}$ si y sólo si existen n-1 puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ en el interior de $\overline{AB}$ tales que $\overline{A_k A_{k+1}} \cong \overline{CD}$ y $A * A_k * A_{k+1}$ para todo k.

Demostración. Sea $n \cdot \overline{CD} = \overline{CE}$ para cierto punto E, con $C * D * E$.

$\Rightarrow$ Supongamos que $\overline{AB} \cong n \cdot \overline{CD}$. Por definición del segmento $n \cdot \overline{CD}$ tendremos un conjunto de puntos $D_2, D_3, \ldots, D_n$ tales que $C * D * D_k * D_{k+1}$, y $\overline{D_k D_{k+1}} \cong \overline{CD}$.
Tenemos $C * D * D_n$, y por tanto $\overline{CD} < \overline{CD_n}$ por 3.2.5. Luego $\overline{CD} < \overline{AB}$ por 3.2.6. Por definición (3.2.5), existirá un punto A_1 tal que $A * A_1 * B$ y $\overline{AA_1} \cong \overline{CD}$.
De $\overline{AA_1} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AB} \cong n \cdot \overline{CD} = \overline{CD_n}$ se deduce $\overline{A_1 B} \cong \overline{DD_n}$.
Ahora tomamos los segmentos $\overline{DD_n}$ y $\overline{A_1 B}$. Podemos volver a repetir el proceso anterior con el punto D_2: $D * D_2 * D_n$ luego $\overline{DD_2} < \overline{DD_n}$ y de este punto deducimos la existencia del punto A_2 tal que $A_1 * A_2 * B$ y $\overline{A_1 A_2} \cong \overline{DD_2} \cong \overline{CD}$.
Este mismo proceso lo repetimos tantas veces como sea necesario para "duplicar" los puntos $D, D_2, D_3, \ldots, D_n$ del segmento $\overline{CD_n}$ en los puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n = B$ del segmento $\overline{AB}$.
$\Rightarrow$ El razonamiento es similar. Podemos establecer una biyección $A_k \rightarrow D_k$ de puntos con los que construir el segmento $\overline{CD_n} = n \cdot \overline{CD}$.



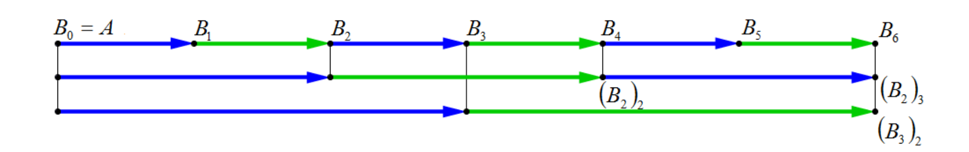
3.3.4 Proposición.
La aplicación $\Phi : IN \rightarrow \overrightarrow{AB}$ definida en 3.3.1 es inyectiva y mantiene el orden:

a) $n < m \Rightarrow \overline{AB_n} < \overline{AB_m}$
b) $0 < n < m \Rightarrow B_0 * B_n * B_m$
c) $\overline{AB} < \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AB_n} < \overline{AC_n}$
d) $\overline{AB} > \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AB_n} > \overline{AC_n}$
e) $\overline{AB} \cong \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AB_n} \cong \overline{AC_n}$

Demostración. Todas estas propiedades se demuestran por inducción sobre n.
Para los apartados a) y b) aplicamos la propiedad $A * B_k * B_{k+1}$.

3.3.5 Proposición.
La función anterior cumple la siguiente propiedad:

$$m \cdot (n \cdot B) = (mn) \cdot B = n \cdot (m \cdot B)$$



Demostración.
(queda por demostrar)

3.3.6 Nota. División de segmentos.
Dado un segmento $\overline{AB}$ y un natural $n > 2$ no podemos suponer la existencia de un segmento $\overline{CD}$ tal que $n \cdot \overline{CD} \cong \overline{AB}$, es decir, no podemos suponer la existencia de una "división de segmentos" sin añadir a nuestro sistema axiomático los axiomas de continuidad que introduciremos en el Tema 4.

En un plano euclídeo sí que se puede dividir cualquier segmento en cualquier número de subsegmentos congruentes, como se demostrará en 8.2.12.

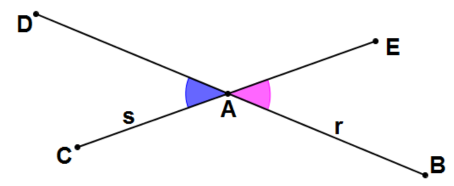
Lo que sí existe en todo plano de Hilbert es el punto medio de un segmento, como se verá en 3.9.5, con lo que podremos dividir cualquier segmento en cualquier número que sea potencia de 2, es decir, sí que existen los segmentos $\frac{\overline{AB}}{2^k}$ para cualquier k natural.
Todo esto se verá con más detalle en el apartado 4.5.

3.4 Congruencia y comparación de ángulos.

3.4.1 Proposición.
Supongamos que α y β son dos ángulos suplementarios, y que α' y β' también son dos ángulos suplementarios. Entonces si $\alpha \cong \alpha'$ entonces $\beta \cong \beta'$.

Demostración. Supongamos que $\alpha = \angle ABC$, $\beta = \angle CBD$, con D*B*A.
Por otro lado $\alpha' = \angle A'B'C'$ y $\beta' = \angle C'B'D'$, con D'*B'*A'.
Supongamos además que $\alpha \cong \alpha'$.
Por el Axioma C2 podemos encontrar un punto $A'' \in B'A'$, tal que $\overline{BA} \cong \overline{B'A''}$. De la misma manera existirá un punto $C'' \in B'C'$, tal que $\overline{BC} \cong \overline{B'C''}$ y un punto $D'' \in B'D'$, tal que $\overline{BD} \cong \overline{B'D''}$.
Los triángulos ΔABC y $\Delta A''B''C''$ son congruentes por SAS y por tanto $\overline{AC} \cong \overline{A''C''}$ y $\angle A \cong \angle A''$.
Aplicando suma de segmentos (3.2.6) $\overline{DA} \cong \overline{D''A''}$, por lo que los triángulos ΔDAC y $\Delta D''A''C''$ serán congruentes nuevamente por SAS. Por lo tanto $\angle D \cong \angle D''$ y $\overline{DC} \cong \overline{D''C''}$.
Nuevamente por SAS obtenemos que los triángulos ΔDCB y $\Delta D''C''B''$ serán congruentes, y así pues $\angle B \cong \angle B'$, tal y como queríamos ver.

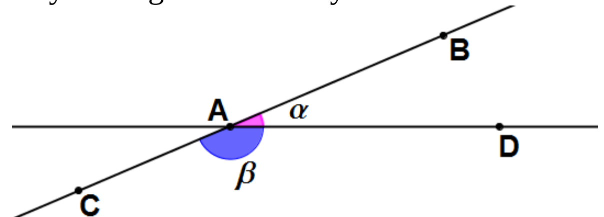
3.4.2 Definición. Ángulos opuestos por el vértice.
Sean r y s dos rectas que se cortan en un punto A. Supongamos $B, D \in r$ y $C, E \in s$ tales que B*A*D y C*A*E. Entonces diremos que los ángulos $\angle BAE$ y $\angle DAC$ son ángulos opuestos por el vértice.



3.4.3 Proposición. (Elementos 1.15)
Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Demostración. $\angle BAC$ es suplementario con $\angle BAE$. Por otro lado, $\angle EAD$ también es suplementario con $\angle BAE$. Luego $\angle BAE$ es congruente consigo mismo (Axioma C4a) y basta aplicar la proposición 3.4.1.

3.4.4 Teorema. (Elementos 1.14)
Sea $\overleftrightarrow{AD}$ una recta y sean B y C dos puntos en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AD}$. Supongamos que α y β son dos ángulos suplementarios tales que $\alpha \cong \angle BAD$ y $\beta \cong \angle DAC$. Entonces B, A y C son colineales y los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DAC$ también son suplementarios.



Demostración. Sea E un punto tal que B*A*E (Axioma B2).
$\angle BAD$ y $\angle DAE$ son suplementarios. Puesto que $\alpha \cong \angle BAD$, deducimos que $\beta \cong \angle DAE$ por 3.4.1.

Pero también $\beta \cong \angle DAC$, por lo tanto $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$ por la unicidad del Axioma C5 (de B*A*E deducimos que B y E están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AD}$ y por tanto E y C están en el mismo lado)
Luego $C \in \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \subset \overleftrightarrow{AB}$ y por tanto A, B y C son colineales.
Puesto que B y C están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AD}$, existirá un punto $X \in \overline{BC} \cap \overleftrightarrow{AD}$.
$A \in \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AD}$ y es el único punto de esta intersección (pues $\overleftrightarrow{BC} \neq \overleftrightarrow{AD}$), luego X=A.
Así pues, $A \in \overline{BC} \Rightarrow B*A*C$ y por tanto los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DAC$ son suplementarios.

3.4.5 Proposición. Suma de ángulos. (H4.5 como axioma)
Sea D un punto perteneciente al interior de $\angle BAC$, y D' un punto perteneciente al interior de $\angle B'A'C'$. Si $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ y $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$, entonces $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

Demostración. Aplicando el teorema 2.6.3, existirá un $E \in \overrightarrow{AD}$ tal que C*E*B. Esto demuestra, por otro lado, que C y B están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AD}$.
Aplicando el Axioma C5, existirá un punto $B'' \in \overrightarrow{A'B'}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B''}$, y también existirá un punto $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{AC'} \cong \overline{A'C''}$.
Sustituyendo si es necesario, podemos suponer que $B'' = B'$ y $C'' = C'$.
Por último, existirá un punto $E' \in \overrightarrow{A'D'}$ tal que $\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$.
Observamos que de momento no podemos garantizar que B'*E'*C'.
Puesto que $\angle BAE \cong \angle B'A'E'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B''}$ y $\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$, podemos aplicar SAS y deducir que $\Delta BAE \cong \Delta B'A'E'$, luego $\overline{BE} \cong \overline{B'E'}$ y $\angle AEB \cong \angle A'E'B'$.
Ahora podemos volver a aplicar SAS puesto que $\angle EAC \cong \angle E'A'C'$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, y $\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$, luego $\Delta EAC \cong \Delta E'A'C'$, y por tanto $\overline{EC} \cong \overline{E'C'}$ y $\angle AEC \cong \angle A'E'C'$.
Puesto que $\angle AEB \cong \angle A'E'B'$, $\angle AEC \cong \angle A'E'C'$ y C*E*B, $\angle A'E'B'$ y $\angle A'E'C'$ son dos ángulos congruentes con dos ángulos suplementarios, luego son suplementarios y B'*E'*C' (3.3.4). Y puesto que $\overline{EC} \cong \overline{E'C'}$ y $\overline{BE} \cong \overline{B'E'}$, tenemos que $\overline{CB} \cong \overline{C'B'}$ (por 3.1.6), y aplicando SAS (hemos visto anteriormente que $\angle ABC \cong \angle A'B'E' = \angle A'B'C'$) deducimos que $\Delta BAC \cong \Delta B'A'C'$, y por tanto $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

3.4.6 Proposición.
Supongamos que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, y supongamos que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, es decir, D está en el interior de $\angle BAC$. Entonces existirá una única semirrecta $\overrightarrow{A'D'}$ tal que $\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'D'} - \overrightarrow{A'C'}$, $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ y $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$.

Esta proposición es el equivalente para ángulos del Axioma C3 de segmentos.

Demostración. Existirá un $B'' \in \overrightarrow{A'B'}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B''}$. (Axioma C2)
Existirá un $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$. (Axioma C2)
Puesto que $\angle BAC \cong \angle B'A'C' = \angle B''A'C''$, podemos aplicar SAS para deducir que $\Delta BAC \cong \Delta B''A'C''$, y por tanto $\overline{BC} \cong \overline{B''C''}$, y $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

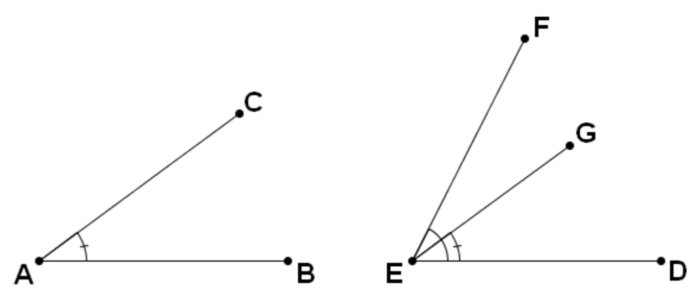
Existirá un punto $E \in \overrightarrow{AD}$ tal que C*E*B (por 2.6.3), y puesto que $\overline{BC} \cong \overline{B''C''}$, existirá un punto $E' \in \overline{B'C'}$, es decir $B'*E'*C'$, tal que $\overline{BE} \cong \overline{B'E'}$ y $\overline{CE} \cong \overline{C'E'}$ (Axioma C3).
Veamos que la semirrecta $\overrightarrow{A'E'}$ cumple las condiciones deseadas.
E' pertenece al interior de $\angle B'A'C'$ por 2.4.6.
$\angle ABC \cong \angle A'B'C' = \angle A'B'E'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{BE} \cong \overline{B'E'}$, luego $\Delta ABE \cong \Delta A'B'E'$ por SAS, y por tanto $\angle BAD = \angle BAE \cong \angle B'A'E'$, $\angle AEB \cong \angle A'E'B'$, y $\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$.
Puesto que $\angle AEB \cong \angle A'E'B'$, $\angle AEC \cong \angle A'E'C'$, pues ambos son suplementarios de dos ángulos congruentes (3.4.1).
Puesto que $\overline{CE} \cong \overline{C'E'}$, $\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$ y $\angle AEC \cong \angle A'E'C'$, podemos aplicar SAS para deducir que $\Delta AEC \cong \Delta A'E'C'$, y por tanto $\angle DAC = \angle EAC \cong \angle E'A'C'$.

Veamos ahora la unicidad de dicha semirrecta. Supongamos que existe una segunda semirrecta $\overrightarrow{A'D''}$ tal que $\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'D''} - \overrightarrow{A'C'}$, $\angle BAD \cong \angle B'A'D''$ y $\angle DAC \cong \angle D''A'C'$.
Los puntos D' y D'' estarán al mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$, pues D'' está en el interior de $\angle B'A'C'$, luego $D'' \approx_{\overline{A'B'}} C'$, y D' también pertenece al interior de $\angle B'A'C'$, luego $D' \approx_{\overline{A'B'}} C'$, por tanto, $D' \approx_{\overline{A'B'}} D''$ por transitividad de la colateralidad de puntos (2.2.1c).
Por la unicidad del Axioma C5, $\overrightarrow{A'D''} = \overrightarrow{A'D'}$.

3.4.7 Proposición. Resta de ángulos.
Sea D un punto perteneciente al interior de $\angle BAC$, y D' un punto perteneciente al interior de $\angle B'A'C'$. Si $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ y $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, entonces $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$.

Demostración. Aplicando la proposición 3.3.6, existirá una única semirrecta $\overrightarrow{A'D''}$ tal que $\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'D''} - \overrightarrow{A'C'}$, $\angle BAD \cong \angle B'A'D''$ y $\angle DAC \cong \angle D''A'C'$.
D'' y D' están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{A'B'}$ (por el mismo razonamiento que hemos hecho en la unicidad de la demostración de 3.4.6), y por lo tanto
$\angle DAC \cong \angle D''A'C' = \angle D'A'C'$.

3.4.8 Definición. Comparación de ángulos.
Dados dos ángulos $\angle BAC$ y $\angle DEF$, diremos que $\angle BAC < \angle DEF$ (o $\angle DEF > \angle BAC$) si existe una semirrecta $\overrightarrow{EG}$ tal que $\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EF}$ y $\angle BAC \cong \angle DEG$.



Es decir, existe un punto G en el interior de $\angle DEF$ tal que $\angle DEG \cong \angle BAC$.
Es importante remarcar que G está en el interior y no en el propio ángulo $\angle DEF$, para así garantizar que no se cumple $\alpha < \alpha$ (ver 3.4.13).

3.4.9 Proposición. Substitución.
Sean cuatro ángulos $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$. Si $\alpha < \beta$ y $\alpha \cong \alpha'$ entonces $\alpha' < \beta$. Si $\alpha < \beta$ y $\beta \cong \beta'$ entonces $\alpha < \beta'$.

Demostración. Sean $\alpha = \angle BAC$, $\alpha' = \angle B'A'C'$, $\beta = \angle DEF$ y $\beta' = \angle D'E'F'$.
Supongamos que $\alpha < \beta$. Entonces existirá un punto G en el interior de β tal que $\alpha \cong \angle DEG$.
Supongamos que $\alpha \cong \alpha'$. Luego $\alpha' \cong \alpha \cong \angle DEG$, y por tanto $\alpha' < \beta$.
Supongamos $\beta \cong \beta'$. Por 3.4.6, existirá un punto G' en el interior de β' tal que $\angle DEG \cong \angle D'E'G'$.
Luego $\alpha \cong \angle DEG \cong \angle D'E'G'$, es decir, $\alpha < \beta'$.

3.4.10 Proposición.
Si $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, entonces $\angle BAD < \angle BAC$.

Demostración. Basta aplicar la propia definición y tener en cuenta que $\angle BAD \cong \angle BAD$.

3.4.11 Proposición. Transitividad en la comparación de ángulos.
Si α, β, γ son ángulos tales que $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$, entonces $\alpha < \gamma$.

Demostración. Sea $\alpha = \angle ABC$, $\beta = \angle A_2B_2C_2$ y $\gamma = \angle A_3B_3C_3$. Existe un D_2 en el interior de β tal que $\alpha \cong \angle A_2D_2C_2$. Aplicando 3.4.6, existirá un punto D_3 en el interior de γ tal que $\angle A_2B_2D_2 \cong \angle A_3B_3D_3$, luego por la transitividad de la congruencia de ángulos, $\alpha \cong \angle A_3B_3D_3$, es decir, $\alpha < \gamma$.

3.4.12 Proposición. Comparación de ángulos suplementarios.
Sean α y β dos ángulos suplementarios, y α' y β' otros dos ángulos suplementarios. Si $\alpha > \alpha'$ entonces $\beta < \beta'$.

Demostración. Tenemos por un lado $D * A * B$, $\alpha = \angle BAE$ y $\beta = \angle DAE$, y por otro lado $D' * A' * B'$, $\alpha' = \angle B'A'E'$ y $\beta' = \angle D'A'E'$.
Si $\alpha > \alpha'$ entonces existe un E en el interior de α tal que $\angle BAE \cong \alpha'$.
$\angle BAE$ y $\angle DAE$ son ángulos suplementarios, luego $\angle DAE \cong \angle D'A'C'$, el suplementario de α' (3.4.1)
Aplicando ahora 3.4.6, puesto que C está en el interior de $\angle DAE$, existirá un punto F en el interior de $\angle D'A'C' = \beta$ tal que $\beta = \angle DAC \cong \angle DA'F$, es decir, que $\beta < \beta'$.

3.4.13 Lema.
No puede suceder que $\alpha < \alpha$.

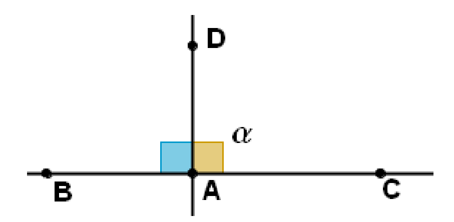
Demostración. Sea $\alpha = \angle BAC$. Si $\alpha < \alpha$ existirá un D en el interior de $\angle BAC$ tal que $\angle BAC \cong \angle BAD$. Pero C y D están en al mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, luego por la unicidad del Axioma C5 tenemos que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, luego D no puede pertenecer al interior de $\angle BAC$.

3.4.14 Proposición. Tricotomía de ángulos.
Sean dos ángulos α y β. Entonces sucede una y sólo una de las siguientes afirmaciones: (a) $\alpha < \beta$, (b) $\alpha \cong \beta$, (c) $\alpha > \beta$.

Demostración. Sean tres puntos C*A*B de una recta r, y D, E dos puntos en el mismo lado de la recta tales que $\angle BAD \cong \alpha$ y $\angle BAE \cong \beta$ (Axioma C5).
Por 2.7.4, sucederá una y sólo una de las siguientes afirmaciones:
(a) E pertenece al interior de $\angle BAD$, (b) E pertenece a semirrecta $\overrightarrow{AD}$ o (c) E pertenece al suplementario de $\angle BAD$.
Si sucede (a) entonces $\beta < \alpha$. Si sucede (b) $\beta \cong \alpha$, si sucede (c) tenemos que $\angle EAC < \angle DAC$, pero entonces $\angle BAD > \angle EAC$ por 3.4.12, es decir, $\alpha > \beta$.
Acabamos de ver que se da al menos una de las afirmaciones anteriores. Veamos que son incompatibles entre ellas, es decir, que sólo se puede dar una a la vez. Veremos que todas las posibilidades llegan a $\alpha < \alpha$, que contradice la proposición 3.4.13.
Si se cumple (a) y (b) tenemos que $\alpha < \alpha$.
De la misma forma, si se cumple (b) y (c) llegamos a $\alpha > \alpha$.
Y, por último, si se cumple (a) $\alpha < \beta$ y (c) $\alpha > \beta$, por transitividad (3.4.11) se llega igualmente a $\alpha < \alpha$.

3.5 Ángulos rectos y rectas perpendiculares.

3.5.1 Definición. Ángulo recto. (Elementos 1, definición 10)
Diremos que un ángulo α es recto cuando tenga un ángulo suplementario congruente. Recordemos que en 2.7.2 se demostró la existencia del ángulo suplementario.



Esta definición la encontramos en Los Elementos como definición 10 del Libro 1:

Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.
Cuando una recta levantada sobre otra recta forman ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.

3.5.2 Proposición.
Sea α un ángulo recto. Entonces:
a) Todo ángulo β congruente con α también es recto.
b) Todo ángulo suplementario de α también es recto.

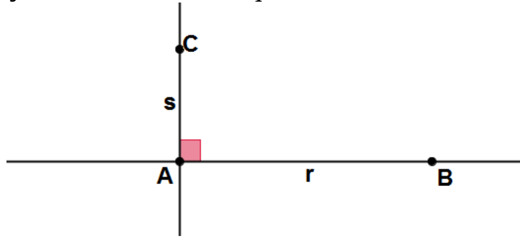
Demostración. i) Sea α' un ángulo suplementario de α. Por definición, $\alpha' \cong \alpha$.
Sea $\beta \cong \alpha$, y sea β' un ángulo suplementario a β.
Por la proposición 3.3.1, $\beta' \cong \alpha'$, y por transitividad de la relación de congruencia, $\beta' \cong \alpha' \cong \alpha \cong \beta$.
ii) Si β es un ángulo suplementario de α, por definición de ángulo recto $\beta \cong \alpha$, y basta aplicar i).

3.5.3 Proposición. (Elementos 1, Postulado 4)
Dos ángulos rectos son congruentes.

Nota: Esta proposición aparece en Los Elementos como Postulado 4 del Libro 1:
Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.

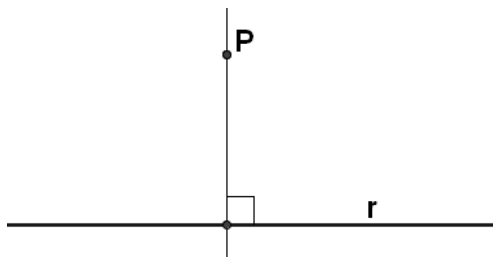
Demostración. Sea α un ángulo y β suplementario de α. Supongamos que $\alpha \cong \beta$.
Por otro lado, sea α' otro ángulo y β' suplementario de α'. Supongamos que $\alpha' \cong \beta'$.
Tenemos que ver que $\alpha \cong \alpha'$.
Supongamos que $\alpha < \alpha'$. Entonces $\beta > \beta'$, por 3.4.5.
Pero $\alpha \cong \beta$ y $\alpha' \cong \beta'$, luego $\alpha > \alpha'$, contradiciendo la tricotomía de ángulos (3.4.7).
De la misma forma se demuestra que no es posible $\alpha > \alpha'$, y nuevamente por tricotomía se deduce que $\alpha \cong \alpha'$.

3.5.4 Definición. Rectas perpendiculares. (Elementos 1, definición 10)
Diremos que dos rectas r y s son perpendiculares, y escribiremos $r \perp s$, cuando:
a) Tengan un punto A en común.
b) Exista un $B \neq A$ en r y $C \neq A$ en s tales que $\angle BAC$ sea recto.



Esta definición la encontramos en Los Elementos como parte de la definición 10 del Libro 1 (ver 3.5.1)

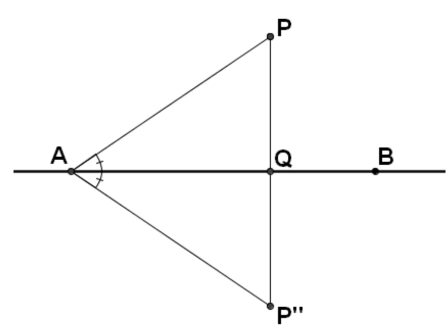
3.5.5 Proposición. Existencia de la recta perpendicular por un punto exterior. (Elementos 1.12)
Si r es una recta y $P \notin r$, entonces existe una recta s que pasa por P y es perpendicular a r.



Nota: La unicidad de dicha recta se demostrará después en 3.6.4.

Demostración. Sean $A, B \in r$, $A \neq B$. (Axioma I2)
Sea P' en el lado opuesto de P respecto a la recta r tal que $\angle BAP \cong \angle BAP'$. (Axioma C5)
Sea $P'' \in AP'$ tal que $\overline{AP} \cong \overline{AP''}$. (Axioma C2)
P y P'' están en lados opuestos de r, luego existirá un $Q \in r$ tal que P*Q*P''.

Si $A = Q$ entonces tenemos P*A*P'', y $\angle BAP \cong \angle BAP' = \angle BAP''$, luego los ángulos son suplementarios y congruentes, luego son ángulos rectos.
Si $A \neq Q$ nos encontramos con dos casos posibles: Si $B \in \overrightarrow{AQ}$



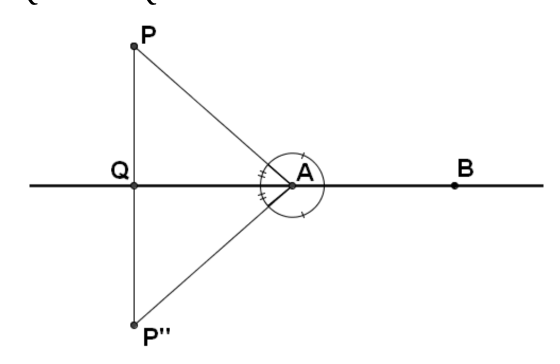
$\angle BAP \cong \angle BAP'' \Rightarrow \angle QAP \cong \angle QAP'' \Rightarrow (SAS)$
$\Delta QAP \cong \Delta QAP'' \Rightarrow \angle AQP \cong \angle AQP''$

Y puesto que P*Q*P'' tenemos que $\angle AQP$ es recto.

Si $B \notin \overrightarrow{AQ}$, entonces $\angle BAP$ y $\angle QAP$ son ángulos suplementarios, y podemos llegar a $\angle QAP \cong \angle QAP''$ aplicando 3.4.1. Entonces la demostración sigue el mismo razonamiento:

$\angle BAP \cong \angle BAP'' \Rightarrow \angle QAP \cong \angle QAP'' \Rightarrow (SAS)$

$\Delta QAP \cong \Delta QAP'' \Rightarrow \angle AQP \cong \angle AQP''$



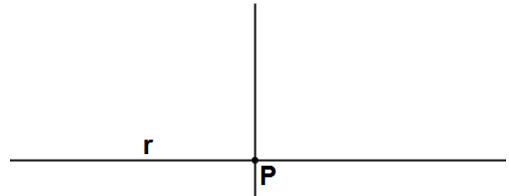
3.5.6 Corolario. Existencia de ángulos rectos y de rectas perpendiculares.

Los ángulos rectos existen. Las rectas perpendiculares existen.

Demostración. Por el Axioma I3 existirán tres puntos A, B, C no alineados. Sea $r = \overleftrightarrow{AB}$. Por la proposición 3.5.5 existirá una recta perpendicular a r por C. Sea P su punto de intersección. El ángulo $\angle CPB$ será recto.

3.5.7 Proposición. Existencia y unicidad de la recta perpendicular que pasa por un punto de la misma (Elementos 1.11).

Si r es una recta y $P \in r$, entonces existe una única recta s que pasa por P y es perpendicular a r.



Demostración. Sea r una recta y $P \in r$. Sea Q otro punto de r. (Axioma I2)

Sea α un ángulo recto (3.5.6).

Sea A un punto tal que $\angle APQ \cong \alpha$ (Axioma C5)

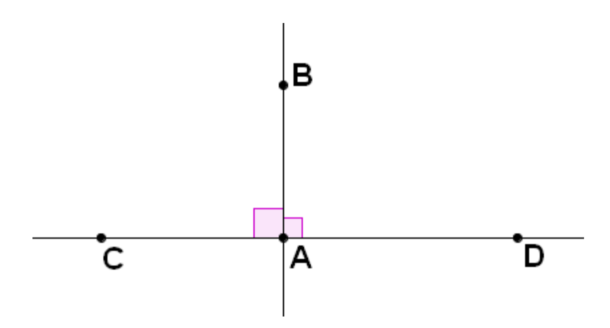
Entonces $\angle APQ$ es un ángulo recto por 3.5.2a.

Sea $s = \overleftrightarrow{AP}$. Las rectas s y r son perpendiculares.

Veamos ahora la unicidad. Supongamos que existe otra recta s_2 tal que $P \in s_2$ y también es perpendicular a r. Es decir que podemos encontrar puntos $X, Y \in s_2$, cumpliendo X*P*Y, y puntos $B, C \in r$, B*P*C, para los que $\angle YPC$ es recto. Supongamos que Y y A están en el mismo lado respecto a r (en caso contrario cogemos el punto X). Puesto que $\angle APQ$ es recto, por el Axioma C5 se deduce que $\overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PA}$, por lo que $Y \in \overrightarrow{PA}$ y por tanto $s_2 = s$.

3.5.8 Proposición.

Sea una recta $\overleftrightarrow{AB}$ y sean C y D puntos en lados opuestos de dicha recta. Si $\angle CAB \cong \alpha$ y $\angle BAD \cong \beta$ con α y β ángulos rectos, entonces C, A y D están alineados y $C * A * D$.

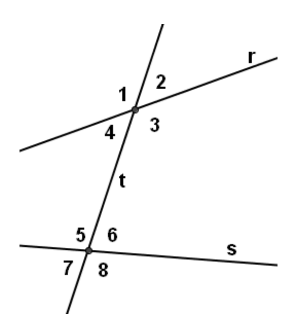


Demostración. Por 3.5.6 existen ángulos rectos. Sea γ un ángulo recto y γ' su suplementario, que por definición también será recto.

Por 3.5.3 todos los ángulos rectos son congruentes, luego $\angle CAB \cong \alpha \cong \gamma$ y $\angle BAD \cong \beta \cong \gamma'$, y por tanto podemos aplicar 3.4.4 para garantizar que C, A y D están alineados y $\angle CAB$ y $\angle BAD$ son suplementarios. Por 2.2.8 tendremos que $C * A * D$.

3.6 El teorema de los ángulos internos alternos.

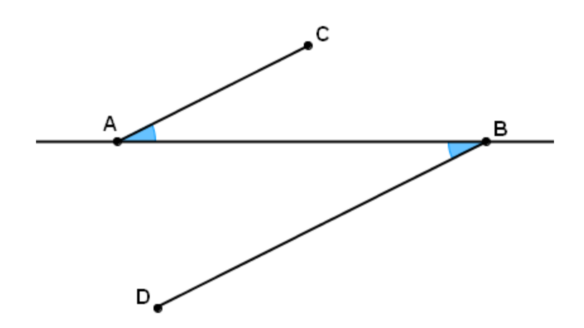
3.6.1 Definición. Ángulos determinados por dos rectas y una secante común.
Una recta secante común a dos rectas r y s diferentes determinan ocho ángulos:



Los cuatro ángulos que están entre r y s (3, 4, 5 y 6) se denominan **ángulos internos**. Los otros cuatro (1, 2, 7 y 8) se denominan ángulos externos.

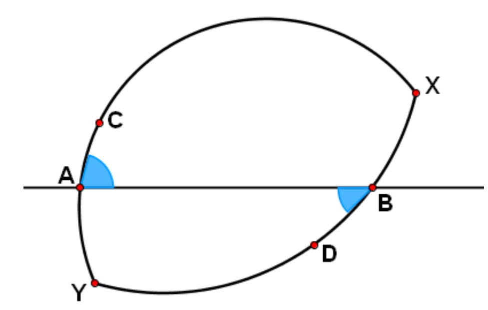
Los ángulos 3 y 5, que se sitúan en lados opuestos de la recta t se denominan **ángulos internos alternos**. Los ángulos 4 y 6 también son ángulos internos alternos.

3.6.2 Teorema. El teorema de los ángulos internos alternos (Elementos 1.27).
Sean C y D dos puntos opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$. Si $\angle CAB \cong \angle ABD$ entonces $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ son rectas paralelas.



Observación: Su recíproco es una condición euclídea, como se verá en 6.3.6.

Demostración. Supongamos que $X \in \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$.



Podemos suponer que X es colateral con C. Luego X y D están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$.

Sea $Y \in \overrightarrow{BD}$ tal que $\overline{AX} \cong \overline{BY}$. El punto Y es colateral con D, luego X e Y están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$. Por lo tanto, $Y * B * X$, y los ángulos $\angle XBA$ y $\angle ABY$ son suplementarios.
Además, aplicando SAS tenemos que $\Delta XAB \cong \Delta YBA$, y por tanto $\angle YAB \cong \angle XBA$, luego aplicando 3.4.4 tenemos que $\angle YAB$ y $\angle BAX$ son suplementarios y A, X, Y, B están alineados.
Por último, $C \in \overleftrightarrow{AB}$, lo que contradice la hipótesis del enunciado de que C está en un lateral de la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

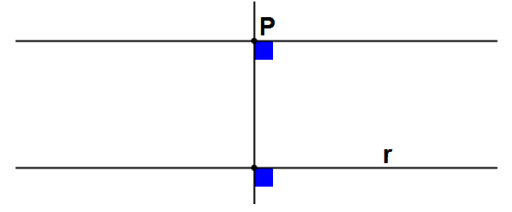
3.6.3 Corolario.
Dos rectas diferentes perpendiculares a una tercera son paralelas entre ellas.

Demostración. Sean las rectas r y s diferentes y perpendiculares a una tercera recta t.
Sea $A = r \cap t$ y $B = s \cap t$.
$A \neq B$, pues si $A = B$, por la unicidad de la proposición 3.5.7, tendríamos que $r = s$.
Sea C otro punto de la recta r diferente de A, y sea D otro punto de la recta s diferente de B (Axioma I2).
Podemos tomar D tal que C y D estén en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, pues si D y B están al mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, tomamos un punto D' tal que D'*B*D (Axioma B2).
$\angle BAC$ y $\angle DBA$ son rectos, luego son congruentes por 3.5.2, y entonces, por 3.6.2, r y s son dos rectas paralelas.

3.6.4 Proposición. Existencia y unicidad de la recta perpendicular.
Sea r una recta y P un punto $P \notin r$. Existirá una única recta s perpendicular a r que pasa por P.

Demostración. La existencia fue demostrada en 3.5.5. Veamos ahora la unicidad.
Supongamos que hay dos rectas s y s' que pasan por P y son perpendiculares a r.
Sea $Q = s \cap r$ y $Q' = s' \cap r$. $Q \neq Q'$ pues $s \neq s'$. Ahora s y s' son dos rectas perpendiculares a una recta común r, luego $s // s'$ por 3.6.3, pero $P \in s \cap s'$, llegando a una contradicción.

3.6.5 Proposición. Existencia de una recta paralela. (Elementos 1.31)
Sea r una recta y un punto $P \notin r$. Existirá al menos una recta paralela a r que pasa por P.

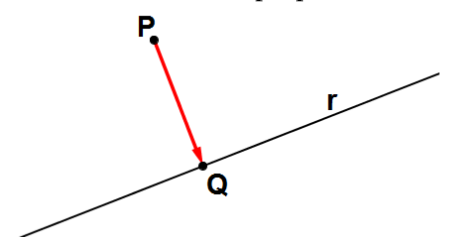


Demostración. Sea s la única recta perpendicular a r que pasa por P (3.6.4). Sea t la única recta perpendicular a s y que pasa por P (3.5.7). Las rectas t y r son ambas perpendiculares a la recta s, luego t y r son paralelas (3.6.3).

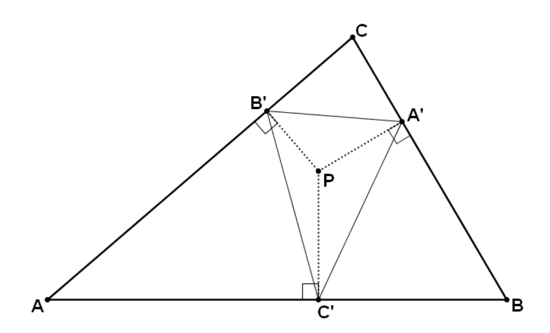
3.6.6 Definición. Proyección ortogonal de un punto en una recta.
Sea r una recta y $P \notin r$. Definimos la proyección ortogonal de P en r, y escribiremos

$$pr(P,r)$$

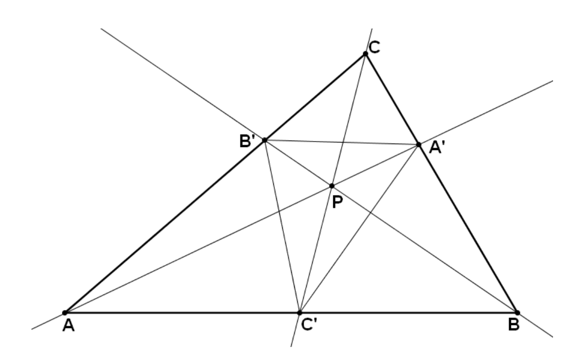
como el punto Q de intersección de r con la recta perpendicular a r que pasa por P.



3.6.7 Definición. Puntos pedales. Triángulo pedal asociado a un punto.
Dado un triángulo ΔABC y un punto P, llamaremos **pedales del punto P** a las proyecciones ortogonales A', B' y C' del punto P en los lados $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ respectivamente del triángulo. Si los puntos A', B' y C' no están alineados, diremos que $\Delta A'B'C'$ es el **triángulo pedal** asociado al punto P.



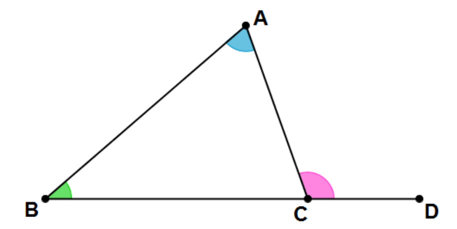
3.6.8 Definición. Cevianas. Trazas. Triángulo cevial asociado a un punto.
Dado un triángulo ΔABC, llamaremos **ceviana** a cualquier recta que pase por uno de sus vértices, y llamaremos **traza** de la ceviana a su punto de corte con el lado opuesto a dicho vértice.
Dado un punto P, llamaremos **cevianas del punto P** a las rectas que unen dicho punto con cada vértice: $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$ y $\overleftrightarrow{CP}$, y **trazas del punto P** a las trazas de dichas cevianas.
Llamaremos **triángulo ceviano** asociado al punto P al triángulo determinado por las trazas de dicho punto.



3.7 Teorema del ángulo exterior.

3.7.1 Definición. Ángulo exterior.
Los ángulos internos de un triángulo son los tres ángulos que determinan los vértices con los lados. Un **ángulo exterior** de un triángulo es cualquier ángulo suplementario a uno de sus ángulos internos.

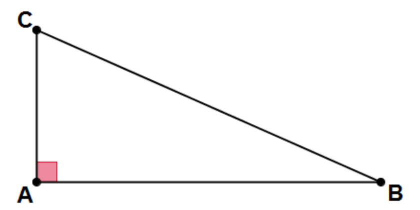
3.7.2 Teorema del ángulo exterior. (Elementos 1.16)
Dado un triángulo ΔABC y un punto D tal que B*C*D, entonces el ángulo exterior $\angle ACD$ es mayor que los ángulos interiores opuestos $\angle A$ y $\angle B$.



Demostración.
a) $\angle ACD > \angle A$.
Supongamos que no es cierto, es decir, $\angle ACD \cong \angle A$ o $\angle ACD < \angle A$ por tricotomía (3.4.11)
Si $\angle ACD \cong \angle A$, entonces $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ por el Teorema de los ángulos alternos, pero sabemos que $B = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$, llegando a contradicción.
Supongamos que $\angle ACD < \angle A$. Entonces existirá una semirrecta $\overrightarrow{AE}$ interior a $\angle A$ tal que $\angle ACD \cong \angle CAE$, y además, por 2.6.3, podemos escoger un E tal que B*E*C, es decir, $E \in \overleftrightarrow{CD}$. Observamos que D y E están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AC}$ (pues B*E*C y B*C*D implica B*E*C*D y por tanto E*C*D) , y que $\angle DCA \cong< \angle CAE$. Luego, aplicando el Teorema de los ángulos alternos, deducimos que $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{AE}$. Pero $E \in \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{AE}$, absurdo.

b) $\angle ACD > \angle B$.
Sea F un punto tal que A*C*F. Los ángulos $\angle ACD$ y $\angle BCF$ son ángulos opuestos por el vértice, luego $\angle ACD \cong \angle BCF$ (3.3.3).
Ahora podemos aplicar la primera parte de esta proposición al ángulo exterior $\angle BCF$ respecto del ángulo interior $\angle B$, por lo que $\angle B < \angle BCF \cong \angle ACD$.

3.7.3 Definición. Triángulo rectángulo. (Elementos 1 Definición 21)
Si ΔABC es un triángulo en el cual $\angle A$ es recto, diremos que se trata de un triángulo rectángulo, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se llaman **catetos**, y $\overline{BC}$ se llama **hipotenusa**.



3.7.4 Definición. Ángulos agudos y obtusos.
Sea α un ángulo recto. Diremos que β es un ángulo **agudo** cuando $\beta < \alpha$, y diremos que β es un ángulo **obtuso** cuando $\beta > \alpha$ (Elementos 1, definición 12).
Un triángulo ΔABC será **agudo** cuando sus tres ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ sean agudos, y será **obtuso** cuando tenga un ángulo obtuso (Elementos 1, definiciones 11 y 21).

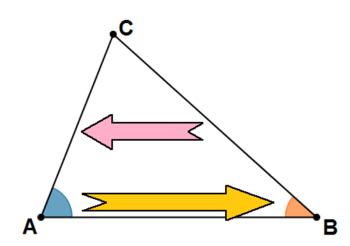
3.7.5 Proposición.
Si un ángulo es agudo, su suplementario es obtuso. Dados dos ángulos suplementarios, o bien son rectos o bien uno es agudo y el otro es obtuso.

Demostración. Basta aplicar la proposición 3.4.12.

3.7.6 Proposición.
Si ΔABC es un triángulo rectángulo con ángulo recto $\angle A$, entonces $\angle B$ y $\angle C$ son ángulos agudos.

Demostración. Sea ΔABC un triángulo rectángulo con ángulo recto $\angle A$. Sea D un punto tal que B*A*D. $\angle CAD$ será un ángulo exterior del triángulo con un ángulo suplementario $\angle A$ recto, luego $\angle CAD$ será recto, y aplicando el Teorema del ángulo exterior (3.7.2), $\angle CAD > \angle B$ y $\angle CAD > \angle C$.

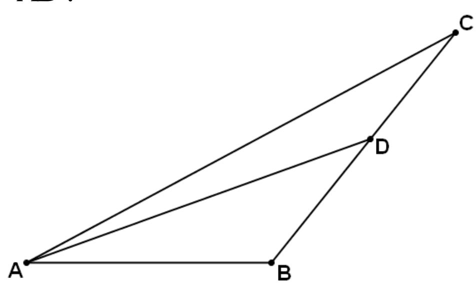
3.7.7 Proposición. Comparación de ángulos y de lados (Elementos 1.18 y 1.19; Hilbert Teorema 23)
En todo triángulo ΔABC,
a) El lado mayor determina el ángulo contrario mayor: $\overline{BC} > \overline{AC} \Rightarrow \angle A > \angle B$. (Elementos 1.18)
b) El ángulo mayor determina el lado contrario mayor: $\angle A > \angle B \Rightarrow \overline{BC} > \overline{AC}$. (Elementos 1.19)



Demostración.
a) Si $\overline{BC} > \overline{AC}$ entonces existirá un punto D tal que B*D*C y $\overline{CD} \cong \overline{AC}$. Aplicando 2.4.6, D estará en el interior de $\angle A$, por lo que $\angle CAD < \angle A$ (3.4.10).

ΔADC es isósceles en C, luego $\angle CAD \cong \angle ADC$ (3.1.9) y por tanto $\angle ADC > \angle B$ por el Teorema del ángulo exterior en ΔABD.
Aplicando transitividad llegamos a $\angle B < \angle ADC = \angle CAD < \angle A$.
b) Por tricotomía (3.4.14), $\overline{BC} \cong \overline{AC}$, o $\overline{BC} < \overline{AC}$ o $\overline{BC} > \overline{AC}$. Veamos que las dos primeras posibilidades nos llevan a contradicción:
Si $\overline{BC} \cong \overline{AC}$, entonces ΔABC será isósceles en C, luego $\angle A \cong \angle B$ contradiciendo la hipótesis.
Si $\overline{BC} < \overline{AC}$, podemos aplicar la primera parte de esta demostración, para deducir que entonces $\angle A < \angle B$, contradiciendo igualmente la hipótesis.

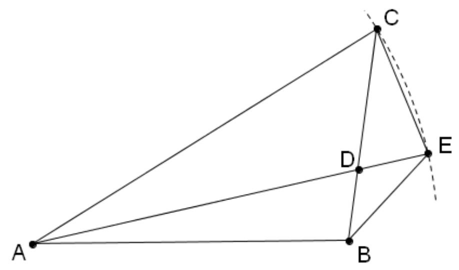
3.7.8 Lema.
Sea un triángulo ΔABC, y D un punto tal que B*D*C. Entonces si $\overline{AC} > \overline{AB}$ o $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ entonces $\overline{AC} > \overline{AD}$.



Demostración. $\angle ADC > \angle B$ por el Teorema del ángulo exterior (3.7.2). Supongamos que $\overline{AC} > \overline{AB}$. Entonces $\angle B > \angle C$ (por 3.7.7), luego $\angle ADC > \angle B > \angle C$, y por tanto $\overline{AC} > \overline{AD}$ nuevamente por 3.7.7.
Si $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ entonces $\angle B \cong \angle C$ por 3.1.9, luego $\angle ADC > \angle B \cong \angle C$ y de nuevo concluimos que $\overline{AC} > \overline{AD}$.

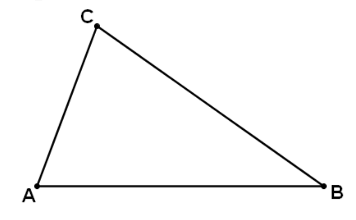
3.7.9 Proposición. (Elementos 1.24 y 1.25)
Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, si se cumple $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, entonces $\angle BAC > \angle B'A'C' \Leftrightarrow \overline{BC} > \overline{B'C'}$.

Demostración. Veamos en primer lugar $\angle BAC > \angle B'A'C' \Rightarrow \overline{BC} > \overline{B'C'}$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\overline{AC} > \overline{AB}$ o $\overline{AC} \cong \overline{AB}$.
Puesto que $\angle BAC > \angle B'A'C'$, existirá una semirrecta $\overrightarrow{AD}$ con D en el interior de $\angle BAC$ tal que $\angle BAD \cong \angle B'A'C'$. Por 2.6.3 podemos suponer que $C*D*B$.
Aplicando el lema 3.7.8, tenemos que $\overline{AC} > \overline{AD}$. Luego existirá un punto E en $\overrightarrow{AD}$ tal que $A*D*E$ y $\overline{AC} \cong \overline{AE}$.

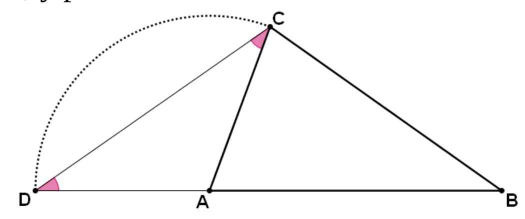


Los puntos B, C y E no pueden estar alineados: las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ se cortan exclusivamente en D, pues de lo contrario serían la misma recta y entonces $A \in \overleftrightarrow{BC}$, absurdo. $E \in \overleftrightarrow{AD}$, y si $E \in \overleftrightarrow{BC}$ entonces $E = D$, contradiciendo $A * D * E$. Así pues, el triángulo ΔBCE está bien definido.
Puesto que $C * D * B$, el punto D está en el interior de $\angle CEB$ (2.4.6), luego $\angle CED < \angle CEB$.
El triángulo ΔACE es isósceles en A, luego $\angle ACE = \angle AEC = \angle CED$, luego $\angle ACE < \angle CEB$.
Puesto que $A * D * E$, el punto D está en el interior de $\angle ACE$ (2.4.6), luego $\angle ACE > \angle DCE$.
Por lo tanto, por transitividad, $\angle CEB > \angle ACE > \angle DCE = \angle BCE$. Luego $\overline{BC} > \overline{BE}$ por 3.7.7.
Ahora bien, $\Delta AEB \cong \Delta A'C'B'$ por SAS, por lo que $\overline{BE} \cong \overline{B'C'}$, y por tanto $\overline{BC} > \overline{B'C'}$ como queríamos ver.
Veamos ahora que $\overline{BC} > \overline{B'C'} \Rightarrow \angle A > \angle A'$. Supongamos lo contrario, es decir, que $\angle A \cong \angle A'$ o $\angle A < \angle A'$.
Si $\angle A \cong \angle A'$, entonces por SAS tenemos que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, pero entonces $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, contradiciendo la hipótesis.
Si $\angle A < \angle A'$, entonces podemos aplicar la primera parte de esta demostración para concluir que $\overline{BC} > \overline{B'C'}$, contradiciendo igualmente la hipótesis. Así pues, la única posibilidad válida es $\angle A > \angle A'$.

3.7.10 Proposición. Desigualdad triangular (Elementos 1.20).
En todo triángulo ΔABC se cumple $\overline{AC} + \overline{AB} < \overline{BC}$

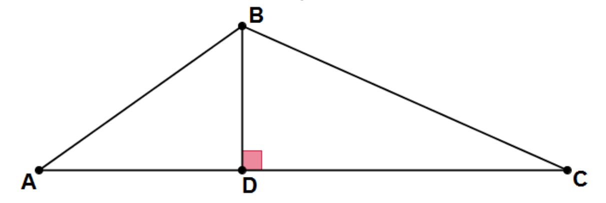


Demostración.
Trazamos el punto D en la semirrecta $op(\overrightarrow{AB})$ tal que $\overline{AD} \cong \overline{AC}$. Luego el triángulo ΔDAC es isósceles en A, y por lo tanto $\angle ADC \cong \angle DCA$.



Se cumple $D * A * B$, luego la semirrecta $\overrightarrow{CA}$ está en el interior de $\angle DCB$ y por lo tanto $\angle DCA < \angle DCB$. Luego $\angle BDC < \angle DCB$, y podemos aplicar la proposición 3.7.7 para deducir que $\overline{DB} > \overline{BC}$. Claramente $\overline{DB} = \overline{DA} + \overline{AB} \cong \overline{AC} + \overline{AB}$, con lo que llegamos a la desigualdad $\overline{AC} + \overline{AB} < \overline{BC}$.

3.7.11 Lema.
Sea un triángulo ΔABC, con $\angle A$ y $\angle C$ agudos. Trazamos desde B la perpendicular s a $\overleftrightarrow{AC}$. Sea D el punto de intersección entre s y $\overleftrightarrow{AC}$. Entonces A*D*C.



Demostración. $D \neq A$ y $D \neq B$ pues ambos ángulos no son rectos. Entonces por el Axioma B3 necesariamente D*A*B, A*B*D o A*D*B.
Supongamos que D*A*B. Entonces $\angle A$ será un ángulo exterior a ΔDAB, luego $\angle BDA < \angle A$, pero $\angle BDA$ es recto y $\angle A$ es agudo, lo que nos lleva a contradicción.
De forma similar la hipótesis A*B*D tampoco es aceptable, luego A*D*B.

3.7.12 Lema.
Todo triángulo tiene al menos dos ángulos agudos. Todo triángulo tiene como mucho un ángulo obtuso.

Demostración. Sea un triángulo ΔABC, y supongamos que $\angle C$ no es agudo. Veamos que entonces $\angle A$ y $\angle B$ son agudos. Sea D un punto tal que B*C*D. Entonces $\angle ACD$ será agudo o recto pues es suplementario de un ángulo que no es agudo. Pero $\angle ACD$ es un ángulo exterior de ΔABC, luego por el Teorema del ángulo exterior (3.7.2) $\angle ACD > \angle A$ y $\angle ACD > \angle B$. Luego $\angle A$ y $\angle B$ son agudos.

3.7.13 Proposición.
La hipotenusa es el lado más largo de un triángulo rectángulo.

Demostración.
Sea ΔABC un triángulo rectángulo en A. Entonces, por el lema anterior, los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ son agudos, y por tanto $\angle ABC < \angle BAC \Rightarrow \overline{BC} > \overline{AC}$ por 3.7.7. De la misma forma se demuestra que $\overline{BC} > \overline{AB}$.

3.8 Congruencia de triángulos.

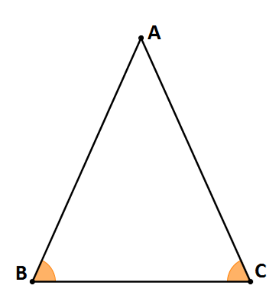
3.8.1 Proposición. Criterio AAS de congruencia de triángulos (Elementos 1.26 parte 2)
Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, si se cumple $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Demostración. Por el Axioma C6 existirá un único punto D, colateral con A respecto $\overleftrightarrow{BC}$, tal que $\Delta BCD \cong \Delta B'C'A'$. Puesto que $\angle DBC \cong \angle A'B'C' = \angle B' \cong \angle B$, por el Axioma C5 tendremos que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}$. Luego $D \in \overrightarrow{BA}$ y por tanto D*A*B o B*D*A o D=A.
Si D*A*B entonces $\angle CDB < \angle A$ por el Teorema del ángulo exterior, pero $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle A' \cong \angle BDC$, llegando a contradicción. De la misma forma, suponer B*D*A también es contradictorio. Por lo tanto D=A y los dos triángulos son congruentes.

3.8.2 Proposición. Criterio ASA de congruencia de triángulos. (Elementos 1.26)
Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, si se cumple $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Demostración. Por el Axioma C6, existirá un punto D tal que $\Delta ABD \cong \Delta A'B'C'$, con D y C colaterales respecto a la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Puesto que
$\angle DAB \cong \angle C'A'B' = \angle A' \cong \angle A = \angle CAB$, por el Axioma C5 tenemos que
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow D \in \overrightarrow{AC}$.
De la misma manera $\angle ABD \cong \angle A'B'C' = \angle B' \cong \angle B = \angle ABC$ implica
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow D \in \overrightarrow{BC}$.
Así pues, $D \in \overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{AC}$, pero las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ se cortan únicamente en C (pues A, B y C son puntos no colineales) luego $D = C$, y $\Delta ABC = \Delta ABD \cong \Delta A'B'C'$.

3.8.3 Teorema. Caracterización de los triángulos isósceles (Elementos 1.6).
Un triángulo ΔABC es isósceles en A, es decir $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, si y sólo si $\angle B = \angle C$.



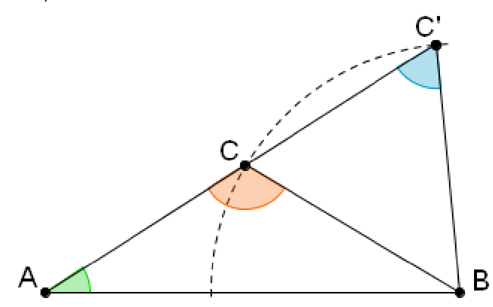
Demostración. Supongamos que el triángulo ΔABC cumple $\angle A \cong \angle B$. Basta aplicar el criterio SAS al triángulo ΔABC consigo mismo en la forma ΔBAC para deducir que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. De la misma forma se demuestra la segunda afirmación. El recíproco fue demostrado en 3.1.9.

3.8.4 Proposición. Criterio SSS de congruencia de triángulos (Elementos 1.8)
Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, si se cumple $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

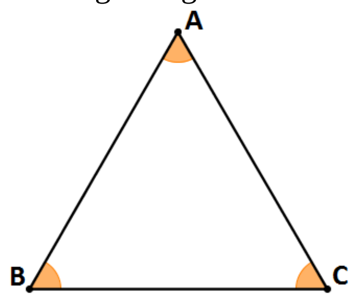
Demostración. Si $\angle A > \angle A'$ entonces por 3.7.7 tenemos que $\overline{BC} > \overline{B'C'}$ contradiciendo la hipótesis $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, y de la misma manera, si $\angle A < \angle A' \Rightarrow \overline{BC} < \overline{B'C'}$ contradiciendo igualmente $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.
Luego $\angle A \cong \angle A'$ y por tanto podemos aplicar SAS para deducir que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

3.8.5 Ejercicio.
Dibuja un contraejemplo para ASS, de la siguiente manera: Dibuja dos triángulos ΔABC y $\Delta ABC'$ que difieren en un único vértice y haz que B, C y C' sean colineales. No tienes que justificar rigurosamente este contraejemplo, pero asegúrate de que quede claro en el esquema que es realmente un contraejemplo.

Demostración. En el siguiente esquema hemos representado dos triángulos ΔABC y $\Delta ABC'$ que cumplen $\angle CAB = \angle C'AB$, y tienen dos lados iguales. Sin embargo, difieren en el tercero: $\overline{AC} \neq \overline{AC'}$ y el resto de ángulos no es congruente: $\angle ACB \ncong \angle AC'B$ y $\angle ABC \ncong \angle ABC'$.



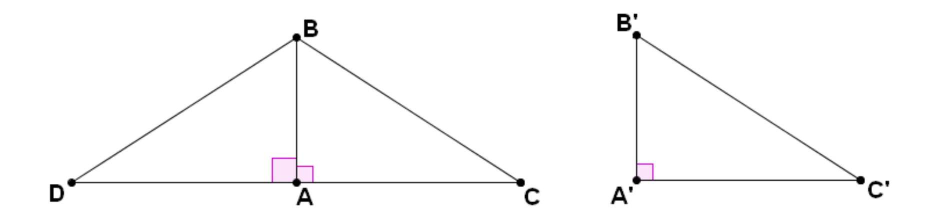
3.8.6 Teorema. El teorema del triángulo equilátero.
Un triángulo ΔABC es equilátero, es decir, tiene los tres lados iguales si y sólo si es equiangular, es decir, tiene los tres ángulos iguales.



Demostración. Basta tener en cuenta que un triángulo equilátero es isósceles en cada uno de sus vértices y aplicar el teorema 3.8.3 dos veces: Si $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ entonces $\angle B = \angle C$, y si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ entonces $\angle A = \angle C$, por lo que concluimos $\angle A = \angle B = \angle C$.

3.8.7 Teorema. Criterio HL de congruencia de triángulos rectángulos.
Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ rectángulos en A y A' respectivamente, si $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, entonces serán congruentes.
Con otras palabras, dos triángulos rectángulos son congruentes cuando comparten la hipotenusa y uno de los catetos.

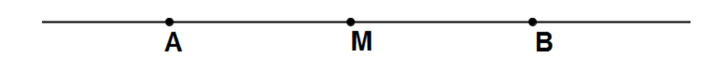
Demostración. Por el Axioma C6 existirá un punto D, con C y D en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, tal que $\Delta A'B'C' \cong \Delta ABD$.



Luego $\angle DAB \cong \angle C'A'B'$, dos ángulos rectos, luego por 3.5.8 tenemos $D * A * C$.
B no está en la recta $\overleftrightarrow{DC}$ pues $\overleftrightarrow{DC} = \overleftrightarrow{AC}$ y los puntos A, B y C no están alineados, luego los puntos D, B y C forman un triángulo.
Este triángulo es isósceles en B, pues $\overline{BC} \cong \overline{B'C'} \cong \overline{BD}$, luego $\angle DCB \cong \angle CDB$ por 3.1.9.
Por lo tanto $\angle ACB = \angle DCB \cong \angle CDB = \angle ADB \cong \angle A'C'B' \Rightarrow \angle ACB \cong \angle A'C'B'$ y aplicando el criterio ASA llegamos a $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

3.9 Puntos medios y mediatrices.

3.9.1 Definición. Punto medio de un segmento.
El punto medio de un segmento $\overline{AB}$ es el punto M tal que A*M*B y $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.



3.9.2 Lema.
Si un segmento tiene punto medio, entonces es único.

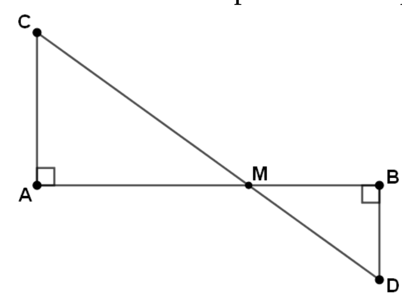
Demostración. Sea $\overline{AB}$ un segmento y M y M' dos puntos medios, es decir A*M*B, A*M'*B, $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ y $\overline{AM'} \cong \overline{M'B}$.
$A*M*B \wedge A*M'*B \Rightarrow A*M*M'*B \vee A*M'*M*B$
Supongamos $A*M*M'*B$. Entonces $A*M*M'*B \Rightarrow M*M'*B \Rightarrow \overline{M'B} < \overline{MB}$.
Pero también $A*M*M'*B \Rightarrow A*M*M' \Rightarrow \overline{AM} < \overline{AM'}$
Luego $\overline{AM} < \overline{AM'} \cong \overline{M'B} < \overline{MB}$ contradiciendo la hipótesis $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.
Con un razonamiento similar llegamos a contradicción suponiendo $A*M'*M*B$.

Nota: Esta propiedad la podemos interpretar como la noción común "las mitades de cosas iguales son iguales", que Euclides utiliza sin haberla enunciado, por ejemplo en Elementos 1.37.

3.9.3 Lema.
Supongamos que $\overline{AB}$ es un segmento y que C y D son puntos en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, y que $\angle BAC$ y $\angle ABD$ son rectos. Entonces $\overline{CD}$ no puede contener A o B.

Demostración. Si $A \in \overline{CD}$ entonces A, C, D son colineales. Luego $D \in \overleftrightarrow{AC}$. Pero por 3.6.3 tenemos $\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{BD}$, llegando a contradicción. De la misma manera llegamos a contradicción si suponemos $B \in \overline{CD}$.

3.9.4 Lema.
Sea $\overline{AB}$ un segmento y C y D puntos en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, con $\angle BAC$ y $\angle ABD$ ángulos rectos. Entonces $\overline{CD}$ corta $\overleftrightarrow{AB}$ en un punto M tal que A*M*B.

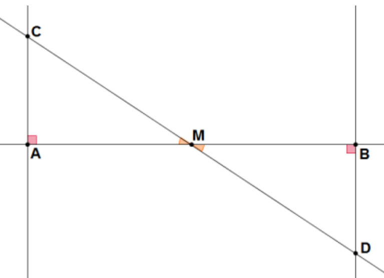


Demostración. Puesto que C y D están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, el segmento $\overline{CD}$ y la recta $\overleftrightarrow{AB}$ se deben cortar en un punto M, luego C*M*D.

Por el lema anterior 3.9.3, $M \neq A, B$. Luego por el Axioma B3, tenemos tres posibilidades: M*A*B, A*M*B o A*B*M.
Supongamos que M*A*B. Entonces $\angle MAC$ es recto (Pues es suplementario de $\angle BAC$ que es un ángulo recto). Luego $\angle AMC$ tiene que ser agudo.
Pero por otro lado, $\angle AMC$ es un ángulo exterior del triángulo ΔMBD (pues C*M*D), por lo tanto $\angle AMC > \angle MBD \cong \angle ABD$ recto, luego $\angle AMC$ tiene que ser obtuso, y por lo tanto no puede ser agudo, llegando a contradicción.
De la misma forma llegamos a contradicción suponiendo A*B*M, luego A*M*B es la única posibilidad válida.

3.9.5 Proposición. Existencia y unicidad del punto medio. (Elementos 1.10)
Todo segmento tiene un único punto medio.

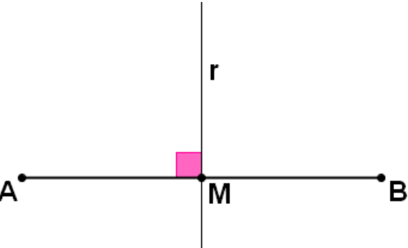
Demostración. Sea $\overline{AB}$ un segmento.
Sea $\overleftrightarrow{AC}$ una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ pasando por A.
Entonces $\angle BAC$ es un ángulo recto, por definición.
Sea D un punto al otro lado de $\overleftrightarrow{AB}$ respecto de C, y $\angle ABD \cong \angle BAC$ recto. (Axioma C5).
Por el Axioma C2 podemos escoger un D tal que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$.
Por el lema anterior, el segmento $\overline{CD}$ cortará la recta $\overleftrightarrow{AB}$ en un punto M cumpliendo A*M*B.



Por el teorema de los ángulos opuestos por el vértice (3.3.2), $\angle AMC \cong \angle DMB$.
Sabemos que $\angle MAC = \angle BAC$ ángulo recto y $\angle DBM = \angle ABD$ ángulo recto, y puesto que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$, podemos aplicar el criterio AAS para garantizar que los triángulos ΔCAM y ΔDBM son congruentes, por lo que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, es decir, M es el punto medio del segmento $\overline{AB}$.
La unicidad del punto medio quedó demostrada en el lema 3.9.2.

Observación: La demostración de Elementos 1.10 utiliza triángulos equiláteros sin demostrar previamente su existencia.

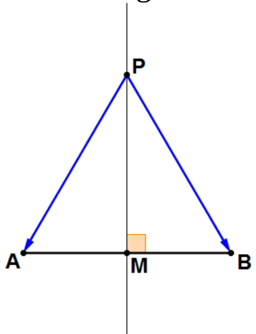
3.9.6 Definición. Mediatriz de un segmento.
Sea un segmento $\overline{AB}$. Una mediatriz de $\overline{AB}$ es una recta r tal que es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ y pasa por su punto medio.



3.9.7 Proposición.
Todo segmento tiene una única mediatriz.

Demostración. Sea un segmento $\overline{AB}$. Por 3.9.5 existirá un único punto medio M. Por 3.5.7 existirá una única recta s perpendicular a r que pasa por M. La recta s es la recta buscada.

3.9.8 Teorema. Caracterización de los puntos de una mediatriz.
Un punto P pertenece a la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ si y sólo si $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

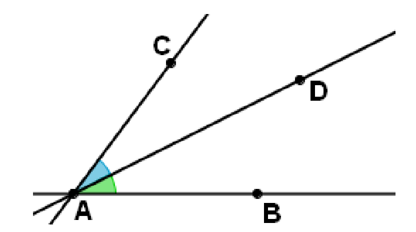


Demostración. Sea un segmento $\overline{AB}$ y r su mediatriz, donde M es el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Sea $P \in r$.
Si P=M, entonces por definición de punto medio tenemos que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.
Si $P \neq M$, entonces los triángulos ΔAMP y ΔBMP serán congruentes por SAS, luego $\overline{AP} \cong \overline{PB}$.
Recíprocamente, sea P un punto tal que $\overline{AP} \cong \overline{PB}$.
El triángulo ΔABP será isósceles, luego $\angle PAB \cong \angle ABP$.
Sea s la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por P. Aplicando AAS, los triángulos $\Delta AM'P$ y $\Delta BM'P$ serán congruentes, luego $\overline{AM'} \cong \overline{M'B}$, y por la unicidad del punto medio de $\overline{AB}$, tenemos que M'=M, y por la unicidad de la recta perpendicular que pasa por un punto, $P' \in r$.

Nota: No podemos garantizar, dentro del contexto de una geometría neutral, que dos mediatrices del triángulo se corten en un punto (Ver 6.6)

3.10 Bisectrices.

3.10.1 Definición. Bisectriz.
Sea un ángulo $\angle BAC$. Una bisectriz de $\angle BAC$ es una semirrecta $\overrightarrow{AD}$ tal que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ y $\angle BAD \cong \angle DAC$.



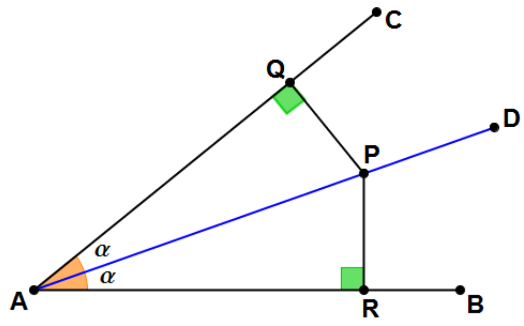
3.10.2 Proposición. (Elementos 1.9)
Todo ángulo tiene una única bisectriz.

Demostración. Existencia: Sea el ángulo $\angle BAC$. Modificando si es necesario los puntos C y B podemos suponer que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, es decir, que el triángulo ABC es isósceles en A. Sea D el punto medio de $\overline{BC}$ (Proposición 3.9.5).
D es un punto interior de $\angle BAC$ (2.6.3)
Por el criterio SSS de congruencia, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$, por lo que $\angle BAD \cong \angle DAC$, es decir, la semirrecta $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del ángulo.
Veamos ahora la unicidad:
Supongamos que $\overrightarrow{AD'}$ es otra semirrecta bisectriz de $\angle BAC$.
Por el teorema 2.6.3, $\overrightarrow{AD'}$ cortará $\overline{BC}$. Sustituyendo D’ por este punto, podemos suponer que B*D’*C. Luego D’ es el punto medio de $\overline{BC}$ (aplicando el criterio SAS de congruencia de triángulos, y escogiendo puntos B y C tales que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$). Pero D también es el punto medio de $\overline{BC}$, luego por la unicidad del punto medio, llegamos a $D' = D$.

3.10.3 Proposición. Caracterización de los puntos de la bisectriz de un ángulo.
Un punto P pertenece a la bisectriz $\angle BAC$ si y sólo si

$$\overline{P\, pr(P, \overleftrightarrow{AB})} \cong \overline{P\, pr(P, \overleftrightarrow{AC})}$$

Demostración. Sea un ángulo $\angle BAC$ y $\overrightarrow{AD}$ su bisectriz.

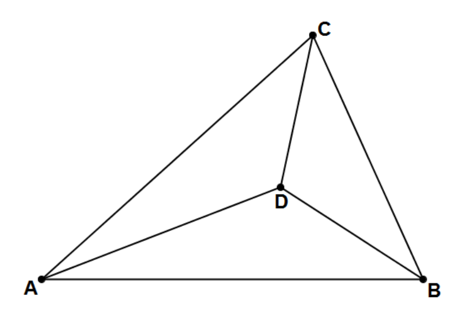


Sea $Q = pr(P, \overleftrightarrow{AC})$ y $R = pr(P, \overleftrightarrow{AB})$ los pies de las perpendiculares por P a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ respectivamente.

Si $P \in \overrightarrow{AD}$ entonces, por el criterio AAS de congruencia de triángulos (3.8.1), $\Delta APR \cong \Delta APQ$. Luego $\overline{QP} \cong \overline{PR}$.

Recíprocamente, supongamos que $\overline{P\ pr(P, \overleftrightarrow{AB})} \cong \overline{P\ pr(P, \overleftrightarrow{AC})}$, es decir, $\overline{QP} \cong \overline{PR}$. Los triángulos rectángulos ΔAPR y ΔAPQ tendrán cateto e hipotenusa iguales, y por tanto serán congruentes (criterio HL, 3.8.7). Luego $\angle PAQ \cong \angle PAR$, es decir, el punto P pertenece a la bisectriz del ángulo.

3.10.4 Proposición.
Las bisectrices de un triángulo se encuentran en un único punto llamado **incentro**.

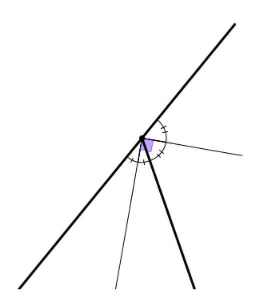


Demostración. Sea D el punto de corte de las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$. Basta ver que D pertenece a la bisectriz por $\angle C$, para lo que utilizaremos tres veces la proposición anterior.

D pertenece a la bisectriz del ángulo $\angle A$, luego $\overline{P\ pr(P, \overleftrightarrow{AB})} \cong \overline{P\ pr(P, \overleftrightarrow{AC})}$.

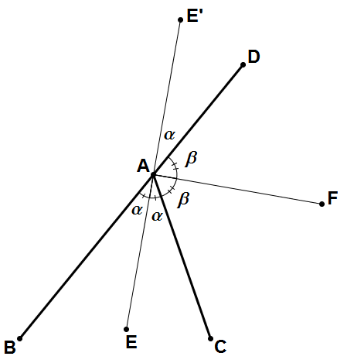
D pertenece a la bisectriz del ángulo $\angle B$, luego $\overline{P\ pr(P, \overleftrightarrow{AB})} \cong \overline{P\ pr(P, \overleftrightarrow{BC})}$.
Así pues, por la transitividad de la congruencia de segmentos,
$\overline{P\ pr(P, \overleftrightarrow{AC})} \cong \overline{P\ pr(P, \overleftrightarrow{BC})}$ y por tanto D pertenece a la bisectriz por $\angle C$.

3.10.5 Proposición.
Las bisectrices de un ángulo y de un ángulo suplementario son perpendiculares.



Demostración. Sea un ángulo $\angle BAC$ y $D \in Op(\overrightarrow{AB})$, de forma que $\angle BAC$ y $\angle DAC$ sean suplementarios.
Sea $\overrightarrow{AE}$ la bisectriz de $\angle BAC$ y $\overrightarrow{AF}$ la bisectriz de $\angle DAC$. Sean $\alpha = \angle BAE \cong \angle EAC$ y $\beta = \angle CAF \cong \angle FAD$.

Sea $E' \in Op(\overrightarrow{AE})$. Puesto que $B * A * D$ y $E * A * E'$, $\angle BAE$ y $\angle DAE'$ son ángulos opuestos por el vértice, y por tanto $\angle BAE \cong \angle E'AD$.



Los ángulos $\angle EAF$ y $\angle FAE'$ son suplementarios, y se cumple

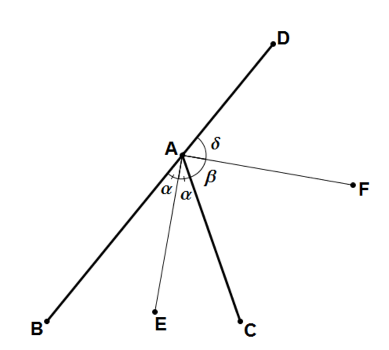
$\angle EAF = \angle EAC + \angle CAF \cong \alpha + \beta$

$\angle FAE' = \angle FAD + \angle DAE' \cong \beta + \alpha$

Luego $\angle EAF \cong \angle FAE'$ y por lo tanto $\angle EAF$ es congruente con su suplementario, es decir, es un ángulo recto por 3.5.1.

3.10.6 Corolario. Caracterización de la bisectriz exterior.

Dados dos ángulos suplementarios $\angle BAC$ y $\angle CAD$, y $\overrightarrow{AE}$ la bisectriz de $\angle BAC$, entonces la semirrecta $\overrightarrow{AF}$ del interior de $\angle CAD$ será su bisectriz si y sólo si $\angle EAF$ es un ángulo recto.

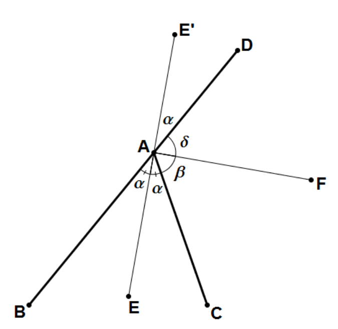


Demostración. Si $\overrightarrow{AF}$ es la bisectriz de $\angle CAD$ entonces $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AF}$ por la proposición anterior.

Supongamos que $\angle EAF$ es un ángulo recto.

Sean $\alpha = \angle BAE \cong \angle EAC$ y $\beta = \angle CAF$ y $\delta = \angle FAD$.

Sea $E' \in Op(\overrightarrow{AE})$.



Por ser $\angle EAF$ recto, $\angle EAF \cong \angle FAE'$. $\angle EAF = \angle EAC + \angle CAF \cong \alpha + \beta$

$\alpha = \angle BAE \cong \angle DAE'$ por ser ángulos opuestos, luego $\angle FAE' = \angle EAD + \angle DAE' \cong \delta + \alpha$

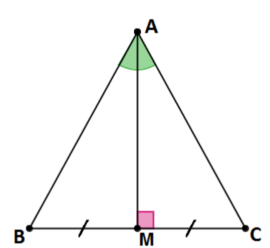
Por lo tanto, $\alpha + \beta \cong \delta + \alpha$, de donde deducimos $\beta \cong \delta$ y por tanto $\overrightarrow{AF}$ es la bisectriz de $\angle CAD$.

3.11 Propiedades de los triángulos isósceles.

3.11.1 Proposición.

Sea ΔABC un triángulo isósceles en A (es decir, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$). Entonces coinciden:

- La mediana por el vértice A.
- La mediatriz del lado opuesto $\overline{BC}$.
- La bisectriz del ángulo $\angle A$.
- La altura del triángulo por el vértice A.



Demostración. Sea M el punto medio de $\overline{BC}$, es decir, el segmento $\overline{AM}$ es la mediana por el vértice A.

$\overline{BM} \cong \overline{MC}$, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\angle B \cong \angle C$, luego $\Delta ABM \cong \Delta ACM$ (criterio SAS).

Por lo tanto $\angle BMA \cong \angle CMA$, es decir, son ángulos suplementarios congruentes y por tanto rectos. Así pues, $\overline{AM}$ es la mediatriz del segmento $\overline{BC}$. Puesto que pasa por A, está claro que $\overline{AM}$ es la altura del triángulo por el vértice A.

También se cumple $\angle BAM \cong \angle CAM$, por lo que $\overline{AM}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$.

3.11.2 Proposición.

a) Si en un triángulo coinciden la mediana y la bisectriz en un vértice, entonces el triángulo es isósceles en dicho vértice.

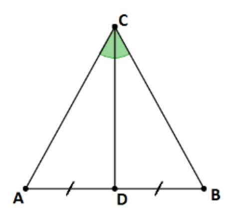
b) Si en un triángulo coinciden la altura y la mediana en un vértice, entonces el triángulo es isósceles en dicho vértice.

c) Si en un triángulo coinciden la bisectriz y altura en un vértice, entonces el triángulo es isósceles en dicho vértice.

d) Si en un triángulo coinciden la mediatriz de un lado y la mediana por el vértice opuesto, entonces el triángulo es isósceles en dicho vértice.

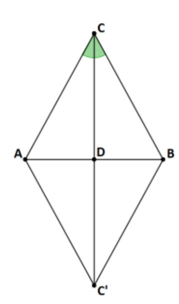
Demostración.

a)

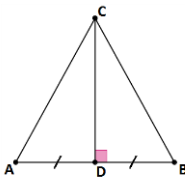


Sea ΔABC un triángulo y D un punto de $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} \cong \overline{DB}$ y $\angle ACD \cong \angle DCB$. Prolongamos el segmento $\overline{CD}$ hasta un punto C' tal que $\overline{CD} \cong \overline{DC'}$. Los triángulos ΔACD y $\Delta BC'D$ serán congruentes por el criterio SAS, puesto que $\overline{AD} \cong \overline{DB}$, $\overline{CD} \cong \overline{DC'}$ y $\angle ADC \cong \angle BDC'$ por ser ángulos opuestos por el vértice. Luego

$\overline{AC} \cong \overline{BC'}$ y $\angle BC'D \cong \angle ACD$. Pero entonces $\angle BC'D \cong \angle ACD \cong \angle DCB$ y por lo tanto el triángulo $\Delta CBC'$ es isósceles en B (3.8.3). Luego $\overline{BC} \cong \overline{BC'}$ y por lo tanto $\overline{AC} \cong \overline{BC'} \cong \overline{BC}$, así pues, el triángulo ΔABC será isósceles en C.



b) Los triángulos ΔADC y ΔBDC serán congruentes por el criterio SAS, y por tanto $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, es decir, es un triángulo isósceles.



c) En este caso tendremos dos triángulos congruentes por ASA, y por tanto $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.
d) Tendremos dos triángulos congruentes por SAS, y por tanto $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

3.11.3 Proposición.
Si dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son isósceles en A y A' respectivamente, y son congruentes, también lo serán sus alturas respectivas por A y A'.

Demostración. Trazamos las respectivas alturas $\overline{AD}$ y $\overline{A'D'}$. Por 3.11.1 dichas alturas también son bisectrices de $\angle A$ y $\angle A'$, luego $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$. Por ser triángulos isósceles $\angle C \cong \angle C'$, y aplicando el criterio ASA, $\Delta ADC \cong \Delta A'D'C'$, de lo que deducimos que $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$, tal y como queríamos ver.

3.12 Congruencia de cuadriláteros.

3.12.1 Definición. Congruencia de cuadriláteros.
Diremos que dos cuadriláteros $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son congruentes cuando podamos establecer una biyección entre sus vértices

$$A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C', D \leftrightarrow D'$$

que haga corresponder ángulos congruentes:

$$\angle A \cong \angle A',\ \angle B \cong \angle B',\ \angle C \cong \angle C',\ \angle D \cong \angle D'$$

y segmentos concurrentes:

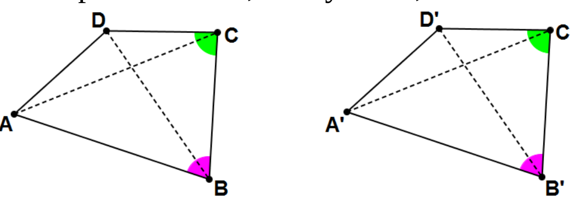
$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'},\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'},\ \overline{CD} \cong \overline{C'D'},\text{ y } \overline{DA} \cong \overline{D'A'}.$$

3.12.2 Proposición. Criterio SASAS de congruencia de cuadriláteros.
Si dos cuadriláteros $ABCD$ y $A'B'C'D'$ cumplen

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'},\ \angle B \cong \angle B',\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'},\ \angle C \cong \angle C' \text{ y } \overline{CD} \cong \overline{C'D'}$$

entonces son congruentes.

Demostración.
Trazamos las diagonales respectivas $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{A'C'}$, $\overline{B'D'}$ de cada cuadrilátero:



Puesto que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle B \cong \angle B'$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son congruentes por el criterio SAS.
Luego $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ y $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

De la misma manera, puesto que $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\angle C \cong \angle C'$ y $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, los triángulos ΔBCD y $\Delta B'C'D'$ son congruentes por el criterio SAS.
Luego $\overline{BD} \cong \overline{B'D'}$, $\angle DBC \cong \angle D'B'C'$ y $\angle BDC \cong \angle B'D'C'$

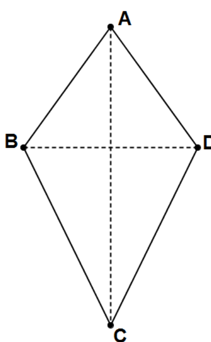
Por resta de ángulos (3.3.7), si $\angle C \cong \angle C'$ y $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$,entonces $\angle DCA \cong \angle D'C'A'$, y puesto que $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, por el criterio SAS tenemos que $\Delta DCA \cong \Delta D'C'A'$, y por lo tanto $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$, $\angle D \cong \angle D'$ y $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$.
Por suma de ángulos (3.4.5), $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$ y $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ implica $\angle A \cong \angle A'$ y ya tenemos todos los ángulos y todos los lados congruentes, tal y como queríamos ver.

3.12.3 Ejercicio. Otros criterios de congruencia de cuadriláteros.
Los criterios ASASA, SASSS y SASAA son criterios válidos de congruencia de cuadriláteros.

3.12.4 Ejercicio.
Comprueba, mediante un antiejemplo en IR^2, que el criterio SAAAA no es un criterio válido de congruencia de cuadriláteros.

3.13 Cometas.

3.13.1 Definición. Cometa.
Una cometa es un cuadrilátero convexo $ABCD$ que tiene dos pares de lados adyacentes congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.



También lo podemos interpretar como una figura creada mediante dos triángulos isósceles con una base común (base que será la diagonal de la cometa).

3.13.2 Proposición.
Las diagonales de una cometa se cortan en ángulos rectos.

Demostración. Sea $ABCD$ una cometa con $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$. Aplicando 3.9.8 sabemos que A y C pertenecen a la mediatriz del segmento $\overline{BD}$. Dos puntos determinan una recta, y por tanto la mediatriz del segmento $\overline{BD}$ será $\overleftrightarrow{AC}$. Por definición de mediatriz, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$.

4 Continuidad.

4.1 Conjuntos convexos.

4.1.1 Definición. Conjunto convexo.

Diremos que un conjunto de puntos S es convexo cuando cumple la siguiente condición:

$$\text{Si } A,B \in S \text{ entonces } \overline{AB} \subset S$$

O equivalentemente: Si $A*C*B$ con $A,B \in S$, entonces $C \in S$. El conjunto vacío es convexo.

4.1.2 Ejercicio.

Todo conjunto de un único punto es convexo.

Demostración. Basta aplicar la definición de $\overline{AA}$ (2.1.3).

4.1.3 Ejercicio.

Toda recta es convexa.

Demostración. Si $A,B \in r \Rightarrow \overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB} = r$ (2.1.6).

4.1.4 Ejercicio.

Toda semirrecta es convexa.

Demostración. Si $A,B \in \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD}$.

4.1.5 Ejercicio.

Todo semiplano es convexo.

Demostración. Sea r una recta y supongamos que A y B están en el mismo lado de r, es decir, $A \approx_r B$. Sea C un punto tal que A*C*B. Supongamos que $A \not\approx_r C$. Entonces existe un punto $D \in r$ tal que A*D*C. Entonces A*D*C*B (2.3.4), luego A*D*B y en consecuencia $A \not\approx_r B$ en contradicción con la hipótesis. Luego $A \approx_r C$.

4.1.6 Ejercicio.

Todo segmento es convexo.

4.1.7 Proposición.

La intersección de dos conjuntos convexos es convexo.

Demostración. Supongamos S y T dos conjuntos convexos. Sean $A,B \in S \cap T$. Entonces $A,B \in S$ convexo, luego $\overline{AB} \subset S$. De la misma forma $A,B \in T$ convexo, y por tanto $\overline{AB} \subset T$. Luego $\overline{AB} \subset S \cap T$.

4.2 Particiones de Dedekind. El Axioma de Dedekind.

Nota histórica.
A mediados del siglo XIX el matemático alemán Dedekind introduce el concepto de "corte", que aclara y unifica por un lado el concepto geométrico de recta continua, en el sentido de completa, sin agujeros, y por otro el concepto aritmético de "sistema numérico continuo", ambos en perfecta biyección. Gracias a este concepto, muchos teoremas fundamentales que hasta el momento se tenían por ciertos pudieron ser finalmente demostrados rigurosamente.

4.2.1 Definición. Partición de una recta.
Una **Partición** de una recta r es un par de conjuntos $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ de puntos de r tal que

$$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = r \ \ , \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing \ \ , \Sigma_1 \neq \varnothing \ \ , \Sigma_2 \neq \varnothing$$

4.2.2 Proposición. Partición de Dedekind de una recta.
Dada una partición $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ de una recta r, son equivalentes:
a) Ningún punto de Σ_1 está entre dos puntos de Σ_2 y ningún punto de Σ_2 está entre dos puntos de Σ_1.
b) Σ_1 y Σ_2 son convexos.
En cualquiera de los dos casos diremos que se trata de una **partición de Dedekind** de la recta.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Sean $P, Q \in \Sigma_1$. Sea $R \in \overline{PQ}$, es decir, $P * R * Q$. Puesto que ningún punto de Σ_2 puede estar entre dos puntos de Σ_1, $R \notin \Sigma_2$, y por tanto necesariamente $R \in \Sigma_1$, y Σ_1 es convexo. De la misma manera se demuestra que Σ_2 es convexo.
$b) \Rightarrow a)$ Supongamos ahora que Σ_1 y Σ_2 son conjuntos convexos.
Supongamos que $R \in \Sigma_1$ está entre dos puntos $P, Q \in \Sigma_2$, es decir, $P * R * Q$.
Por convexidad de Σ_2 necesariamente $R \in \Sigma_2$, contradiciendo la hipótesis. Luego ningún punto de Σ_1 puede estar entre dos puntos de Σ_2. Con el mismo razonamiento se demuestra el otro caso.

4.2.3 Definición. Punto de corte de una partición de Dedekind.
Dada una partición de Dedekind $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ de una recta r, y un punto O de la misma, las tres condiciones siguientes son equivalentes:
a) $\forall P, Q \in r$, $P * O * Q \Rightarrow \overline{PQ}$ corta Σ_1 y Σ_2
b) $\forall P, Q \in \Sigma_1$, $P * O * Q$ no es cierto, y $\forall P, Q \in \Sigma_2$, $P * O * Q$ no es cierto.
c) $\forall P \in \Sigma_1$, $\forall Q \in \Sigma_2$, $P, Q \neq O \Rightarrow P * O * Q$

En cualquiera de los tres casos, diremos que O es un **punto de corte** de la partición.
Estas tres condiciones equivalentes, cada una a su manera, nos están diciendo que existe un punto "frontera", un punto que está "en medio" de las dos particiones.

Nota: En algunos libros encontramos también una cuarta definición:
d) $\Sigma_1 \cup O$ y $\Sigma_2 \cup O$ son las dos semirrectas de r con vértice O.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Supongamos que $P*O*Q$ para ciertos $P,Q \in \Sigma_1$.
Por convexidad de Σ_1, $P,Q \in \Sigma_1 \Rightarrow \overline{PQ} \subset \Sigma_1$, contradiciendo la hipótesis de que $\overline{PQ}$ corta Σ_2. La otra condición se demuestra de la misma forma.

$b) \Rightarrow c)$ Sean $P \in \Sigma_1$, $Q \in \Sigma_2$, $P,Q \neq O$. Los puntos P, Q y O son tres puntos distintos de la recta, luego se debe dar uno y sólo uno de los tres casos siguientes: (Axioma B3)
a) $P*Q*O$ b) $O*P*Q$ c) $P*O*Q$
Supongamos que sucede el caso a), es decir, $P*Q*O$. Sea R tal que $Q*O*R$ (Axioma B2).
$P*Q*O \wedge Q*O*R \Rightarrow P*Q*O*R \Rightarrow P*Q*R$ (2.3.6)
Por hipótesis, $Q*O*R \Rightarrow \exists S \in \overline{QR} \cap \Sigma_1 \Rightarrow Q*S*R$.
Pero $P*Q*R \wedge Q*S*R \Rightarrow P*Q*S*R \Rightarrow P*Q*S$, con $P,S \in \Sigma_1$, luego por convexidad necesariamente $Q \in \Sigma_1$ contradiciendo la hipótesis $Q \in \Sigma_2$.
El caso b) nos lleva a contradicción con un razonamiento similar, por lo que sólo puede suceder el caso c), es decir, que $P*O*Q$.

$c) \Rightarrow a)$ Supongamos que $P*O*Q$ para ciertos $P,Q \in r$.
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $O \in \Sigma_1$.
Si $P \in \Sigma_1$ y $Q \in \Sigma_2$ o bien $P \in \Sigma_2$ y $Q \in \Sigma_1$ no hay nada que decir.
El caso $P,Q \in \Sigma_2$ no se puede dar pues Σ_2 es convexo, luego sólo nos queda estudiar el caso $P,O,Q \in \Sigma_1$. Está claro que $\overline{PQ}$ corta Σ_1, luego nos queda ver que corta Σ_2.
Puesto que $\Sigma_2 \neq \emptyset$, sea $R \in \Sigma_2$. Entonces, por hipótesis, tendremos $P*O*R$ y $Q*O*R$. Luego, por 2.3.8, o bien $P*O*Q*R$ o bien $P*O*R*Q$.
Si $P*O*R*Q$ entonces $P*R*Q$ y $\overline{PQ}$ corta Σ_2.
Si $P*O*Q*R$, entonces $O*Q*R$, pero teníamos $Q*O*R$, llegando a contradicción.

4.2.4 Corolario.
Un punto de corte, si existe, es único.

Demostración. Supongamos que O y O’ son puntos de corte de una misma partición de Dedekind $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ de una recta r.
Supongamos que $O, O' \in \Sigma_1$. Sea $P \in \Sigma_2$. Aplicamos la proposición anterior:
Por ser O’ punto de corte, $O*O'*P$, por ser O punto de corte, $O'*O*P$, contradiciendo el Axioma B3.
Supongamos que $O \in \Sigma_1$ y $O' \in \Sigma_2$. Sea P un punto $O*P*O'$ (Axioma B2).
Si $P \in \Sigma_1$, puesto que $O' \in \Sigma_2$, por ser O punto de corte y aplicando la proposición anterior obligatoriamente se debe cumplir $P*O*O'$, llegando a contradicción.
Si $P \in \Sigma_2$ un razonamiento similar nos lleva igualmente a contradicción.
El resto de casos se demuestra de la misma manera.

4.2.5 Axioma. Axioma de Dedekind.
Para toda partición de Dedekind de una recta existe un punto de corte.

4.2.6 Definición. Particiones de Dedekind de semirrectas.
De la construcción para rectas podemos deducir una variación de partición de Dedekind para semirrectas.

Sea una semirrecta $s=\overrightarrow{AB}$, diremos **partición de Dedekind** de s a todo par de conjuntos $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ tal que:

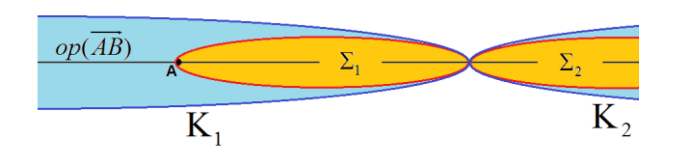
a) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = s$
b) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$
c) $A \in \Sigma_1$
d) $\Sigma_1 \neq s$
e) Σ_1 y Σ_2 son convexos.

Y su axioma de Dedekind correspondiente: Toda partición de Dedekind de una semirrecta tiene asociado un punto de corte, y pertenece a dicha semirrecta.

4.2.7 Proposición.
Si se cumple el axioma de Dedekind para rectas también se cumple para semirrectas.

Demostración. Ampliamos la partición $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ a una partición $\{K_1, K_2\}$ de la recta $r=\overleftrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cup op(\overrightarrow{AB})=s\cup op(\overrightarrow{AB})$ de la siguiente manera:

$$K_1 = \Sigma_1 \cup op(\overrightarrow{AB})$$
$$K_2 = r - K_1$$



Observamos que $K_2 = \Sigma_2$:

$P\in K_2 \Rightarrow P\notin K_1=\Sigma_1\cup op(\overrightarrow{AB}) \Rightarrow P\notin op(\overrightarrow{AB}) \Rightarrow P\in \overrightarrow{AB}, P\notin\Sigma_1 \Rightarrow P\notin\Sigma_2$

$P\in\Sigma_2 \Rightarrow P\notin\Sigma_1 \wedge P\neq A\in\Sigma_1 \Rightarrow P\in\overrightarrow{AB}-A \Rightarrow P\notin op(\overrightarrow{AB}) \Rightarrow P\notin K_1 \Rightarrow P\in K_1$

$\{K_1, K_2\}$ es una partición de Dedekind de la recta r:
$K_1 \neq \varnothing$ pues $A\in\Sigma_1\subset K_1$.
$K_2\neq\varnothing$ pues $\Sigma_2\neq\varnothing$.
$K_1\cup K_2 = r$ $K_1\cap K_2=\varnothing$ por ser conjuntos complementarios.
K_1 es convexo: Supongamos que $P,Q\in K_1$ y $P*R*Q$ para cierto $R\in r$.
Si $P,Q\in op(\overrightarrow{AB}) \Rightarrow R\in op(\overrightarrow{AB})\subset K_1$ pues el opuesto de una semirrecta es una semirrecta y toda semirrecta es convexa (4.1.4).
Si $P,Q\in\Sigma_1 \Rightarrow R\in\Sigma_1\subset K_1$ pues por hipótesis Σ_1 es convexo.

Si $P \in op(\overrightarrow{AB})$ y $Q \in \Sigma_1$, y ninguno de los dos es A.
$P \in op(\overrightarrow{AB}) = op(\overrightarrow{AQ}) \Rightarrow P*A*Q$
$P*A*Q \wedge P*R*Q \Rightarrow P*A*R*Q \vee P*R*A*Q$
$P*R*A*Q \Rightarrow R*A*Q \Rightarrow R \in op(\overrightarrow{AQ}) = op(\overrightarrow{AB}) \Rightarrow R \in \mathrm{K}_1$
$P*A*R*Q \Rightarrow A*R*Q \Rightarrow R \in \Sigma_1$, pues está entre dos elementos de Σ_1, y Σ_1 es convexo.

Los otros casos se demuestran con argumentos similares.

Por lo tanto, si se cumple el Axioma de Dedekind, lo podemos aplicar a la partición de Dedekind $\{\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2\}$:
Existirá un punto $O \in r$ tal que

Si $P \in \mathrm{K}_1$ y $Q \in \mathrm{K}_2$, $P, Q \neq O$, se tiene $P*O*Q$

El punto de corte O pertenecerá a la semirrecta $s = \overrightarrow{AB}$, y $O \neq A$.
Efectivamente, supongamos que $O = A$. Tomamos cualquier punto $Q \in \Sigma_1 - \{A\}$, y cualquier punto $P \in op(\overrightarrow{AB})$.
$P \in op(\overrightarrow{AB}) = op(\overrightarrow{AQ}) \Rightarrow P*A*Q$, es decir, $P*O*Q$ con $P, Q \in \mathrm{K}_1$, lo cual es absurdo por definición de punto de corte.
Supongamos que $O \in op(\overrightarrow{AB}) - \{A\}$. Entonces existirá un $Q \in op(\overrightarrow{AB})$ tal que $Q*O*A$, con $Q, A \in \mathrm{K}_1$, lo cual es igualmente absurdo.

4.3 Circunferencias en un plano de Hilbert.

Este apartado contiene las propiedades de los objetos geométricos relacionados con las circunferencias dentro del contexto de un plano de Hilbert, es decir, sin suponer el Postulado de la única paralela. Veremos que para garantizar algunos resultados elementales, como por ejemplo que una recta que pasa por el interior de una circunferencia se corta con ella, es necesario suponer el Axioma de Continuidad. Más adelante, el tema 9 estará dedicado íntegramente a estudiar todas las propiedades de las circunferencias en un contexto de plano euclídeo.

4.3.1 Definición. Circunferencia. Interior y exterior de una circunferencia. Círculo.
Sea un punto A y un segmento $\overline{BC}$. Definimos la **circunferencia** de centro A y radio $\overline{BC}$ como el conjunto de puntos P tales que $\overline{AP} \cong \overline{BC}$. Es decir, por el conjunto:

$$\varpi = \left\{ P \mid \overline{AP} \cong \overline{BC} \right\}$$

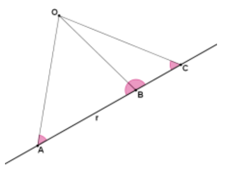
Definimos el **interior** de ϖ como el conjunto: $Int(\varpi) = \left\{ P \mid \overline{AP} < \overline{BC} \right\} \cup \{A\}$
Definimos el **exterior** de ϖ como el conjunto: $Ext(\varpi) = \left\{ P \mid \overline{AP} > \overline{BC} \right\}$

Por la ley de tricotomía, todo punto está en la circunferencia, en su interior o en su exterior, de forma exclusiva.

Diremos **círculo** a la unión de una circunferencia y su interior.

4.3.2 Proposición.
a) Una recta y una circunferencia se cortan como mucho en dos puntos.
b) Una recta que pasa por el centro O de una circunferencia la corta en dos puntos P y Q cumpliendo $P * O * Q$.
c) Dos circunferencias iguales como conjuntos de puntos tienen el mismo centro.

Demostración. a) Supongamos que una recta r corta una circunferencia de centro O en tres puntos diferentes A, B y C, es decir, $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$.



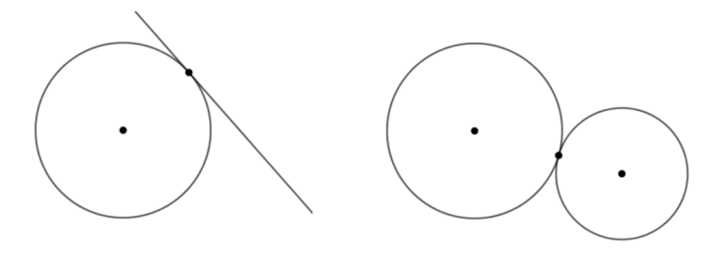
En el triángulo ΔOAC, $\overline{OA} \cong \overline{OC} \Rightarrow \angle OAC \cong \angle OCA$ por 3.1.9. De la misma manera, en el triángulo ΔOAB, $\overline{OA} \cong \overline{OB} \Rightarrow \angle OAB \cong \angle OBA$.
Luego $\angle OBA \cong \angle OAB = \angle OAC \cong \angle OCA = \angle OCB \Rightarrow \angle OBA \cong \angle OCB$.
Pero $\angle OBA > \angle OCB$ por el Teorema del ángulo exterior (3.7.2), llegando a contradicción.
b) Sea ϖ una circunferencia de centro O y radio $\overline{AB}$. Supongamos que la recta r corta a la circunferencia por su centro O. Sea C cualquier otro punto de r (Axioma I2). Sea P el punto de $\overrightarrow{OC}$ tal que $\overline{OP} \cong \overline{AB}$ (Axioma C2). Sea Q el punto de $op(\overrightarrow{OC})$ tal que $\overline{OQ} \cong \overline{AB}$. Estos dos puntos son los puntos buscados.

c) Sea O un punto y $\overline{AB}$ un segmento con los que construimos la circunferencia ϖ.
Sea O' otro punto y $\overline{A'B'}$ otro segmento con los que construimos la circunferencia ϖ'.
Queremos ver que si $\varpi = \varpi'$ como conjuntos, entonces $O = O'$.
Supongamos que $O \neq O'$. Sea $r = \overleftrightarrow{OO'}$. Aplicando el apartado anterior, esta recta cortará la circunferencia ϖ en dos puntos C y D tales que $C*O*D$. Se cumple $\overline{CO} \cong \overline{DO}$, y puesto que $\varpi = \varpi'$ también se cumplirá $\overline{CO'} \cong \overline{DO'}$.

Los dos únicos casos posibles son $C*O*O'*D$ y $C*O'*O*D$ (queda por demostrar).
Supongamos que $C*O*O'*D$. Entonces, por un lado, $C*O*O' \Rightarrow \overline{CO} < \overline{CO'} \cong \overline{DO'}$, pero también $O*O'*D \Rightarrow \overline{O'D} < \overline{OD}$, con lo cual llegamos a $\overline{CO} < \overline{DO'} < \overline{OD} \Rightarrow \overline{CO} < \overline{OD}$, absurdo porque $\overline{CO} \cong \overline{DO}$.
El otro caso $C*O'*O*D$ se demuestra con un razonamiento similar.

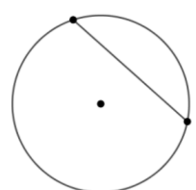
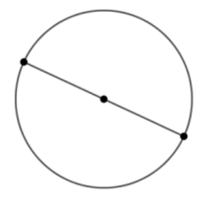
4.3.3 Definición. Recta tangente a una circunferencia. Circunferencias tangentes.
Diremos que una recta r es tangente a la circunferencia γ cuando se corten en un único punto. A dicho punto le llamaremos **punto de tangencia** entre la circunferencia y la recta.

Diremos que dos circunferencias son tangentes cuando se corten en un único punto. A dicho punto le llamaremos **punto de tangencia** entre las dos circunferencias.



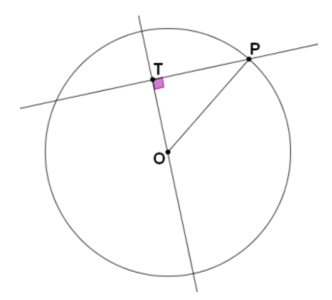
4.3.4 Definición. Cuerda. Diámetro.
Diremos que el segmento $\overline{AB}$ es una **cuerda** de la circunferencia γ cuando sus extremos A y B pertenezcan a la circunferencia.

Un **diámetro** de la circunferencia es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

4.3.5 Proposición.
Si una recta contiene un punto en el interior de una circunferencia, la proyección ortogonal del centro de la circunferencia en la recta también está en el interior de la misma, o bien la recta pasa por el centro de la circunferencia.

Demostración. Sea r la recta, y sea O el centro de la circunferencia. Si O pertenece a la recta ya no hay nada que demostrar, supongamos pues que O no pertenece a la circunferencia.
Sea T la proyección perpendicular de T en r. Sea P el punto de la recta que está en el interior de la circunferencia.



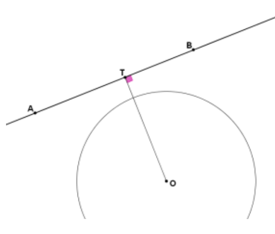
El triángulo ΔOTP es rectángulo en T, luego $\angle TPO$ es agudo (3.7.6) y por tanto $\overline{OP} > \overline{OT}$.
Luego para cualquier punto R de la circunferencia, $\overline{OR} > \overline{OP} > \overline{OT}$, y por tanto T también estará en su interior.

4.3.6 Proposición.
Todos los puntos entre dos puntos que no están en el exterior de una circunferencia están en el interior de la circunferencia. Por lo tanto, el interior de una circunferencia es un conjunto convexo, un círculo es un conjunto convexo, y todos los puntos interiores de una cuerda están en el interior de la circunferencia.

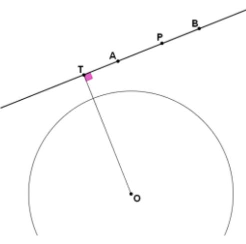
Demostración. Sean A y B dos puntos que no están en el exterior de una circunferencia de centro O. Supongamos que O no está en $\overleftrightarrow{AB}$. Sea P tal que $A*P*B$. Uno de los ángulos $\angle APO$ y $\angle OPB$ será recto o obtuso por 3.7.5. Supongamos que $\angle APO$ es obtuso. Entonces $\angle OAP$ es agudo y $\angle OAP < \angle APO \Rightarrow \overline{OA} > \overline{OP}$ por 3.7.7, y por tanto, si A no está en el exterior de la circunferencia entonces P estará en el interior de la circunferencia. Con un razonamiento similar se prueba el caso $\angle OPB$ obtuso.

Si la recta $\overleftrightarrow{AB}$ contiene el centro O necesitamos un razonamiento diferente. Los casos posibles son $A*O*P*B$, $A*P*O*B$, $O*A*P*B$, $A*P*B*O$. De cualquiera de estos cuatro casos se deduce fácilmente que el punto P está en el interior de la circunferencia.

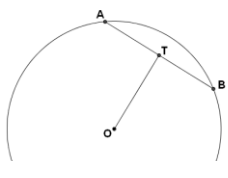
4.3.7 Proposición.
Sean A y B dos puntos exteriores a una circunferencia de centro O. Sea T la proyección ortogonal del centro en la recta $\overleftrightarrow{AB}$.
a) Si T está en el exterior de la circunferencia, toda la recta está en el exterior de la circunferencia.



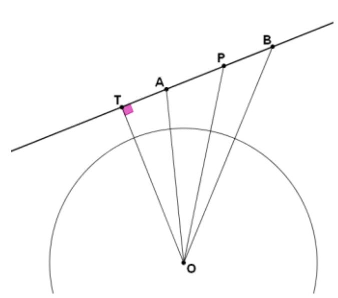
b) Si T no está en el interior de $\overline{AB}$, todos los puntos del segmento $\overline{AB}$ están en el exterior de la circunferencia.



c) La proyección ortogonal del centro de una circunferencia en una cuerda es su punto medio.



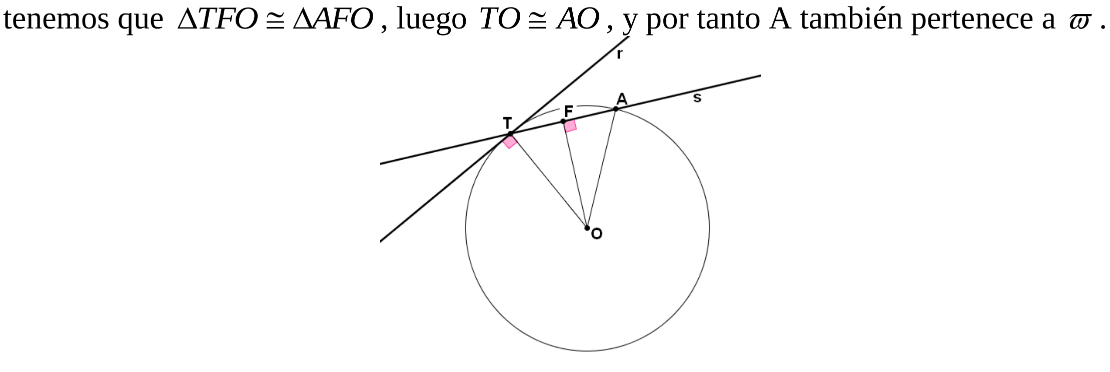
Demostración.
a) Sea P un punto de $\overleftrightarrow{AB}$. El triángulo ΔOTP es rectángulo en T y con hipotenusa $\overline{OP}$. Luego $\overline{OP} > \overline{OT}$ (3.7.13) y por tanto P está en el exterior de la circunferencia.
b) Sea P un punto de $\overline{AB}$. Se pueden dar dos casos: $T*A*P*B$ o $T*B*P*A$. Supongamos el primer caso.



El ángulo $\angle OAP$ es obtuso por el Teorema del ángulo exterior (3.7.2). Puesto que un triángulo no puede tener dos ángulos obtusos (3.7.12), $\angle APO$ tiene que ser agudo, y por tanto $\overline{OP} > \overline{OA}$, y si A está en el exterior de la circunferencia, también lo estará P.
c) Los triángulos ΔOTA y ΔOTB son congruentes por el criterio HL (3.8.7), luego $\overline{AT} \cong \overline{BT}$.

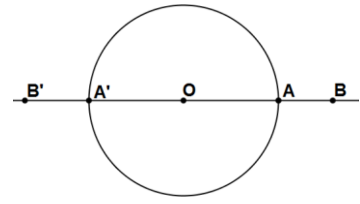
4.3.8 Proposición. Caracterización de las rectas tangentes.
Sea T un punto de una circunferencia ϖ de centro O. Sea r la recta perpendicular al radio $\overline{OT}$ que pasa por T.
a) La recta t tiene como único punto de contacto con la circunferencia al propio T, y por tanto es tangente a la circunferencia.
b) Toda la circunferencia queda a un lado de la recta t.
c) Cualquier otra recta que pase por T y no sea t tendrá dos puntos de contacto con la circunferencia, y por tanto la recta r es la única recta tangente a la circunferencia por T.

Demostración.
a) Dado cualquier punto $P \neq T$ de la recta, se cumplirá $\overline{OP} > \overline{OT}$ por 3.7.13, luego P no puede pertenecer a ϖ.
b) La desigualdad anterior garantiza que para cualquier punto R de ϖ, el segmento $\overline{OR}$ no puede cortar con la recta, pues si tenemos $O*P*R$ con P en la recta, entonces $\overline{OP} < \overline{OR}$, pero $\overline{OP} < \overline{OR} \cong \overline{OT} \Rightarrow \overline{OP} < \overline{OT}$ y acabamos de ver que esto no es posible.
c) Sea s cualquier otra recta que pasa por T. Sea F la proyección ortogonal de O en s. Puesto que $r \neq s$, $T \neq F$. Sea A en s tal que $\overline{AF} \cong \overline{TF}$, y $T*F*A$. Por el criterio SAS tenemos que $\Delta TFO \cong \Delta AFO$, luego $\overline{TO} \cong \overline{AO}$, y por tanto A también pertenece a ϖ.



4.3.9 Ejercicio.
El exterior de una circunferencia no es convexo.

Demostración. Sea γ una circunferencia con centro O y radio $\overline{OA}$.
En $op(\overrightarrow{OA})$ sea A' tal que $\overline{OA'} = \overline{OA}$. (Axioma C2)
Tenemos $A'*O*A$.
Sea $B \in \overrightarrow{OA}$ tal que $O*A*B$, y sea $B' \in \overrightarrow{OA'}$ tal que $O*A'*B'$. (Axioma B2)



Veamos que $B'*O*B$:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A'*O*A \\ O*A*B \end{array}\right\} \Rightarrow A'*O*A*B \Rightarrow A'*O*B \\ O*A'*B' \Rightarrow B'*A'*O \end{array}\right\} \Rightarrow B'*A'*O*B \Rightarrow B'*O*B$$

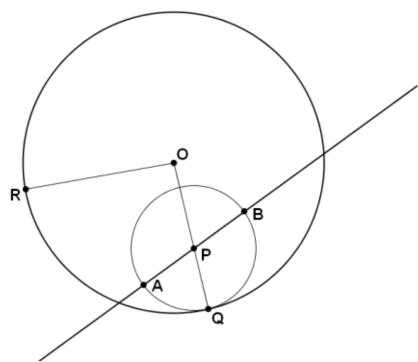
Luego $O \in \overline{BB'}$, pero $O \notin Ext(\gamma)$.

4.3.10 Lema.
Sea ϖ una circunferencia, y sea $\overline{AB}$ un segmento con $A \in Int(\varpi)$ y $B \in Ext(\varpi)$.
Entonces $\overline{AB} \cap Int(\varpi)$ y $\overline{AB} \cap Ext(\varpi)$ son conjuntos convexos.

Demostración.
Demostración. El segmento $\overline{AB}$ es convexo por 4.1.6. El interior de una circunferencia es convexo por 4.3.6. La intersección de dos conjuntos convexos es convexo por 4.1.7.
Luego la intersección de $\overline{AB}$ con el interior de γ será convexa.
Veamos que la intersección de $\overline{AB}$ con el exterior de γ es también convexa.
Supongamos que no. Entonces existirán X*Z*Y en $\overline{AB}$ con X, Y en el exterior de γ, pero con Z que no está en el exterior de ϖ, es decir, Z pertenece al círculo.
Reordenando Y e Y si es necesario, podemos suponer A*X*Y, luego A*X*Z*Y y por tanto A*X*Z, con A y Z en el círculo. Pero un círculo es convexo (4.3.6), luego X pertenecerá también al círculo, llegando a contradicción.

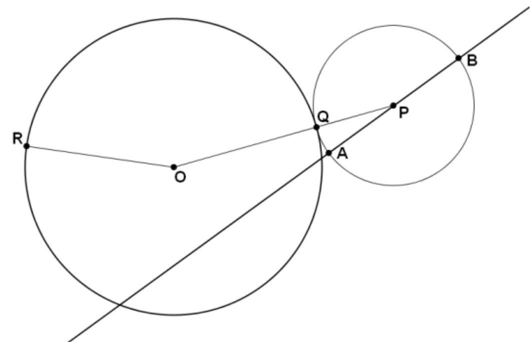
4.3.11 Lema.
Sea r una recta y ϖ una circunferencia.
a) Todo punto de $r \cap Int(\varpi)$ está entre dos puntos de $Int(\varpi)$.
b) Todo punto de $r \cap Ext(\varpi)$ está entre dos puntos de $Ext(\varpi)$.
c) Todo segmento $\overline{AB}$ con A en $Int(\varpi)$ y B en $Ext(\varpi)$ contiene otros puntos de $Int(\varpi)$ y $Ext(\varpi)$.

Demostración. Sea O el centro de la circunferencia y $\overline{OR}$ su radio.
a) Sea P un punto de r en el interior de la circunferencia, es decir, $\overline{OP} < \overline{OR}$.
Sea Q el punto de $\overrightarrow{OP}$ tal que $\overline{OQ} \cong \overline{OR}$.
Sean A y B los puntos de r situados a ambos lados de P tales que $\overline{PA} \cong \overline{PB} \cong \overline{PQ}$.



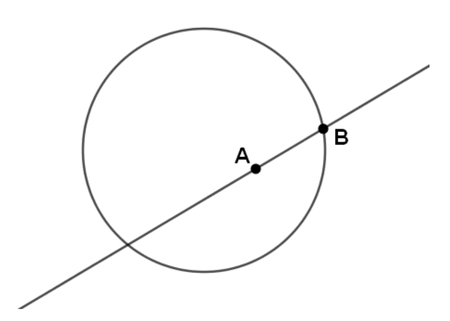
Aplicando la desigualdad triangular (3.7.10) en el triángulo ΔOPA, tenemos
$OA < OP + AP \cong OP + PQ \cong OQ \cong OR \Rightarrow OA < OR$, y de la misma forma
$OB < OP + BP \cong OP + PQ \cong OQ \cong OR \Rightarrow OB < OR$, por lo tanto los puntos A y B pertenecen al interior de la circunferencia.

b) Sea ahora P un punto de r en el exterior de la circunferencia, es decir, $\overline{OR} < \overline{OP}$. Sea Q el punto de $\overrightarrow{OP}$ tal que $\overline{OQ} \cong \overline{OR}$.
Sean A y B los puntos situados a ambos lados de P tales que $\overline{PA} \cong \overline{PB} \cong \overline{PQ}$.



Entonces, aplicando la desigualdad triangular (3.7.10) en el triángulo ΔOPA,
$\overline{OA}+\overline{AP} > \overline{OP} \Leftrightarrow OA+AP > \overline{OQ}+\overline{PQ} \cong \overline{OQ}+\overline{AP} \Rightarrow \overline{OA} > \overline{OQ} \cong \overline{OR}$, y por tanto el punto P pertenece al exterior de la circunferencia.

4.3.12 Postulado. Postulado de la Intersección Circunferencia-Recta CR.
Toda recta que contenga un punto situado en el interior de una circunferencia se corta con la misma.



4.3.13 Teorema.
Suponiendo el Axioma de Dedekind se cumple el Postulado CR.

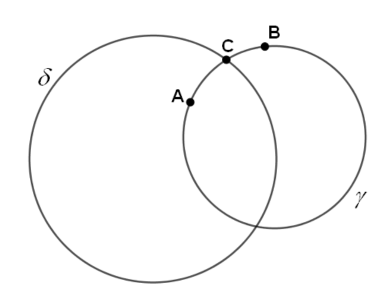
Demostración. Sea ϖ una circunferencia de radio $\overline{OR}$. Sea r una recta con un punto P contenido en el interior de la circunferencia. En todo momento vamos a suponer que la recta no pasa por el centro de la circunferencia, pues en ese caso se demuestra que la recta corta la circunferencia incluso sin necesidad de suponer el Axioma de Dedekind. Marcamos un punto Q en la recta, en un lado cualquiera respecto de P, tal que $\overline{PQ} \cong 2\overline{OR}$. Está claro que el punto Q estará en el exterior de la circunferencia, pues por la desigualdad triangular (3.7.10) aplicada al triángulo ΔOPQ tenemos
$2OR \cong PQ < OP + OQ < OR + OQ \Rightarrow OR < OQ$.
Supongamos que $r \cap \varpi = \varnothing$, y veamos que llegamos a contradicción.
Sea T la proyección ortogonal de O en la recta r.
Sea $\Sigma_1 = op(\overrightarrow{TQ}) \cup (r \cap Int(\omega))$, y sea $\Sigma_2 = \overrightarrow{TQ} \cap Ext(\omega)$.
Veamos que $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ es una partición de la recta.
Está claro que $P \in \Sigma_1$ y $Q \in \Sigma_2$, luego ambos son no vacíos.

$$r = op(\overrightarrow{TQ}) \cup \overrightarrow{TQ} = op(\overrightarrow{TQ}) \cup \overrightarrow{TQ} \cap (\varpi \cup Int(\varpi) \cup Ext(\varpi)) =$$
$$= op(\overrightarrow{TQ}) \cup \overrightarrow{TQ} \cap \varpi \cup \overrightarrow{TQ} \cap Int(\varpi) \cup \overrightarrow{TQ} \cap Ext(\varpi) =$$
$$= op(\overrightarrow{TQ}) \cup \overrightarrow{TQ} \cap Int(\varpi) \cup \overrightarrow{TQ} \cap Ext(\varpi) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

pues suponemos $\overrightarrow{TQ} \cap \varpi = \varnothing$, es decir, su unión es toda la recta.

$op(\overrightarrow{TQ}) \cap \left(\overrightarrow{TQ} \cap Ext(\omega)\right) = \varnothing$ pues $T \in Int(\varpi)$ por 4.3.5.
$\left(r \cap Int(\omega)\right) \cap \left(\overrightarrow{TQ} \cap Ext(\omega)\right) = \varnothing$ pues $Int(\omega) \cap Ext(\omega) = \varnothing$, luego su intersección está vacía.
Veamos que el conjunto Σ_1 es convexo. Si $A, B \in op(\overrightarrow{TQ})$ y $A * C * B$ entonces $C \in op(\overrightarrow{TP})$ por 4.1.4, y por tanto $C \in \Sigma_1$.
Si $A, B \in r \cap Int(\omega)$ y $A * C * B$ entonces $C \in r \cap Int(\omega)$ por 4.3.10, y por tanto $C \in \Sigma_1$.
Luego sólo nos queda ver el caso $A \in op(\overrightarrow{TQ})$, (es decir, $A * T * Q$), y $B \in r \cap Int(\omega)$.
(queda por demostrar)
El conjunto Σ_2 es convexo por 4.3.10.
Ahora aplicamos el Axioma de Dedekind que nos garantiza la existencia de un punto de corte K para esta partición. Veamos que en cualquier caso posible llegamos a contradecir la caracterización 4.2.3b de punto de corte.
Si $K \in \Sigma_2$, aplicando 4.3.11b podré encontrar dos puntos de $A, B \in \Sigma_2$ tales que $A * K * B$, contradiciendo 4.2.3b.
Si $K \in \Sigma_1$, si $K \in r \cap Int(\omega)$, por 4.3.11a podré encontrar dos puntos $A, B \in r \cap Int(\omega)$ tales que $A * K * B$, contradiciendo 4.2.3b, y si $K \in op(\overrightarrow{TQ})$, suponiendo $K \neq T$ seguro que podré encontrar dos puntos $A, B \in op(\overrightarrow{TQ})$ tales que $A * K * B$, contradiciendo nuevamente 4.2.3b. El caso $K = T \in Int(\varpi)$ ya está estudiado.
Luego ni $K \in \Sigma_1$ ni $K \in \Sigma_2$ son posibles, lo cual contradice la hipótesis de que $r = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. La hipótesis $r \cap \varpi = \varnothing$ no puede ser cierta, es decir, la recta y la circunferencia se cortan al menos en un punto.

4.3.14 Postulado. Postulado de la Intersección Circunferencia-Circunferencia CC.
Sean γ y δ dos circunferencias. Si γ contiene un punto del interior de δ y un punto del exterior de δ, entonces γ contiene un punto de δ, es decir, las dos circunferencias se cortan.



4.3.15 Teorema.
Suponiendo el Axioma de Dedekind se cumple el postulado CC.

Demostración.

4.3.16 Corolario. (Elementos 1.1).
Sea un segmento $\overline{AB}$. Entonces, suponiendo el Axioma de Dedekind, existe un punto C tal que ΔABC es un triángulo equilátero.

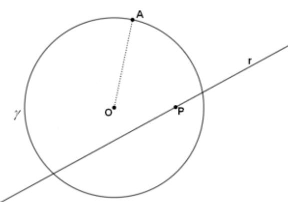
Demostración. Sea γ la circunferencia con centro A y radio $\overline{AB}$. Sea δ la circunferencia con centro en B y radio $\overline{BA}$. Claramente $B \in \gamma$, luego γ contiene un punto del interior de δ. Sea D un punto tal que D*A*B y $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ (axiomas B2 y C2). Entonces $D \in \gamma$. Pero $\overline{DB} > \overline{AB}$, por lo que D está en el exterior de δ.
Aplicando el teorema anterior 4.3.15, existirá un punto C en la intersección de γ y δ.
A, B y C no pueden ser colineales (queda por demostrar)
Así pues, A, B y C formarán un triángulo.
Puesto que $C \in \gamma$, $\overline{AC} \cong \overline{AB}$, pero por otro lado $C \in \delta$, $\overline{BC} \cong \overline{BA}$, es decir, los tres lados son congruentes, y por lo tanto el triángulo será equilátero.

Nota: Este es el primer resultado que Euclides pretende demostrar en sus Elementos, y lo hace suponiendo la existencia de puntos de intersección de dos circunferencias, cosa que no se deduce de los axiomas previos. En el siglo XIX se vio la necesidad de añadir un axioma como el Axioma de Continuidad.

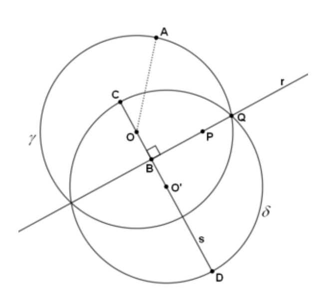
Nota: Un hecho interesante es que si se cumple el Postulado de la intersección Circunferencia-Recta, y se cumple el Postulado de la única paralela, entonces se cumple el Postulado de la intersección Circunferencia-Circunferencia.

4.3.17 Proposición.
En un plano de Hilbert, si se cumple el postulado CC se cumple el postulado CR.

Demostración.
Sea γ una circunferencia con centro O y radio $\overline{OA}$, y sea r una recta conteniendo un punto P del interior de la circunferencia.



Si la recta pasa por el centro de la circunferencia, aplicando el lema 4.3.2b cortará con la misma. Supongamos que no pasa por el centro. Tenemos, pues, un punto $P \in r$, $P \neq O$, $\overline{OP} < \overline{OA}$.
Sea s la recta perpendicular a r por O. Sea B su punto de corte con r.
Sea O' el único punto tal que $O * B * O'$ y $\overline{OB} \cong \overline{BO'}$, y sea δ la circunferencia de centro O' y radio $\overline{OA}$.
Vamos a demostrar que las circunferencias γ y δ se cortan en un punto Q, es decir, que existirá un punto Q tal que $\overline{OQ} \cong \overline{O'Q}$, pues entonces, como la recta r es la mediatriz del segmento $\overline{OO'}$, se deducirá que $Q \in r$ por 3.9.8.
La recta s pasa por el centro O' de la circunferencia δ, luego por 4.3.2b cortará a dicha circunferencia en dos puntos C y D, tal que $C * O' * D$. Renombrándolos si es necesario, podemos suponer que C y O están al mismo lado de la recta respecto de O'.



Claramente $D \in Ext(\gamma)$, pues
$O * O' * D \Rightarrow \overline{OD} > \overline{O'D} \cong \overline{OA} \Rightarrow \overline{OD} > \overline{OA} \Rightarrow D \in Ext(\gamma)$
Sólo falta ver que $C \in Int(\gamma)$, pues entonces, aplicando el Postulado CC, se deducirá la existencia del punto de corte Q que buscamos.
El triángulo ΔOBP es rectángulo, luego, por 3.7.13 tendremos que $\overline{OB} < \overline{OP} < \overline{OA}$, y por tanto $\overline{O'B} \cong \overline{OB} < \overline{OA} \cong \overline{O'C} \Rightarrow \overline{O'B} < \overline{O'C}$, y por tanto O y C son colaterales respecto de r, luego se pueden dar dos casos:
i) $C * O * B$, y entonces

$$\left.\begin{matrix} C * O * B \\ O * B * O' \end{matrix}\right\} \Rightarrow C * O * B * O' \Rightarrow C * O * O' \Rightarrow \overline{CO} < \overline{CO'} \cong \overline{OA} \Rightarrow C \in Int(\delta)$$

ii) $O * C * B$, y entonces $\overline{OC} < \overline{OB} < \overline{OA} \Rightarrow C \in Int(\gamma)$

Fuente: "Geometry: Euclid and Beyond" (Hasrtshorne)

4.4 El Axioma de Arquímedes.

4.4.1 Definición. El Axioma de Arquímedes. (Elementos 5, definición 4; H5.1)
Dada una semirrecta $r = \overrightarrow{AB}$ y un punto $C \in r$ cualquiera, existirá un n tal que $B_n = C$ o $A * C * B_n$.

B_0 B_1 B_2 B_3 B_4 C B_5

Con otras palabras, multiplicando segmentos, por muy pequeños que estos sean, podremos siempre obtener segmentos tan grandes como queramos.

Nota: El Axioma de Arquímedes en Los Elementos.
El Axioma de Arquímedes aparece como definición número 4 del Libro 5, dentro del contexto de las magnitudes:

Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

Diremos dos magnitudes guardan razón entre sí cuando cada una de ellas, siendo multiplicada, pueda exceder la otra.

4.4.2 Teorema.
Si se cumple el Axioma de Dedekind entonces también se cumple el Axioma de Arquímedes.

Demostración. Supongamos que no es cierto.
Utilizaremos la versión del Axioma de Dedekind para semirrectas (4.2.6).
Sea Σ_1 el conjunto definido por A y todos los puntos $P \in r$ para los cuales el Postulado de Arquímedes se cumple, es decir, existe un n tal que $n \bullet P = C$ o $A * C * n \bullet P$, y sea $\Sigma_2 = r - \Sigma_1$.
Veamos que $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ es una partición de Dedekind de r.
Σ_1 no es un conjunto vacío, pues $A \in \Sigma_1$.
Σ_2 no es un conjunto vacío pues suponemos que no se cumple el Postulado de Arquímedes.
Claramente $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = r$ y $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$.
Σ_1 es un conjunto convexo: Sean $P, Q \in \Sigma_1$, es decir, existen m y n tales que $n \bullet \overline{AP} > \overline{AC}$ y $m \bullet \overline{AQ} > \overline{AC}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $m > n$.
Entonces, para todo R tal que $P * R * Q$, tendremos $m \bullet \overline{AP} * m \bullet \overline{AR} * m \bullet \overline{AQ}$ y por tanto $\overline{AC} < n \bullet \overline{AP} < m \bullet \overline{AP}$, y por tanto $P \in \Sigma_1$.

Σ_2 es un conjunto convexo. Sean $P, Q \in \Sigma_2$, y sea R tal que $P * R * Q$. Supongamos que $R \in \Sigma_1$, es decir, que existe un n tal que $n \bullet \overline{AR} > \overline{AC}$.
Entonces $P * R * Q \Rightarrow n \bullet \overline{AP} < n \bullet \overline{AR} < n \bullet \overline{AQ}$ y por tanto $\overline{AC} < n \bullet \overline{AR} < n \bullet \overline{AQ}$, luego $Q \in \Sigma_1$ contradiciendo la hipótesis. Así pues, $R \in \Sigma_2$.

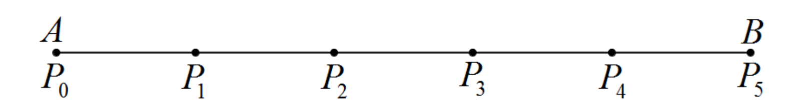
Al suponer que se cumple el Axioma de Dedekind lo podemos aplicar a nuestra partición $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ para garantizar un punto de corte $O \in r$. Vamos a ver que no se puede dar ni $O \in \Sigma_1$ ni $O \in \Sigma_2$, contradiciendo la hipótesis inicial.
El caso $O = A$ no puede ocurrir.
Si $O \in \Sigma_1$, tomando el punto A y cualquier punto $Q \notin \Sigma_2 \neq \varnothing$, por definición de punto de corte, tendremos $A * O * Q$, pero $O \in \Sigma_1$ y $A * O * Q$ implica $Q \in \Sigma_1$ llegando a contradicción.
Si $O \in \Sigma_2$, tomando cualquier punto $Q \in \Sigma_1 \neq \varnothing$, y el punto $R = 2 \bullet O \in \Sigma_2$, tendremos $Q * O * R$, pero $Q \in \Sigma_1$ y $Q * O * R$ implica $O \in \Sigma_1$ llegando a contradicción.

Observación.
En 13.3 estudiaremos la existencia de planos de Hilbert no arquimedianos, es decir, en los que no se cumple el Axioma de Arquímedes.

4.5 División de segmentos.

4.5.1 Postulado. Postulado de la división de segmentos.

El **Postulado de la división de segmentos** afirma que dado un segmento $\overline{AB}$ cualquiera y un número natural $n>1$, podemos determinar los puntos del segmento $\{ A=P_0, P_1, P_2, ..., P_n = B \}$ tales que $\overline{P_k P_{k+1}} \cong \overline{AP_1}$,
es decir, podemos dividir dicho segmento en n partes iguales.



En 8.2.12 veremos que en un plano euclídeo se cumple siempre este postulado, pero como ya comentamos en 3.3.6, este postulado no se cumple dentro de un plano de Hilbert, pues es necesario añadir el Axioma de Continuidad.

4.5.2 Proposición. Existencia y unicidad de los "puntos diádicos".

Dada una semirrecta $\overrightarrow{AB}$, y cualquier natural $n>1$, existirá un único punto P tal que $A*P*B$ y $2^n \cdot P = B$. A este punto le denotaremos por $\frac{B}{2^n}$.

Demostración. Sea $\frac{B}{2}$ el punto medio de $\overline{AB}$. En 3.9.5 vimos su existencia y unicidad.

Está claro que $2 \cdot \frac{B}{2} = B$ puesto que $\overline{A\frac{B}{2}} \cong \overline{\frac{B}{2}B}$.

Sea $\frac{B}{4}$ el punto medio del segmento $\overline{A\frac{B}{2}}$. Está claro que $4 \cdot \frac{B}{4} = 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{B}{4} \right) = 2 \cdot \frac{B}{2} = B$.

De esta manera podemos ir definiendo los puntos de la forma $\frac{B}{2^n}$ para todo n natural.

Por inducción sobre n demostramos que siempre $A * \frac{B}{2^n} * B$ y estos puntos cumplen $2^n \cdot \frac{B}{2^n} = B$.

4.5.3 Proposición.

Dada una semirrecta $\overrightarrow{AB}$, y cualquier natural $n>1$, existirá un punto $P \in \overrightarrow{AB}$ tal que $A*(n \cdot P)*B$.

Demostración. Para dicho n dado tomemos $k \in IN$ tal que $2^k > n$ (su existencia es un resultado conocido de la aritmética).

Entonces tomando $P = \frac{B}{2^k}$, se cumplirá $n < 2^k \Rightarrow n \cdot P < 2^k \cdot P = 2^k \cdot \frac{B}{2^k} = B$.

4.5.4 Corolario.
Dada una semirrecta $\overrightarrow{AB}$, y cualquier natural $n > 1$,
a) Si un punto $C \in \overrightarrow{AB}$ cumple $n \cdot C < B$ entonces existirá otro punto D, con $A * C * D$ tal que $n \cdot D < B$.
b) Si un punto $C \in \overrightarrow{AB}$ cumple $B < n \cdot C$ entonces existirá otro punto D, con $A * D * C$ tal que $n \cdot D < B$.

Demostración. a) Puesto que $n \cdot C < B$ podemos considerar el segmento $\overline{AB} - \overline{An \cdot C}$. Aplicando 4.5.3 garantizamos la existencia de un punto P en dicho segmento tal que $n \cdot P < B - n \cdot C$. Sea $D = C + P$. Entonces
$n \cdot D = n \cdot (C + P) = n \cdot C + n \cdot P < n \cdot C + B - n \cdot C = B$.
b) Puesto que $B < n \cdot C$ podemos considerar el segmento $\overline{An \cdot C} - \overline{AB}$. Aplicando 4.5.3 garantizamos la existencia de un punto P en dicho segmento tal que $n \cdot P < n \cdot C - B$.
Tomando ahora $D = C - P$, se cumple
$n \cdot D = n \cdot (C - P) = n \cdot C - n \cdot P > n \cdot C - n \cdot C + B = B$.

4.5.5 Proposición. División de segmentos.
Si se cumple el Axioma de Dedekind, dado un segmento $\overline{AB}$ y cualquier número natural $n > 1$, existirá un único punto C tal que $A * C * B$ y $n \cdot \overline{AC} = \overline{AB}$.

Demostración.
Separamos los puntos de la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ en dos grupos:

Los que '*no llegan*': $\Sigma_{<} = \left\{ P \in \overrightarrow{AB} \mid A * n \cdot P * B \right\} \cup \{A\}$,
y los que '*llegan o se pasan*': $\Sigma_{\geq} = \left\{ P \in \overrightarrow{AB} \mid n \cdot P = B \vee A * B * n \cdot P \right\}$

Primera parte: $\{\Sigma_{<}, \Sigma_{\geq}\}$ es una partición de r.
- Los conjuntos $\Sigma_{<}$ y $\Sigma_{\geq}$ son disjuntos: Si $P \in \overrightarrow{AB}$ y $A * n \cdot P * B$ entonces no se puede dar $n \cdot P = B$ ni $A * B * n \cdot P$, por los axiomas B1c y B2.

- La unión de $\Sigma_{<}$ y $\Sigma_{\geq}$ es todo $\overrightarrow{AB}$:
Sea $P \in \overrightarrow{AB}$. Comparando los tres puntos $A, n \cdot P, B$, puede ocurrir que $n \cdot P = B$, en cuyo caso $P \in \Sigma_{\geq}$, o que $n \cdot P \neq B$, en cuyo caso son tres puntos diferentes de $\overrightarrow{AB}$, y por tanto sólo se puede dar uno de los tres casos siguientes:
a) $A * n \cdot P * B$, y por tanto $P \in \Sigma_{<}$.
b) $A * B * n \cdot P$, y por tanto $P \in \Sigma_{\geq}$.
c) $B * A * n \cdot P$, que no puede suceder, pues $B * A * n \cdot P \Rightarrow B \notin \overrightarrow{A(n \cdot P)} = \overrightarrow{AB}$, absurdo.

- El conjunto $\Sigma_{<}$ no está vacío, pues $A \in \Sigma_{<}$ (o aplicamos la proposición 4.5.3).

- El conjunto $\Sigma_{\geq}$ no está vacío, pues $B \in \Sigma_{\geq}$. Efectivamente, $n \cdot B > 1 \cdot B = B$.

Segunda parte: Los conjuntos $\Sigma_<$ y $\Sigma_\geq$ son convexos (es decir, es una partición de Dedekind de r).

Supongamos que $Q_1 * Q_2 * Q_3$ para ciertos puntos $Q_1, Q_3 \in \Sigma_<$.
Puesto que A es el extremo de la semirrecta r, no se puede dar el caso $Q_1 * A * Q_3$, y por tanto o bien $A * Q_1 * Q_3$ o bien $A * Q_3 * Q_1$. Renombrando los puntos si hace falta podemos suponer $A * Q_1 * Q_3$, y por lo tanto $A * Q_1 * Q_2 * Q_3$.
Así pues, $\overline{AQ_2} < \overline{AQ_3}$, y por tanto $n \cdot Q_2 < n \cdot Q_3$
Puesto que $Q_3 \in \Sigma_<$ se cumple que $A * n * Q_3 * B_m$, y por tanto $n \cdot Q_3 < n \cdot B_m$, luego $n \cdot Q_2 < n \cdot Q_3 < n \cdot B_m$, es decir, $Q_2 \in \Sigma_<$.
La convexidad de $\Sigma_\geq$ se demuestra de forma similar.

Tercera parte: Aplicamos el **Axioma de Dedekind**, que nos garantiza la existencia de un único punto de corte para esta partición, es decir, existirá un único $P \in \overrightarrow{AB}$ que está entre los dos conjuntos $\Sigma_<$ y $\Sigma_\geq$. Este es el punto C que buscamos.

Efectivamente, supongamos que $n \cdot C < B$. Entonces, aplicando 4.5.4 podemos encontrar otro punto C' tal que $C < C'$ y $n \cdot C' < B$, es decir $C' \in \Sigma_<$. Luego $A * C * C'$ con $A, C' \in \Sigma_<$, contradiciendo 4.2.3b.

De la misma manera tampoco puede suceder $B < n \cdot C$, pues entonces podríamos encontrar un C' tal que $C' < C$ y $B < n \cdot C'$, es decir, $C' < C < B$ con $C', B \in \Sigma_\geq$, contradiciendo 4.2.3b.

Así pues, llegamos a $n \cdot C = B$, tal y como queríamos ver.

4.6 La distancia en una semirrecta.

4.6.1 Teorema. La función distancia en una semirrecta.
Sea $\overrightarrow{AB}$ una semirrecta. Al punto B le llamaremos “**punto unidad**”.

Existirá una única función

$$\Phi : [0,+\infty) \to \overrightarrow{AB}$$

que cumpla las siguientes cinco condiciones:

1) $\Phi(0) = A$.
2) $\Phi(1) = B$.
3) Ser biyectiva.
4) Si $0 < x < y \Leftrightarrow \Phi(0) * \Phi(x) * \Phi(y)$
5) $\forall n \in IN, \forall x \in [0,+\infty),\ n \cdot \Phi(x) = \Phi(n\,x)$

La función Φ dependerá, por lo tanto, única y exclusivamente del punto B fijado. Vamos a construir esta función por partes, primero para los números naturales, luego para los racionales y finalmente para los irracionales, utilizando en cada momento la función ya construida en la fase anterior.

Primera parte. Construcción de Φ para números naturales.

Es la función definida en 4.4.1:

$$\forall n \in IN, \Phi(k) = k \cdot B = B_k$$

Por la proposición 3.3.4, esta función es inyectiva y cumple la condición 4.
Por la proposición 3.3.5, se cumple la condición 5:

$$\forall n, m \in IN, n \cdot \Phi(m) = (B_m)_n = B_{m \cdot n} = \Phi(m \cdot n)$$

Segunda parte. Construcción de Φ para números racionales.
Escribimos $x = \frac{m}{n}$ para m y n enteros positivos. Queremos que la imagen $P = \Phi\left(\frac{m}{n}\right)$ cumpla la condición $n \cdot \Phi\left(\frac{m}{n}\right) = \Phi\left(n\frac{m}{n}\right) = \Phi(m) = m \cdot \Phi(1) = m \cdot B$.
Vamos a ver que la condición $n \cdot P = m \cdot B$ determinará totalmente el punto P. Este punto P es el determinado en la proposición 4.5.5.

La función así definida cumple las condiciones requeridas.

- La función Φ es inyectiva.

- El punto $\Phi\left(\frac{m}{n}\right)$ cumple la condición fundamental: $n \cdot \Phi\left(\frac{m}{n}\right) = \Phi(m)$

- La función Φ cumple la condición (5): $\forall n \in IN, \forall x \in Q, n \cdot \Phi(x) = \Phi(n\,x)$

- La función Φ cumple la condición (4): $0 < x < y \Rightarrow \Phi(0) * \Phi(x) * \Phi(y)$

Supongamos $\frac{n}{m} < \frac{n'}{m'} \Leftrightarrow n \cdot m' < n' \cdot m \Rightarrow \Phi(n \cdot m') < \Phi(n' \cdot m)$
Por otro lado, como sabemos que cumple la condición 4, tenemos:

$$(m \cdot m') \cdot \Phi\left(\frac{n}{m}\right) = \Phi\left((m \cdot m')\frac{n}{m}\right) = \Phi(n \cdot m')$$

$$(m \cdot m') \cdot \Phi\left(\frac{n'}{m'}\right) = \Phi\left((m \cdot m')\frac{n'}{m'}\right) = \Phi(n \cdot m')$$

Luego

$$\Phi(n \cdot m') < \Phi(n' \cdot m) \Rightarrow (m \cdot m') \cdot \Phi\left(\frac{n}{m}\right) < (m \cdot m') \cdot \Phi\left(\frac{n'}{m'}\right) \Rightarrow \Phi\left(\frac{n}{m}\right) < \Phi\left(\frac{n'}{m'}\right)$$

Y por tanto:

$$(m \cdot m') \cdot \Phi\left(\frac{n}{m}\right) < (m \cdot m') \cdot \Phi\left(\frac{n'}{m'}\right) \Rightarrow \Phi\left(\frac{n}{m}\right) < \Phi\left(\frac{n'}{m'}\right)$$

Tercera parte. Construcción de Φ para números irracionales.

Sea x un número irracional positivo. Definimos

$$S_{<x} = \{\Phi(m/n) \mid m/n < x\}\ ,\ S_{\geq x} = \{\Phi(m/n) \mid m/n \geq x\}$$

Puesto que quedarán huecos entre los elementos de $S_{<x}$, definimos

$$\Sigma_{<x} = S_{<x} \cup \{P \in \overrightarrow{AB} \mid \quad Q * P * R \quad con \quad Q, R \in S_{<x}\}$$

y su complementario: $\Sigma_{\geq x} = \overrightarrow{AB} - \Sigma_{<x}$.

$\{\Sigma_{<x}, \Sigma_{\geq x}\}$ es una partición de r:
- Los conjuntos $\Sigma_{<x}$ y $\Sigma_{\geq x}$ son disjuntos y su unión es todo r por construcción.

- Observamos que $S_{\geq x} \subset \Sigma_{\geq x}$:
Si $P \in S_{\geq x} \Leftrightarrow P = \Phi\left(\frac{m}{n}\right), \frac{m}{n} \geq x$, luego claramente $P \notin S_{<x}$.
Si existen $Q, R \in S_{<x}$ tales que $Q * P * R$, tendríamos
$Q = \Phi\left(\frac{m'}{n'}\right), \frac{m'}{n'} < x$ y $R = \Phi\left(\frac{m''}{n''}\right), \frac{m''}{n''} < x$, y puesto que Φ conserva el orden,
$\Phi\left(\frac{m'}{n'}\right) * \Phi\left(\frac{m}{n}\right) * \Phi\left(\frac{m''}{n''}\right) \Rightarrow \frac{m'}{n'} < \frac{m}{n} < \frac{m''}{n''} < x \Rightarrow \frac{m}{n} < x$ llegando a contradicción.
Luego $P \notin \Sigma_{<x}$, y por tanto $P \in S_{\geq x}$.

- El conjunto $\Sigma_{<x}$ no está vacío.
Utilizamos la propiedad de la densidad de Q en IR. Para todo $x > 0$ irracional existirá un x' racional $0 < x' < x$. Claramente $\Phi(x') \in S_{<x}$.

- El conjunto $\Sigma_{\geq x}$ no está vacío.
Nuevamente utilizamos la densidad de Q en IR. Para todo $x > 0$ irracional basta tomar un x' natural tal que $x < x'$. Claramente $\Phi(x) \in S_{\geq x}$.

Veamos ahora que los conjuntos $\Sigma_{<x}$ y $\Sigma_{\geq x}$ son convexos (es decir, es una partición de Dedekind de $\overrightarrow{AB}$)

- El conjunto $\Sigma_{<x}$ es convexo.
Sean $P, Q \in \Sigma_{<x}$ y supongamos que $P * R * Q$. Queremos ver que $R \in \Sigma_{<x}$.
Supongamos en primer lugar que $P, Q \in S_{<x}$. Entonces claramente por construcción tenemos que $R \in \Sigma_{<x}$.
Supongamos que $P \in S_{<x}$ pero $Q \in \Sigma_{<x} - S_{<x}$. Existirán $Q', Q'' \in S_{<x}$ tales que $Q' * Q * Q''$, luego $P * R * Q''$ y por tanto $R \in \Sigma_{<x}$.
Supongamos que $Q \in S_{<x}$ pero $P \in \Sigma_{<x} - S_{<x}$. Existirán $P', P'' \in S_{<x}$ tales que $P' * P * P''$, luego $P' * R * Q$ y por tanto $R \in \Sigma_{<x}$.
El caso $P, Q \in \Sigma_{<x} - S_{<x}$ se demuestra de forma similar.

- El conjunto $\Sigma_{\geq x}$ es convexo.

Aplicamos el Axioma de Dedekind, que nos garantiza la existencia de un único punto de corte para esta partición, es decir, existirá un único $P \in \overrightarrow{AB}$ que está entre los dos conjuntos $\Sigma_{<x}$ y $\Sigma_{\geq x}$. Este punto será la imagen $\Phi(x)$.

La función así definida cumple las condiciones requeridas.

- La función Φ es inyectiva.
Esto ya ha sido probado para los números racionales. Supongamos ahora que tenemos $x < x'$ dos números irracionales diferentes. Por la densidad de Q en IR, existirá un y racional tal que $x < y < x'$, por lo tanto $\Phi(x) * \Phi(y) * \Phi(x')$ de donde deducimos que $\Phi(x) \neq \Phi(x')$.

- La función Φ cumple la condición (4): $0 < x' < x \Rightarrow \Phi(0) * \Phi(x') * \Phi(x)$
En primer lugar, supongamos que x' es racional y x es irracional.
$0 < x' < x \Rightarrow \Phi(x') \in S_{<x} \subset \Sigma_{<x} \Rightarrow B_0 * \Phi(x') * \Phi(y)$
Supongamos que ambos son irracionales:
Por densidad de Q en IR, existirá un racional x'' cumpliendo $0 < x' < x'' < x$, luego
$P_0 * \Phi(x') * \Phi(x'') * \Phi(x) \Rightarrow P_0 * \Phi(x') * \Phi(x)$

- La función Φ cumple la condición (5): $\forall n \in IN, \forall x \in IR, n \bullet \Phi(x) = \Phi(n\,x)$

- La función Φ es suprayectiva.
Sea $P \in \overrightarrow{AB}$. Si $P = \Phi(m/n)$ para cierto racional m/n, claramente P pertenece a la imagen de Φ.
Supongamos lo contrario, que no es imagen de ningún racional.
Definimos los siguientes conjuntos:

$$S_{<P} = \{0\} \cup \{x \in Q \mid B_0 * \Phi(x) * P\} \ , \ S_{>P} = \{x \in Q \mid B_0 * P * \Phi(x)\}$$

El conjunto $S_{<P}$ claramente no está vacío, pues $0 \in S_{<P}$.

El conjunto $S_{>P}$ no está vacío, pues o bien $B_0 * P * B_1$, en cuyo caso $1 \in S_{>P}$, o por el Postulado de Arquímedes, existirá un $n \in IN$ tal que $B_0 * P * B_n$, y por tanto $n \in S_{>P}$.

Puesto que la función Φ mantiene el orden, todo elemento de $S_{<P}$ será menor que cualquier elemento de $S_{>P}$, de lo que se deduce que $\{S_{<P}, S_{>P}\}$ es una partición de Dedekind, por lo que tendrá un punto de corte $y \in IR$, que estará entre los dos conjuntos. Veamos que $\Phi(y) = P$.

Sea $\Sigma_{<P}$ la imagen de $S_{<P}$ junto con todos los puntos Q de r tales que R*Q*S para ciertos $R, Q \in \Phi(S_{<P})$. Sea $\Sigma_{\geq P} = \overrightarrow{AB} - \Sigma_{<P}$.
Entonces se demuestra que $\Phi(y) = P$.

4.7 Otros axiomas de continuidad.

4.7.1 Definición. El Axioma de Continuidad de Weierstrass.
Sea $A_1, A_2, A_3,...$ una sucesión de puntos colineales y sea B un punto de la recta tales que $A_k * A_{k+1} * B$ para todo k.
Entonces existirá un punto K tal que:
a) O bien $K = B$ o bien $A_k * K * B$ para todo k.
b) Y además, para cualquier otro punto X de la recta tal que $A_k * X * B$ para todo k, se cumple que $A_k * K * X * B$ para todo k.

4.7.2 Proposición.
El axioma de Dedekind implica el axioma de Weierstrass.

Demostración. Sea r la recta que contiene a todos los puntos involucrados.
Definimos los dos conjuntos $\Sigma_<$ y $\Sigma_\geq$ de la siguiente manera:
$\Sigma_< = \{P \in r \mid P * A_1 * B\} \cup \{A_1\} \cup \{P \in r \mid \exists i \geq 1, A_1 * P * A_i\}$ y $\Sigma_\geq = r - \Sigma_<$
Se demuestra que $\Sigma_\geq = \{P \in r \mid A_1 * A_i * P \; \forall i \geq 2\}$
Se demuestra que $\{\Sigma_<, \Sigma_\geq\}$ es una partición de Dedekind de la recta r.
Puesto que por hipótesis se cumple el Axioma de Dedekind, tendrá asociada un punto de corte al que llamaremos K.
Se demuestra que K tiene que pertenecer a $\Sigma_\geq$, luego o bien es B o bien se cumple $A_k * K * B$ para todo k, es decir, se cumple la condición a) del axioma de Weierstrass.

Para demostrar el apartado b, supongamos que el punto X cumple $A_k * X * B$ para todo k. Entonces X debe pertenecer a $\Sigma_\geq$, y por tanto $K * X * B$, pues K no puede estar entre dos puntos de $\Sigma_\geq$. Luego $A_k * K * X * B$ por 2.3.5.

4.7.3 Proposición.
El axioma de Weierstrass implica el axioma de Arquímedes.

Demostración.

4.7.4 Definición. El Axioma de Cantor.
Existe al menos un segmento $\overline{A_1 B_1}$ tal que, para toda sucesión de segmentos encajados

$$A_1 * A_k * B_k * B_1, \; k = 2, 3, ...$$

Existirá un punto K tal que $A_k * K * B_k$ para todo k.

4.7.5 Proposición.
El axioma de Weierstrass implica el axioma de Cantor.

Demostración.

4.7.6 Proposición.
Los axiomas de Arquímedes y de Cantor juntos implican el axioma de Dedekind.
Demostración.

5 Medida.

Es posible medir el progreso de las ciencias naturales, o de una rama de la ciencia natural, en función del grado en el que el número ha sido introducido. Sin embargo, si la ciencia no quiere caer presa de un formalismo estéril (*unfruchtbarer Formalismus*), entonces deberá reflexionar sobre sí misma en una fase posterior de su desarrollo y, por lo menos, examinar cómo se ha logrado la introducción del número.
Hilbert, 1898.

En el próximo tema estudiaremos el Postulado de la única paralela y sus equivalentes, y con ellos llegará el plano euclídeo y la semejanza. Pero este trayecto lo recorreremos con vehículos modernos: Supondremos la existencia de IR y de la posibilidad de medir segmentos, ángulos y áreas. Y si podemos medir podemos dividir medidas (pues son números), y por tanto definir razones entre segmentos, ángulos o áreas (en realidad estamos trabajando con razones de medidas de segmentos, ángulos o áreas).

Pero los griegos no disponían de estas modernidades. Los números reales eran problemáticos, pues los pitagóricos del siglo IV AC habían descubierto las magnitudes inconmensurables (es decir, los números irracionales), por lo que tuvieron que desarrollar toda una teoría de las magnitudes, que son “cosas” con las que obtener razones y proporciones pero evitando los números reales. El Libro 5 de Los Elementos es especial y está dedicado íntegramente al estudio de las “magnitudes”.

5.1 Longitud de segmentos.

5.1.1 Definición. Longitud de segmentos.

Sea $r = \overrightarrow{P_0P_1}$ una semirrecta en la que fijamos arbitrariamente un punto $P_1 \in r$, al que llamaremos “**punto unidad**”.
En el apartado anterior hemos determinado la única biyección Φ entre los puntos de la semirrecta y $IR^+ = [0,+\infty)$.

Sea ahora un segmento $\overline{AB}$ cualquiera. El Axioma C2 nos garantiza que existirá un único punto $P \in r$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{P_0P}$. Definiremos la longitud del segmento $\overline{AB}$ como $\Phi^{-1}(P)$:

$$\left|\overline{AB}\right| = \Phi^{-1}(P)$$

5.1.2 Proposición.

a) $\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$

b) $\overline{AB} < \overline{CD} \Leftrightarrow \left|\overline{AB}\right| < \left|\overline{CD}\right|$

Demostración. Son resultados que se deducen directamente de la definición y de las propiedades de Φ.
a) Sean dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y supongamos que $\overline{AB} \cong \overline{P_0P}$ y $\overline{CD} \cong \overline{P_0P'}$ para ciertos puntos $P, P' \in r$. $\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow P = P' \Leftrightarrow \Phi^{-1}(P) = \Phi^{-1}(P')$
b) $\overline{AB} < \overline{CD} \Leftrightarrow P_0 * P * P' \Leftrightarrow \Phi^{-1}(P_0) < \Phi^{-1}(P) < \Phi^{-1}(P') \Leftrightarrow 0 < \left|\overline{AB}\right| < \left|\overline{CD}\right|$

5.1.3 Lema.
Si $P_0 * P * Q$ entonces $\left|\overline{PQ}\right| = \Phi^{-1}(Q) - \Phi^{-1}(P)$.

Demostración.
Primera parte: El resultado es cierto para puntos enteros:
Supongamos que $P = B_n$ y $Q = B_m$, con $n > m$.
$\Phi^{-1}(Q) = \Phi^{-1}(B_m) = m$, $\Phi^{-1}(P) = \Phi^{-1}(B_n) = n$
$\overline{PQ} = \overline{B_m B_n} \cong \overline{B_0 B_{n-m}} \Rightarrow \left|\overline{PQ}\right| = n - m = \Phi^{-1}(P) - \Phi^{-1}(Q)$

Segunda parte: El resultado es cierto para puntos racionales:
Supongamos que $P = \Phi(n/m)$ y $Q = \Phi(n'/m')$, con $n/m > n'/m'$.
$\Phi^{-1}(Q) = n'/m'$, $\Phi^{-1}(P) = n/m$
$n/m < n'/m' \Leftrightarrow n \cdot m' < n' \cdot m \Leftrightarrow P_0 * \Phi(n \cdot m') * \Phi(n' \cdot m)$
Aplicando la primera parte,
$\left|\overline{\Phi(n' \cdot m)\, \Phi(n \cdot m')}\right| = n \cdot m' - n' \cdot m \Rightarrow$

$$\frac{\left|\overline{\Phi(n' \cdot m)\, \Phi(n \cdot m')}\right|}{m \cdot m'} = \frac{n \cdot m' - n' \cdot m}{m \cdot m'} = \frac{n \cdot m'}{m \cdot m'} - \frac{n' \cdot m}{m \cdot m'} = \frac{n}{m} - \frac{n'}{m'}$$

$P = \Phi(n/m) \Leftrightarrow m \bullet P = \Phi(n)$
$Q = \Phi(n'/m') \Leftrightarrow m' \bullet Q = \Phi(n')$
$\Phi(n' \cdot m) = m \bullet \Phi(n') = m \bullet m' \bullet Q = (m \cdot m') \bullet Q$
$\Phi(n \cdot m') = m' \bullet \Phi(n) = m' \bullet m \bullet P = (m \cdot m') \bullet P$

$$\frac{\left|\overline{\Phi(n' \cdot m)\, \Phi(n \cdot m')}\right|}{m \cdot m'} = \frac{\left|\overline{(m \cdot m') \bullet Q\ (m \cdot m') \bullet P}\right|}{m \cdot m'} = \frac{(m \cdot m')\left|\overline{PQ}\right|}{m \cdot m'} = \overline{PQ}$$

Donde hemos utilizado, sin demostrarla, la propiedad $\left|\overline{k \bullet Q\ k \bullet P}\right| = k\left|\overline{PQ}\right|$

Tercera parte: El resultado es cierto para números reales en general: (queda por demostrar)

5.1.4 Conclusión. Longitud de segmentos.
Sea $\overline{OI}$ un segmento fijo llamado segmento unidad. Entonces existe una única forma de asignar a cada segmento $\overline{AB}$ un número real positivo $\left|\overline{AB}\right| \in IR$, llamado **longitud** de $\overline{AB}$, tal que:

L1) A*B*C si y sólo si $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right|$.

L2) $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$ si y sólo si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

L3) $\left|\overline{OI}\right| = 1$.

Y además, dicha medida cumplirá:

L4) $\left|\overline{AB}\right| < \left|\overline{CD}\right|$ si y sólo si $\overline{AB} < \overline{CD}$.

L5) Para cada $x \in IR^+$, existe un segmento $\overline{AB}$ tal que $\left|\overline{AB}\right| = x$.

5.1.5 Definición. Espacio métrico.
Dado cualquier conjunto S, una **métrica en S** es una función $d: S \times S \to IR$ que cumple las siguientes propiedades:

a) $d(x,y) \geq 0$ y $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
b) $d(x,y) = d(y,x)$
c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Por ejemplo, la función $d(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$ es una métrica, llamada "métrica discreta".

5.1.6 Proposición.
Dado un plano Ω dotado de una longitud de segmentos $\left|\overline{AB}\right|$ como en 5.1.4, la función

$$d: \Omega \times \Omega \to IR$$
$$(P,Q) \mapsto \left|\overline{PQ}\right|$$

Es una métrica en el plano.

5.2 Amplitud de ángulos.

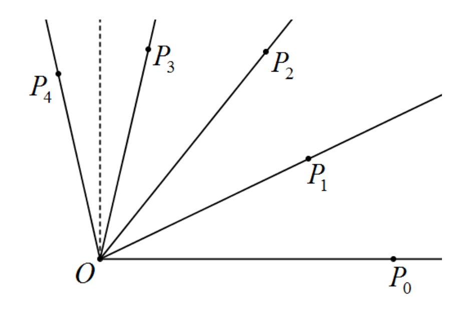
5.2.1 Definición. Múltiples de un ángulo.

Dado un ángulo agudo $\angle P_0OP_1$, el Axioma C5 garantiza la existencia de una semirrecta $\overrightarrow{OP_2}$, con P_0 y P_2 en lados opuestos respecto de $\overleftrightarrow{OP_1}$, tal que $\angle P_0OP_1 \cong \angle P_1OP_2$.
Mediante este procedimiento podemos decir que hemos duplicado el ángulo $\angle P_0OP_1$:

$$\angle P_0OP_2 = 2 \cdot \angle P_0OP_1$$

Puede suceder que $\angle P_0OP_2$ sea agudo, recto o obtuso.
Si el ángulo $\angle P_0OP_2$ sigue siendo agudo, podemos repetir el procedimiento anterior con el punto P_1:
Aplicamos el Axioma C5 para obtener una semirrecta $\overrightarrow{OP_3}$, con P_1 y P_3 en lados opuestos respecto de $\overleftrightarrow{OP_2}$, tal que $\angle P_1OP_2 \cong \angle P_2OP_3$, y diremos
$\angle P_0OP_3 = 3 \cdot \angle P_0OP_1$

Este procedimiento lo podemos continuar realizando mientras vayamos obteniendo ángulos agudos.



Tomemos ahora un ángulo recto $\angle P_0OP_{90}$ y un número entero n.
Para cada punto $P \in \overline{P_0P_{90}}$, $n\angle P_0OP$ será agudo o no. Definimos

$$S_< = \left\{ P \in \overline{P_0P_{90}} \mid n\angle P_0OP \text{ es agudo} \right\}$$
$$S_\geq = \overline{P_0P_{90}} - S_<$$

Extendemos la partición $\overline{P_0P_{90}} = S_< \cup S_\geq$ a toda la recta. Sean

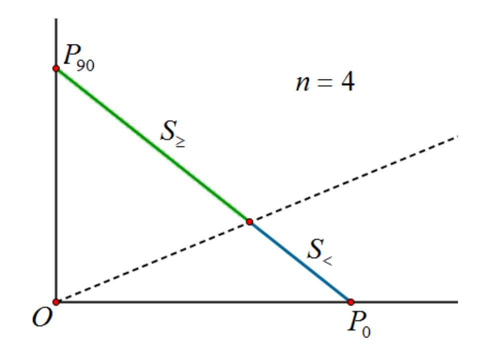
$$\Sigma_< = S_< \cup op\left(\overrightarrow{P_0P_{90}}\right)$$
$$\Sigma_\geq = S_\geq \cup op\left(\overrightarrow{P_{90}P_0}\right)$$

$\Sigma_<$ y $\Sigma_\geq$ determinan una partición de la recta $\overleftrightarrow{P_0P_{90}}$, cumpliendo el Axioma de Dedekind, por lo que existirá un único punto P entre $\Sigma_<$ y $\Sigma_\geq$.

Así pues, hemos determinado una función

$$\sigma : IN \to \overline{P_0P_{90}}$$

Definimos $P_1 = \sigma(90)$.



5.2.2 Teorema. Amplitud de ángulos.
Existe una única forma de asignar a cada ángulo α un número real positivo $|\alpha|$, llamado **amplitud** de α, tal que:

A1) Si D es un punto del interior de $\angle BAC$, $|\angle BAC| = |\angle BAD| + |\angle DAC|$

A2) $|\alpha| = |\beta|$ si y sólo si $\alpha \cong \beta$

A3) α es un ángulo recto si y sólo si $|\alpha| = 90$

Y además, dicha amplitud cumplirá:

A4) $|\alpha| < |\beta|$ si y sólo si $\alpha < \beta$

A5) $|\alpha| < 180$ para todo ángulo α.

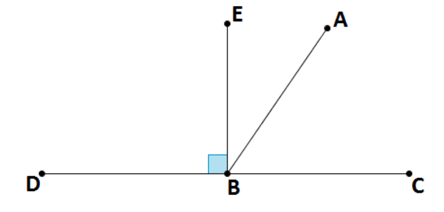
A6) Si α y β son suplementarios, entonces $|\alpha| + |\beta| = 180$.

A7) para cualquier $0 < x < 180$ existirá un ángulo α tal que $|\alpha| = x$

Observación: La condición A6 es equivalente a la Proposición Elementos I.13, que se detalla a continuación.

5.2.3 Proposición. (Elementos 1.13)
Dos ángulos suplementarios equivalen a dos rectos.

Demostración que se encuentra en Elementos I.13:
Sean tres puntos $D * B * C$ y una semirrecta $\overrightarrow{BA}$, determinando los ángulos suplementarios $\angle ABC$ y $\angle ABD$.

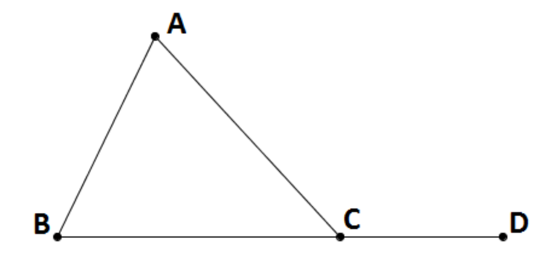


Si $\angle ABC \cong \angle ABD$, ambos son rectos y el teorema se cumple trivialmente.
Supongamos pues que $\angle ABC$ es agudo (En caso contrario $\angle ABD$ es agudo por 2.4.4)
Determinamos la semirrecta $\overrightarrow{BE}$ perpendicular a $\overleftrightarrow{DC}$, con E y A colaterales, es decir, $\angle CBE$ y $\angle EBD$ son dos ángulos rectos.

Claramente $\angle CBE = \angle CBA + \angle ABE$ luego
$\angle CBE + \angle EBD = \angle CBA + \angle ABE + \angle EBD$
Por otro lado, $\angle DBA = \angle EBD + \angle ABE$, luego
$\angle DBA + \angle CBA = \angle EBD + \angle ABE + \angle CBA$
De lo que deducimos que $\angle CBE + \angle EBD = \angle DBA + \angle CBA$, es decir, su suma equivale a la suma de dos rectos, tal y como queríamos ver.

5.2.4 Teorema. (Elementos 1.17)
Sea ΔABC un triángulo. Entonces $|\angle B| + |\angle C| < 180$.

Demostración. Sea D tal que B*C*D (Axioma B2).



Por el Teorema del Ángulo Exterior (3.7.2) , $\angle ACD > \angle B$, luego $|\angle ACD| > |\angle B|$ por 5.2.2A4. Ahora bien, los ángulos $\angle ACD$ y $\angle C$ son suplementarios, luego $|\angle ACD| + |\angle C| = 180$ por 5.2.2A6, luego $180 = |\angle ACD| + |\angle C| > |\angle B| + |\angle C|$.

Observación. En Elementos 1.17 se utiliza este mismo argumento, pero en vez de usar medida de ángulos se usa la propiedad "dos ángulos suplementarios suman dos rectos".

5.3 Área de polígonos.

En la Proposición 1.35 de Los Elementos se habla por primera vez de figuras "iguales" no en el sentido de figuras congruentes sino en el de tener el mismo área. Sin embargo, Euclides en ningún momento da una definición precisa del concepto de "área".

5.3.1 Definición. Definición axiomática de área.
Una **descomposición** de un polígono P es una colección finita de polígonos $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$, cuya unión es P y que sólo se "tocan" (cortan) por los lados. Escribiremos

$$P = P_1 + P_2 + ... + P_n .$$

Asociamos a cada polígono P un número $[P]$, llamado **área de P**, que cumplirá los siguientes axiomas:

Axioma A1. Las figuras congruentes tienen el mismo área:
Si $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ entonces $[\Delta ABC] = [\Delta DEF]$.
En general, si P y Q son dos polígonos congruentes, $[P] = [Q]$

Axioma A2. El área no depende de la descomposición del polígono:

Si $P = P_1 + ... + P_n = Q_1 + ... + Q_m$ entonces
$[P] = [P_1] + ... + [P_n] = [Q_1] + ... + [Q_m]$

Axioma A3. El área es no negativa: $[P] \geq 0$

Axioma A4.

Versión 1. El área de un rectángulo es base por altura:
Si $R = ABCD$ es un rectángulo, $[R] = |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|$

Versión 2. El área de un cuadrado es el cuadrado del lado:
Si $R = ABCD$ es un cuadrado, $[R] = |\overline{AB}|^2$

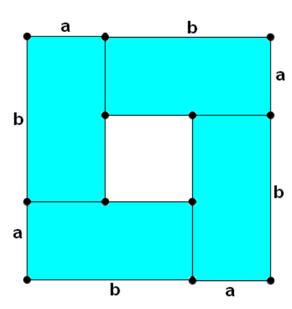
Versión 3.
Sea $ABCD$ un paralelogramo. Entonces $[ABCD] = base \cdot altura$.

Versión 4.
El área de un triángulo de base b y altura h es $b \cdot h/2$.

Pero, tomemos la versión que tomemos (todas son equivalentes), **el Axioma A4 es fuertemente euclídeo, es decir, sólo tiene sentido si se cumple el Axioma de la única paralela**. En efecto, si nos quedamos con la Versión 1 o la 2, los rectángulos sólo existen en el plano euclídeo (esto se verá en 6.5.3). Si nos quedamos con la versión 3, suponemos que las alturas de un paralelogramo miden siempre lo mismo, pero esto, nuevamente, es una condición euclídea (ver 6.5.7). Finalmente, si nos quedamos con la versión 4, suponemos que en los triángulos el producto de una base por su altura correspondiente es la misma independientemente de la base que tomemos, y nuevamente esto es cierto sólo en el plano euclídeo. En 22.5.2 estudiaremos como ejercicio un ejemplo concreto de un triángulo en un plano hiperbólico.

5.3.2 Teorema.
La versión 1 y la versión 2 del Axioma 4 son equivalentes.

Demostración.
Claramente Axioma A4(1) $\Rightarrow$ Axioma A4(2), por ser un caso particular.
Veamos ahora Axioma A4(2) $\Rightarrow$ Axioma A4(1):
Si $R = ABCD$ es un rectángulo de base a y altura b, supongamos $b > a$. Con cuatro rectángulos iguales podemos construir un cuadrado de lado $a + b$, si añadimos en el centro un cuadrado de lado $b - a$.

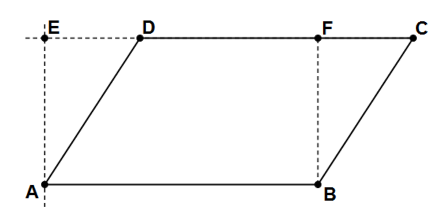


El área del cuadrado grande será, por Axioma A4(2), $(a+b)^2$,
El área del cuadrado pequeño central será, igualmente por Axioma A4(2), $(b-a)^2$,

$$(a+b)^2 = 4[ABCD] + (b-a)^2 \Rightarrow$$
$$a^2 + b^2 + 2ab = 4[ABCD] + a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow$$
$$2ab = 4[ABCD] - 2ab \Rightarrow 4ab = 4[ABCD] \Rightarrow ab = [ABCD]$$

5.3.3 Teorema.
La versión 1 implica la versión 3 del Axioma 4.

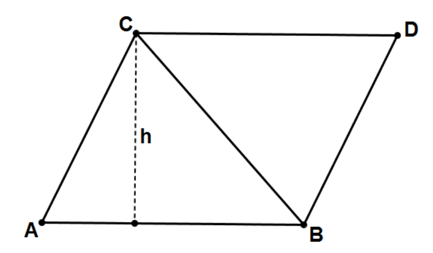
Demostración. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Si $ABCD$ es un rectángulo, basta aplicar el Axioma A4(1). Supongamos que no lo sea. Entonces dos ángulos opuestos del paralelogramo serán agudos y los otros dos ángulos opuestos serán obtusos.
Supongamos que $\angle DAB$ es agudo.
Trazamos $\overline{AE}$ perpendicular a $\overline{CD}$ por A y $\overline{BF}$ perpendicular a $\overline{CD}$ por B.



$\angle EDA \cong \angle FCB$ (5.3.5) y $\angle DEA \cong \angle CFB$ pues ambos son rectos (3.5.3), luego $\angle EAD \cong \angle FBC$ y por lo tanto ($|\overline{AD}| \cong |\overline{BC}|$ por ser un paralelogramo) tenemos $\Delta EDA \cong \Delta FCB$ (Criterio ASA) y por tanto $[\Delta EDA] \cong [\Delta FCB]$ (Axioma A2).
Ahora $[ABCD] = [ABFD] + [\Delta BCF] = [ABFD] + [\Delta ADE] = [ABFE] = b \cdot h$

5.3.4 Teorema.
La versión 3 implica la versión 4 del Axioma 4.

Demostración. Sea un triángulo ΔABC. Fijamos como base el lado $\overline{AB}$ y sea h su altura correspondiente. Trazamos la paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por C y la paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ por B. Sea D su punto de intersección.



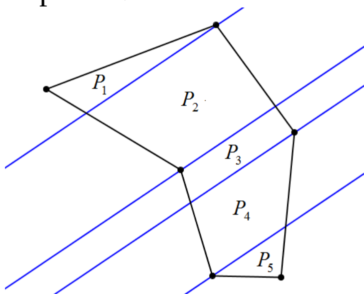
El cuadrilátero $ABCD$ será un paralelogramo, y claramente $[ABCD] = \overline{AB} \cdot h$ (5.3.9).
Puesto que $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (6.1.2b), $[\Delta ABC] = [\Delta CDA]$ (Axioma A2).
Luego $\overline{AB} \cdot h = [ABCD] = [\Delta ABC] + [\Delta CDA] = 2[\Delta ABC] \Rightarrow [\Delta ABC] = \dfrac{\overline{AB} \cdot h}{2}$

5.4 Tijeras-congruencia de polígonos.

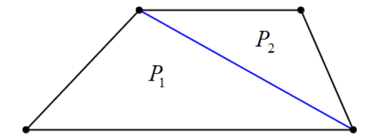
Recordemos la descomposición de polígonos introducida en 5.3.1. El objetivo de este apartado será demostrar el **teorema Bolyai-Gerwien** de 1833, que afirma que dos polígonos con el mismo área son tijeras-congruentes.

5.4.1 Proposición.
Todo polígono se puede descomponer en triángulos (de hecho, en triángulos agudos).

Demostración. Tomamos un polígono P y fijamos una recta m que no sea paralela a ninguno de los lados. Trazando paralelas a m por los vértices el polígono quedará descompuesto en triángulos y trapecios.



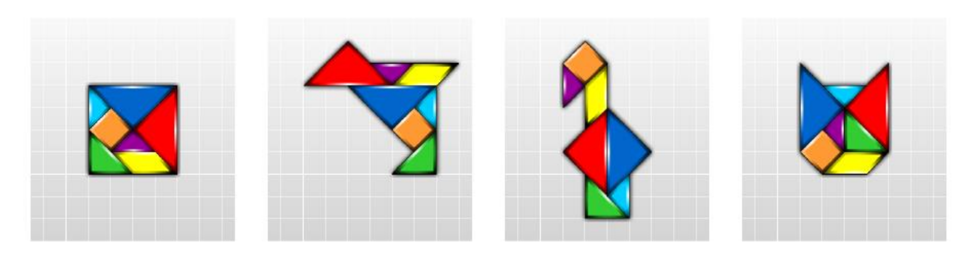
Y todo trapecio se descompone en dos triángulos trazando su diagonal:



5.4.2 Definición. Polígonos tijeras-congruentes.
Diremos que dos polígonos P y Q son tijeras-congruentes si existen sendas descomposiciones $P = P_1 + P_2 + ... + P_n$ y $Q = Q_1 + Q_2 + ... + Q_n$ con el mismo número de elementos y tales que $P_i \cong Q_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.
Es decir, cuando podamos descomponer los dos polígonos en la misma cantidad de "piezas" congruentes dos a dos, en cuyo caso escribiremos

$$P \sim Q$$

Un ejemplo bonito de este concepto lo encontramos en las piezas del Tangram:



Todas estas figuras poligonales son tijeras-congruentes

5.4.3 Proposición.
Dos polígonos tijeras-congruentes tienen la misma área.

$$P \sim \mathrm{Q} \Rightarrow [P] = [Q]$$

Observación.
El recíproco también es cierto. Se conoce como Teorema Bolyai-Gerwien (1833): Dos polígonos con la misma área son tijeras-congruentes.

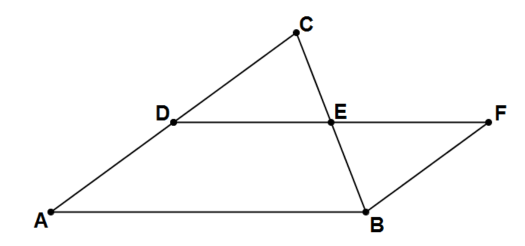
Demostración. Basta aplicar los axiomas A1 y A2 definidos en 5.3.1.

5.4.4 Proposición.
La tijeras-congruencia es una relación de equivalencia entre polígonos.

Demostración.
Las propiedades reflexiva y simétrica se cumplen claramente. Veamos la transitiva.
Si $P \sim \mathrm{Q}$ entonces $P = P_1 + P_2 + ... + P_n$, $Q = Q_1 + Q_2 + ... + Q_n$ con $P_i \cong Q_i \forall i$.
Si $Q \sim \mathrm{R}$ entonces $Q = Q_1^{'} + Q_2^{'} + ... + Q_m^{'}$, $R = R_1 + R_2 + ... + R_m$ con $Q_i^{'} \cong R_i \forall i$.
El problema es que no necesariamente se cumple $n = m$. Pero tomando todas las intersecciones $Q_i^{'} \cap Q_j$ con $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le m$, podemos llegar a desmontar P y R en piezas congruentes.

5.4.5 Proposición.
Todo triángulo es tijeras-congruente con un paralelogramo que tiene la misma base y la mitad de su altura.

Demostración. Sea el triángulo ΔABC. Sea D el punto medio del segmento $\overline{AC}$ y E el punto medio del segmento $\overline{BC}$. La recta $\overleftrightarrow{DE}$ será paralela a $\overleftrightarrow{AB}$. Sea F el punto de $op(\overrightarrow{ED})$ tal que $\overline{DE} \cong \overline{EF}$. Claramente $\Delta ECD \cong \Delta EBF$ (Criterio SAS) y por tanto $[\Delta ABC] = [ABFD]$.



5.4.6 Corolario.
Dos triángulos con igual base y altura son tijeras-congruentes.

Demostración. Ambos serán tijeras-congruentes con un mismo paralelogramo, y por lo tanto basta aplicar la propiedad transitiva de la tijera-congruencia.

5.4.7 Corolario.
Dos triángulos rectángulos con igual área son tijeras-congruentes.

Demostración. Sean el triángulo ΔABC rectángulo en A, y el triángulo ΔDEF rectángulo en D.

Supongamos que $|DE| > |AB|$. Puesto que tienen la misma área, entonces $|DF| < |AC|$. Superponemos ambos obteniendo la siguiente figura:

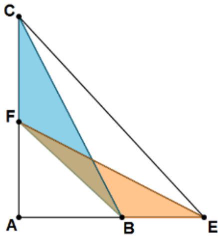
$$[\Delta ABC] = [\Delta AEF] \Leftrightarrow \frac{|AB| \cdot |AC|}{2} = \frac{|AE| \cdot |AF|}{2} \Leftrightarrow |AB| \cdot |AC| = |AE| \cdot |AF|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|AE|}{|AB|}$$

Por lo tanto, los triángulos ΔABF y ΔAEC son semejantes (Criterio SAS de semejanza).

Luego $\overleftrightarrow{BF}$ y $\overleftrightarrow{CE}$ son paralelas (8.3.6).

Ahora, aplicando el corolario anterior, los triángulos ΔFBC y ΔFBE serán tijeras-congruentes, pues comparten ambos base y altura.



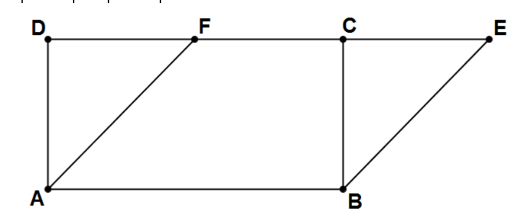
Finalmente, y utilizando las propiedades básicas de la tijera-congruencia,

$$\Delta AEF = \Delta ABF + \Delta BEF \sim \Delta ABF + \Delta FBC = \Delta ABC$$

5.4.8 Proposición.

Todo paralelogramo es tijeras-congruente como un rectángulo con la misma base y la misma altura.

Demostración. Sea el rectángulo $ABCD$ y el paralelogramo $ABEF$, con la misma altura. Supongamos que $|\overline{DF}| < |\overline{DC}|$:

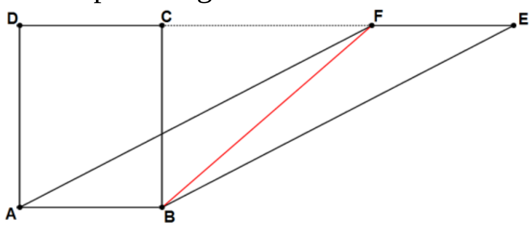


Entonces $\overline{DF} = \overline{DE} - \overline{FE} = \overline{DE} - \overline{AB} = \overline{DE} - \overline{DC} = \overline{CE}$ y por tanto los triángulos rectángulos ΔADF y ΔBCE son congruentes.

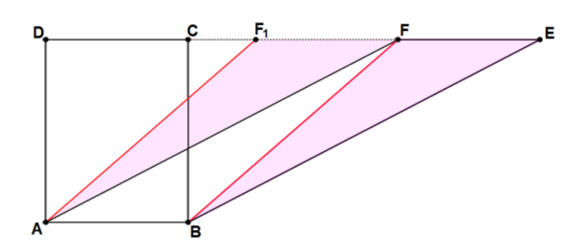
$$ABCD = \lozenge ABCF + \Delta ADF \sim ABCF + \Delta BCE = ABEF$$

Consideremos ahora el caso $|\overline{DF}| > |\overline{DC}|$:

Trazamos la diagonal $\overline{BF}$ del paralelogramo:



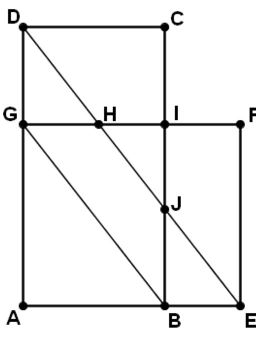
Determinamos el punto F_1 en $op(\overrightarrow{FE})$ tal que $|\overline{FE}| = |\overline{FF_1}|$.



El paralelogramo $ABEF$ será tijeras-congruente con el nuevo paralelogramo $ABFF_1$.
Repitiendo este proceso tantas veces como sea necesario (exactamente $n = [DF / DC]$), llegaremos a un punto F_n tal que $|\overline{DF_n}| < |\overline{DC}|$ y podemos aplicar la primera parte de esta demostración.

5.4.9 Proposición.
Dos rectángulos con el mismo área son tijeras-congruentes.

Demostración. Sean los rectángulos $ABCD$ y $AEFG$ con el mismo área, que los vamos a suponer superpuestos el uno sobre el otro. Trazamos los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{GB}$, y los puntos de intersección indicados para obtener la figura siguiente:

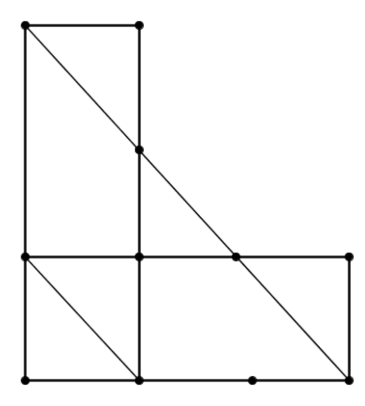


$$[ABCD] = [AEFG] \Rightarrow AB \cdot AD = AE \cdot AG \Rightarrow \frac{AD}{AG} = \frac{AE}{AB}$$

Luego los triángulos ΔABG y ΔAED son semejantes por el criterio SAS de semejanza.
Por lo tanto, por 8.3.7, $\overleftrightarrow{GB} // \overleftrightarrow{DE}$.
Luego $DGBJ$ es un paralelogramo, y por lo tanto $\overline{DG} = \overline{BJ}$, de lo que se deduce que $\overline{JC} = \overline{AG}$.
De la misma forma $BEHG$ es un paralelogramo, y por lo tanto $\overline{GH} = \overline{BE}$ y en consecuencia $\overline{HF} = \overline{AB}$.
De todo esto deducimos que $\Delta GHD \cong \Delta BEJ$ y $\Delta DCJ \cong \Delta HFE$.

Moviendo las polígonos ΔGHD a ΔBEJ y ΔDCJ a ΔHFE vemos que $ABCD$ y $AEFG$ son tijeras-congruentes.

Observación: El razonamiento anterior no sirve si $\overline{AE} > 2\overline{AB}$:



Pero todo rectángulo de altura a y base b es claramente tijeras-congruente con un rectángulo de base b/2 y altura 2a, basta con cortarlo por la mitad, luego en el caso $\overline{AE} > 2\overline{AB}$ podemos cortar el rectángulo $AEFG$ tantas veces como haga falta hasta garantizar que $\overline{AB} < \overline{AE} < 2\overline{AB}$.

5.4.10 Corolario.
Todo rectángulo es tijeras-congruente con un rectángulo de base 1 y altura igual a su área.

Demostración. Dado un rectángulo $ABCD$, con área $a = [ABCD] = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$, tomamos un rectángulo de base 1 y altura a, que claramente tendrá la misma área que el primero. Por la proposición anterior, serán tijeras-congruentes.

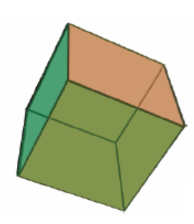
5.4.11 Corolario.
Todo polígono es tijeras-congruente con un rectángulo de lado 1 y altura igual a su área.

Demostración. Todo polígono se puede descomponer en triángulos (5.4.1). Cada triángulo es tijeras-congruente con un paralelogramo (5.4.5) y todo paralelogramo es tijeras-congruente con un rectángulo (5.4.8). Finalmente, todo rectángulo es tijeras-congruente con un rectángulo de base 1 y altura igual a su área (5.4.10). Con todo esto deducimos que un polígono es tijeras-congruente con un rectángulo de base 1 y altura igual a su área.

5.4.12 Corolario. Bolyai-Gerwien (1833).
Dos polígonos con el mismo área son tijeras-congruentes.

Demostración. Por el corolario anterior, ambos serán tijeras-congruentes con un mismo rectángulo de lado 1 y altura el área común.

5.4.13 Nota histórica. El tercer problema de Hilbert.
Todo el desarrollo anterior para polígonos se puede hacer en el espacio para poliedros. Diremos que dos poliedros son tijeras-congruentes cuando se puedan "descomponer" en el mismo número de poliedros iguales. Claramente, si dos poliedros son tijeras-congruentes, tendrán el mismo volumen, ¿pero dos poliedros con el mismo volumen serán tijeras congruentes, como pasa en el plano con el área?
Hilbert, en su célebre conferencia del Congreso Internacional de Matemáticas de París del 1902, propuso 23 problemas abiertos para resolver en el siglo XX. El tercer problema fue precisamente este. Hilbert ya dejó claro en su momento que esperaba una solución negativa, pero fue el matemático **Max Dehn** quién en 1902 demostró que un tetraedro regular y un cubo con igual volumen no son tijeras-congruentes, introduciendo el "**invariante de Dehn**".





5.4.14 Nota histórica. Max Dehn.
Max Dehn fue uno de los más destacados alumnos de Hilbert. Nacido en Hamburg en 1878, recibió su doctorado en Göttinger a la edad de 21 años bajo la supervisión del propio Hilbert con la disertación *Die Legendre'schen Satze über die Winkelsumme im Dreieck* sobre los fundamentos de la geometría. Debido a su condición de judío, en 1941 se vio forzado a emigrar desde Noruega a los Estados Unidos cruzando toda la Unión Soviética en el Transiberiano y después en barco hasta Japón. Murió en 1952 en Black Mountain, Carolina del Norte.

5.4.15 Nota histórica. La paradoja Banach–Tarski.
En 1924, Stefan Banach y Alfred Tarski demostraron que es posible tomar una esfera sólida, desmontarla en un número finito de piezas y volverlas a montar obteniendo dos esferas idénticas a la primera.
Este resultado se suele presentar como "paradoja" porque contradice nuestra intuición geométrica.

5.5 El Libro 5 de Los Elementos.

5.5.1 Introducción histórica.

Se considera el Libro 5 de los Elementos de Euclides como el primer libro de matemática abstracta de la Historia. Este libro está dedicado por completo a un concepto llamado "**magnitud**", que da lugar a una relación entre dos magnitudes llamada "**razón**" y una relación entre cuatro magnitudes (o entre dos razones) llamada "**proporcionalidad**", que es fundamental en el estudio de las **figuras semejantes**, que será el objeto de estudio del Libro 6, y un concepto absolutamente fundamental dentro de la toda la matemática griega.

Todos estos conceptos: magnitudes, razones, proporcionalidad y semejanza se simplifican de una manera radical cuando disponemos de los números reales y de las medidas de longitud de segmentos, amplitud de ángulos y área de polígonos tal y como se han definido en las secciones anteriores. Desgraciadamente (o afortunadamente, según como se mire) los griegos del siglo III a.C. utilizaban estos conceptos de una manera intuitiva, y esto queda reflejado en Los Elementos.

Además, unos siglos antes, alrededor del V a.C. los pitagóricos, que amaban los números por encima de todas las cosas, hicieron un admirable y sorprendente descubrimiento: la diagonal y el lado de cualquier cuadrado son inconmensurables, esto es, no existe un segmento que esté contenido un número exacto de veces tanto en el lado como en la diagonal de un cuadrado. Este descubrimiento tiró por tierra todo su proyecto de fundamentar las matemáticas (y la vida entera) en los números racionales. Tuvieron que pasar más de 2000 años hasta que se desarrollaron las técnicas numéricas que permitieron manejar estas razones, gracias a matemáticos como Dedekind. Así pues, **en los Elementos de Euclides se evita a toda costa "dividir segmentos"**, pues se es perfectamente consciente de que no siempre es posible hacerlo.

Aristóteles habló en sus obras con frecuencia sobre la inconmensurabilidad del lado y la diagonal del cuadrado. Por ejemplo, en la Metafísica (983 a, 12-20) dice Aristóteles:

> "Todos comienzan, de hecho, maravillándose de que una cosa pueda ser en un cierto modo, como los trucos de un malabarista, o sobre los movimientos del Sol, o sobre la inconmensurabilidad de la diagonal respecto al lado en un cuadrado. Maravilloso resulta, ciertamente, que no exista algo pequeñísimo como unidad de medida común, pero cuando se ha entendido, lo que realmente maravillaría a un matemático es que la diagonal fuese conmensurable con el lado".

Las magnitudes serían todos aquellos conceptos, matemáticos o no, susceptibles de ser "medidos", es decir, a los que podemos asignar un número positivo que con las propiedades de las longitudes:

i) Los números enteros positivos IN.
ii) Los números racionales positivos Q^+.
iii) Los números reales positivos IR^+.
iv) Los segmentos.
v) Las áreas.
vi) Los volúmenes.
viii) Las notas musicales.

5.5.2 El concepto de magnitud en el Libro 5.

Vocabulario. Magnitud.

Μεγέθη : Magnitud.

Definición. Magnitud divisora de otra. (Elementos, definición 5.1)

Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

Una magnitud es una parte de otra magnitud, la menor a la mayor, cuando mida a la mayor.

En lenguaje moderno:

Diremos que α es "parte de" β cuando $\beta = n \cdot \alpha$

Definición. Magnitud múltiple de otra (Elementos, definición 5.2)

Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος

Y la mayor será múltiple de la menor cuando venga medida por ésta.

En lenguaje moderno:
Diremos que β es "múltiple de" α cuando $\beta = n \cdot \alpha$

Definición. Magnitudes con razón (Elementos, definición 5.4)

Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν

Diremos que dos magnitudes "están en razón" cuando, siendo multiplicadas convenientemente, cada una exceda a la otra.

En lenguaje moderno: Diremos que a y b están en razón cuando existan n y m tales que $n \cdot a > b$ y $m \cdot b > a$.

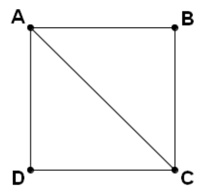
5.5.3 El concepto de razón en el Libro 5.

Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις.
Una razón es un cierto tipo de relación con respecto al tamaño de dos magnitudes homogéneas.

En notación moderna escribimos $\alpha : \beta$

Observamos que Euclides excluye cualquier tipo de razón entre magnitudes que no sean de la misma especie, por ejemplo no son aceptables la razón entre un área y una longitud o entre un volumen y un área.

Las razones pueden ser entre magnitudes conmensurables y también entre magnitudes inconmensurables. Por ejemplo, la razón entre la diagonal de un cuadrado y su lado:



La razón $\overline{AC}:\overline{DC}$ sería el equivalente al moderno número real $\sqrt{2}$.

Definición. Orden entre dos razones (Elementos Definición 5.7)

Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

Y cuando para ciertos equimúltiples de la primera y tercera y equimúltiples de la segunda y cuarta magnitudes, el múltiple de la primera sea mayor que el múltiple de la segunda, y el múltiple de la tercera no sea mayor que el múltiple de la cuarta, entonces diremos que la primera magnitud a la segunda tiene mayor razón que la tercera a la cuarta.

En notación moderna:

$$A:B>C:D \Leftrightarrow \exists\ n,m \in IN \mid n\cdot A>m\cdot B \wedge n\cdot C \not> m\cdot D$$

Es decir, en un contexto moderno de números reales, diríamos que un número real es menor que otro cuando podemos encontrar un racional que los separa.

5.5.4 El concepto de proporcionalidad en el Libro 5.

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καί τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

Diremos que (cuatro) magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando equimúltiples de la primera y la tercera sean mayores, iguales o menores que equimúltiples de la segunda y la cuarta, respectivamente, tomados en el orden correspondiente.

Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλείσθω.

Y magnitudes que están en la misma razón se llamarán proporcionales.

$$A:B::C:D \Leftrightarrow \forall n,m \in IN, \begin{cases} n\cdot A>m\cdot B \Rightarrow n\cdot C>m\cdot D \\ n\cdot A=m\cdot B \Rightarrow n\cdot C=m\cdot D \\ n\cdot A<m\cdot B \Rightarrow n\cdot C<m\cdot D \end{cases}$$

Nota histórica: El símbolo “::” fue introducido por William Oughtred en el siglo XVII.

Euclides evita utilizar la expresión "igualdad entre dos razones", y no utiliza la palabra "igual" ἴσος cuando se refiere a razones, y utiliza "estar en razón ", "tener la misma razón" o "formar una razón": Εν τῷ αὐτῷ λόγῳ

5.5.5 Algunos resultados del Libro 5 de Los Elementos de Euclides.

Proposición. (Elementos 5.1)

$$n\cdot\alpha\oplus n\cdot\beta\oplus n\cdot\gamma\oplus\ldots=n\cdot(\alpha\oplus\beta\oplus\gamma\oplus\ldots)$$

Proposición. (Elementos 5.2)

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=n\cdot\beta\\ \gamma=n\cdot\delta\\ \varepsilon=m\cdot\beta\\ \zeta=m\cdot\delta\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\alpha\oplus\varepsilon=(n+m)\cdot\beta\\ \gamma\oplus\zeta=(n+m)\cdot\delta\end{cases}$$

La demostración sigue el siguiente esquema:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AB}=n\cdot\Gamma\\ \Delta\mathrm{E}=n\cdot\mathrm{Z}\\ \mathrm{BH}=m\cdot\Gamma\\ E\Theta=m\cdot\mathrm{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{AH}=(n+m)\cdot\Gamma\\ \Delta\Theta=(n+m)\cdot\mathrm{Z}\end{cases}$$

Proposición. (Elementos 5.8)

a) $A>B\Rightarrow A:C>B:C$

b) $A>B\Rightarrow C:A>C:B$

Demostración.

Puesto que $A>B$ existe $A-B$

Sea m_1 tal que $C<m_1\cdot(A-B)$

Sea m_2 tal que $C<m_2\cdot B$

El número $m=\max(m_1,m_2)$ satisface $C<m\cdot(A-B)$ y $C<m\cdot B$

Sea n tal que $(n-1)\cdot C<m\cdot B<n\cdot C$

Entonces se cumple

$$\left.\begin{array}{l}(n-1)\cdot C<m\cdot B\\ C<m\cdot(A-B)\end{array}\right\}\Rightarrow(n-1)\cdot C+C<m\cdot B+m\cdot(A-B)\Rightarrow n\cdot C<m\cdot A$$

Por lo tanto, para estos m y n, se cumple $n\cdot C<m\cdot A$ y $m\cdot B<n\cdot C$, por lo que $A:C<B:C$.

Proposición. (Elementos 5.9)

a) $A:C=B:C\Rightarrow A=B$

b) $C:A=C:B\Rightarrow A=B$

Proposición. (Elementos 5.10)

a) $A:C>B:C\Rightarrow A>B$

b) $C:A>C:B \Rightarrow B>A$

Teorema.

$$A:B::C:D \Leftrightarrow \begin{cases} A>B \Rightarrow C>D \\ A=B \Rightarrow C=D \\ A<B \Rightarrow C<D \end{cases}$$

Demostración.
Podemos considerar este teorema como un caso particular de la definición de magnitudes proporcionales al considerar el caso $n=m=1$. Por ejemplo:

$A>B \Rightarrow 1\cdot A>1\cdot B \Rightarrow 1\cdot C>1\cdot D \Rightarrow C=D$

Teorema.

$$A:B::C:D \Leftrightarrow B:A::D:C.$$

Demostración.
Supongamos que $A:B::C:D$.
Queremos demostrar que $B:A::D:C$.
Para ello tomamos equimúltiplos $n\cdot B$ y $m\cdot A$ de B y A respectivamente.
Veamos que $n\cdot B<m\cdot A \Rightarrow n\cdot D<m\cdot C$:
Si $n\cdot B<m\cdot A$ entonces $m\cdot A>n\cdot B$ y aplicando la hipótesis $A:B::C:D$ deducimos $m\cdot C>n\cdot D$.
Pero entonces $n\cdot D<m\cdot C$, tal y como queríamos ver.
Las otras dos condiciones se demuestran de forma similar.

Teorema.
Si $A:B::C:D$, entonces $A=n\cdot B \Rightarrow C=n\cdot D$

Demostración.
Se puede considerar como un caso particular de la propia definición V:
$A=n\cdot B \Rightarrow 1\cdot A=n\cdot B \Rightarrow 1\cdot C=n\cdot D \Rightarrow C=n\cdot D$.

Teorema. (Elementos 5.7)
Sean A, B y C tres magnitudes cualesquiera.
Si $A=B$ entonces $A:C::B:C$ y $C:A::C:B$.

Demostración.
Veamos que $A:C::B:C$.
Supongamos que $n\cdot A>m\cdot C$
$A=B \Rightarrow n\cdot A=n\cdot B$ y por lo tanto $n\cdot B>m\cdot C$, con lo que demostramos la condición 5.1.

Teorema. (Elementos 5.11)

$$\left.\begin{array}{l} A:B::C:D \\ C:D::E:F \end{array}\right\} \Rightarrow A:B::E:F$$

Demostración.

Sean $n \cdot A > m \cdot B$
Entonces, por cumplirse $A:B::C:D$ tendremos $n \cdot C > m \cdot D$,
y por cumplirse $C:D::E:F$ tendremos $n \cdot E > m \cdot F$,
y por tanto se cumplirá la "Condición 5.1"

Teorema. (Elementos 5.12)

$$A:B::C:D::E:F... \Rightarrow A:B::(A+C+E+...)::(B+D+F+...)$$

Demostración.

Teorema. Elementos 5.13

$$\left.\begin{array}{l} A:B::C:D \\ C:D > E:F \end{array}\right\} \Rightarrow A:B > E:F$$

Demostración.
$C:D > E:F \Rightarrow \exists n,m \mid n \cdot C > m \cdot D \wedge n \cdot E \not> m \cdot F$
Pero si $A:B::C:D$ entonces $n \cdot C > m \cdot D \Rightarrow n \cdot A > m \cdot B$
Y por tanto se cumple la condición de $A:B > E:F$.

5.5.6 Tabla. Esquema de las proposiciones del Libro 5.

5.1 $n \cdot a + n \cdot b = n \cdot (a+b)$

5.2 $n \cdot a + m \cdot a = (n+m) \cdot a$

5.3 $n \cdot (m \cdot a) = (nm) \cdot a$

5.4 $a : b :: c :: d \Rightarrow$ $m \cdot a : n \cdot b :: m \cdot c : n \cdot d$

5.5 $n \cdot a - n \cdot b = n \cdot (a-b)$

5.6 $n \cdot a - m \cdot a = (n-m) \cdot a$

5.7 $a = b \Rightarrow \begin{cases} a : c :: b : c \\ c : a :: c : b \end{cases}$

5.8 $a < b \Rightarrow \begin{cases} a : c < b : c \\ c : a > c : b \end{cases}$

5.9 $a : c :: b : c \Rightarrow a = b$
$c : a :: c : b \Rightarrow a = b$

5.10 $a : c < b : c \Rightarrow a < b$
$c : a < c : b \Rightarrow b < a$

5.11 $\left.\begin{matrix} a : b :: c : d \\ c : d :: e : f \end{matrix}\right\} \Rightarrow a : b :: e : f$

5.12 $a : a' :: b : b' :: c : c' :: ... \Rightarrow$ $\Rightarrow (a+b+c+...) :: (a'+b'+c'+...)$

5.13 $\left.\begin{matrix} a : b :: c : d \\ c : d < e : f \end{matrix}\right\} \Rightarrow a : b < e : f$

5.14 $a : b :: c : d \Rightarrow$ $(a <,=,> b \Leftrightarrow b <,=,> d)$

5.15 $a : b :: n \cdot a : n \cdot b$

5.16 $a : b :: c : d \Rightarrow a : c :: b : d$

5.17 $a : b :: c : d \Rightarrow$ $(a-b) : b :: (c-d) : d$

5.18 $a : b :: c : d \Rightarrow$ $(a+b) : b :: (c+d) : d$

5.19 $a : b :: c : d \Rightarrow$ $(a-c) : (b-d) :: a : b$

5.20 $\left.\begin{matrix} a : b :: d : e \\ b : c :: e : f \end{matrix}\right\} \Rightarrow a : c :: d : f$

5.21 $\left.\begin{matrix} a : b :: e : f \\ b : c :: d : e \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $(a <,=,> c \Leftrightarrow d <,=,> f)$

5.22 $\left.\begin{matrix} a : b :: e : f \\ b : c :: f : g \\ c : d :: g : h \end{matrix}\right\} \Rightarrow a : d :: e : h$

5.23 $\left.\begin{matrix} a : b :: e : f \\ b : c :: d : e \end{matrix}\right\} \Rightarrow a : c :: d : f$

5.24 $\left.\begin{matrix} a : c :: d : f \\ b : c :: e : f \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $(a+b) : c :: (d+e) : f$

5.25 $\left.\begin{matrix} a : b :: c : d \\ a \text{ mayor que los demás} \end{matrix}\right\}$ $\Rightarrow a + d > b + c$

Fuente: E.C. Zeeman

6 Las condiciones euclídeas.

> **“Por amor de Dios, te lo ruego, olvídalo. Témelo como a las pasiones sensuales, porque lo mismo que ellas, puede llegar a absorber todo tu tiempo y privarte de tu salud, de la paz de espíritu y de la felicidad en la vida.”**
> Carta de Farkas Bolyai a su hijo Janos, al saber que estaba trabajando en el quinto postulado de Euclides.

En este capítulo vamos a trabajar sobre un **plano neutral**, es decir, un plano de Hilbert en el que se cumple el Axioma de Dedekind (4.2.5) y, además, disponemos de las medidas de segmentos, ángulos y áreas del Tema 5. Veremos que en un plano neutral el Postulado de la única paralela adquiere múltiples y variadas formas, todas ellas equivalentes, que llamaremos "condiciones euclídeas".

Introducción histórica.
Se otorga a **Carl Frederick Gauss** (1777–1855) el honor de ser el primero en considerar seriamente la existencia de geometrías que cumplieran todos los axiomas de los Elementos pero no el Postulado de Euclides.



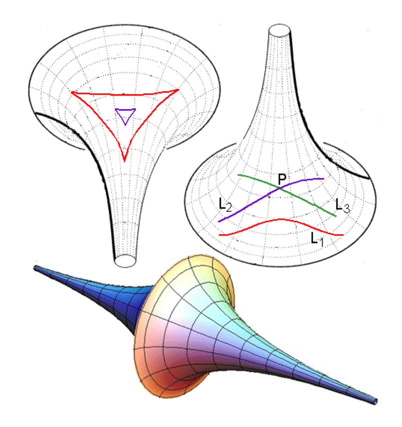
Por la correspondencia de Gauss con otros matemáticos de su época se sabe que consideró la existencia de geometrías no euclídeas desde 1792, y que en 1816 estaba convencido de la imposibilidad de demostrar el postulado de Euclides, pero jamás publicó sus resultados por el prejuicio que existía en su época contra cualquier idea contraria a la euclídea, honor que se llevaron Bolyai y Lobachevsky.

Janos Bolyai (1802–1860) fue un oficial húngaro del ejército austríaco, hijo de **Farkas Bolyai**, un profesor de matemáticas y amigo de Gauss. Escribió un trabajo sobre geometría no euclídea que fue incorporado como apéndice (y por ello se le ha dado en llamar el “**Appendix**”) en un manual de matemáticas que había escrito su padre. Este trabajo llegó a las manos de Gauss, que desde el primer momento lo consideró como la obra de un genio. Aunque dejó un legado de más de 14000 manuscritos, este fue el único trabajo matemático publicado por Janos.

Nicolai Lobachevsky (1793–1856) fue un profesor de matemáticas ruso de la Universidad de Kasan. En 1826 (según el calendario ruso antiguo), en una charla para la Sección Físico-Matemática de su universidad, describió una geometría en la que era posible trazar dos paralelas diferentes a una recta dada por un punto externo a esta. No se conserva el manuscrito de esta lectura, pero en 1829-30 Lobachevsky publicó “Sobre los principios de la Geometría” en la que aparecen sus principios para una geometría no euclídea. Durante la década 1830-1840 publicó otros cuatro trabajos sobre geometría. Lobachevsky murió en 1856 sin que sus méritos hubieran sido reconocidos.

El primer modelo de geometría hiperbólica (un caso particular de geometría no euclídea) se debe a **Eugenio Beltrami (**1835–1900).

En 1868 Beltrami publicó el trabajo “Sobre la Interpretación de la Geometría no euclídea” en la que describe una superficie dentro de un espacio euclídeo llamada **pseudoesfera** en la que no se cumple el Axioma de Paralelismo.



El descubrimiento de este primer modelo de plano hiperbólico convenció por fin a la comunidad matemática de que la geometría no euclídea era consistente y por tanto real, no una mera especulación filosófica.

En el capítulo 22 de este libro serán expuestos el “Disco de Poincaré” y el “Semiplano de Poincaré” como modelos de planos hiperbólicos.







Bolyai Lobachevsky Beltrami

A partir de ahora vamos a trabajar siempre con **planos neutrales**: Planos de Hilbert en los que se cumple el Axioma de Dedekind y en los que, además, disponemos de las herramientas de medida introducidas en el Tema 5: Longitud de segmentos, amplitud de ángulos y área de polígonos.

Existe otro nombre para esta geometría, propuesto por J. Bolyai, “geometría absoluta” (absolute geometry). En este libro utilizaremos la propuesta por W.Prenowitz y M.Jordan (1965), “**geometría neutral**” (*neutral geometry*), remarcando que esta geometría se mantiene “neutral” respecto del último axioma, el de paralelismo. Este axioma fue propuesto por J.W.R. **Dedekind** en 1871.

6.1 Suma angular y defecto de triángulos.

6.1.1 Definición. Suma angular de un triángulo. Defecto de un triángulo.
Si ΔABC es un triángulo, definimos su suma angular por

$$\sigma ABC = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C|$$

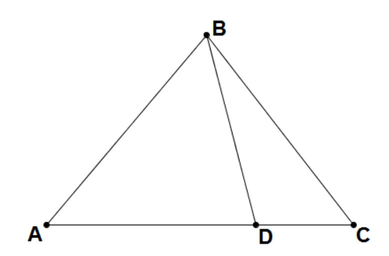
y definimos el defecto del triángulo por

$$\delta ABC = 180 - \sigma ABC = 180 - |\angle A| - |\angle B| - |\angle C|$$

El objetivo de este apartado es demostrar el Teorema Saccheri-Legendre: Siempre se cumple $\delta ABC \geq 0$, es decir, $\sigma ABC \leq 180$.

6.1.2 Proposición.
Sea ΔABC un triángulo y D un punto tal que A*D*C. Entonces $\delta ABC = \delta ABD + \delta DBC$.

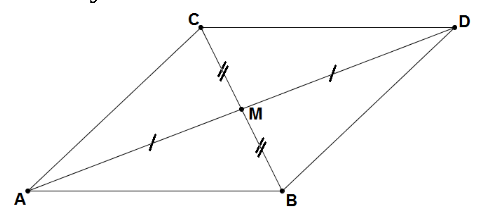
Demostración.



Sabemos que D está en el interior de $\angle ABC$ por 2.4.6, luego
$\angle B = \angle ABD + \angle DBC \Rightarrow |\angle B| = |\angle ABD| + |\angle DBC|$.
$\angle ADB$ y $\angle CDB$ son suplementarios, luego $|\angle BDA| + |\angle BDC| = 180$.
Por lo tanto
$\delta ABD + \delta BDC = 180 - |\angle A| - |\angle ABD| - |\angle BDA| + 180 - |\angle C| - |\angle BDC| - |\angle DBC| =$
$= 180 - |\angle A| - \left(|\angle ABD| + |\angle DBC|\right) + 180 - \left(|\angle BDA| + |\angle BDC|\right) - |\angle C| =$
$= 180 - |\angle A| - |\angle B| + 180 - 180 - |\angle C| = 180 - |\angle A| - |\angle B| - |\angle C| = \delta ABD$

6.1.3 Lema.
Sea ΔABC un triángulo en el cual $|\angle A| = \alpha$. Entonces existe otro triángulo ΔXYZ para el cual $\sigma ABC = \sigma XYZ$ y con un ángulo con amplitud no superior a $\alpha/2$.

Demostración. Sea M el punto medio de $\overline{BC}$.
Sea D un punto tal que A*M*D y $\overline{AM} = \overline{MD}$.



Sean $\alpha_1 = |\angle CAM|$, $\alpha_2 = |\angle MAB|$, $\beta = |\angle ABC|$, $\gamma = |\angle ACB|$. Claramente $|\angle A| = \alpha_1 + \alpha_2$.

$\Delta AMB \cong \Delta DMC$ aplicando SAS (2.1.10) pues $\overline{AM} \cong \overline{MD}$, $\overline{CM} \cong \overline{MB}$ y $\angle AMB \cong \angle CMD$. Luego $|\angle CDM| = |\angle MAB| = \alpha_2$ y $\beta = |\angle MCD|$.

Ahora calculamos la suma angular:
$\sigma ABC = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C| = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma = \sigma ADC$

Teniendo en cuenta que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_i \leq \alpha / 2$ para $i = 1$ o $i = 2$.
Si $\alpha_1 \leq \alpha / 2$ entonces $|\angle ADC| = \alpha_1 \leq \alpha / 2$ es uno de los ángulos del triángulo ΔADC.
Si $\alpha_2 \leq \alpha / 2$ entonces también se cumple para uno de los ángulos de este triángulo.
En todo caso el triángulo ΔADC cumple las condiciones requeridas.

Nota: M.Dehn demostró que este teorema exige el Axioma de Continuidad.

6.1.4 Corolario.
Sea ΔABC un triángulo en el cual $|\angle A| = \alpha$. Sea k un entero positivo. Entonces existe otro triángulo ΔXYZ para el cual $\delta ABC = \delta XYZ$ y con un ángulo con amplitud no superior a $\frac{\alpha}{2^k}$.

Demostración. Basta aplicar el lema 6.1.3 k veces.

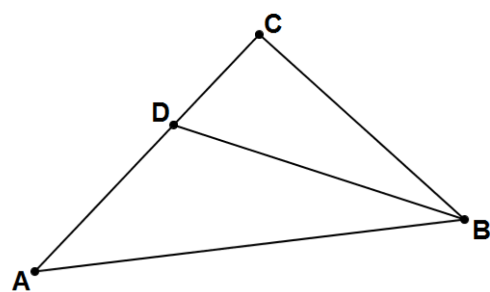
6.1.5 Lema.
Supongamos que para cierto triángulo ΔABC se cumple $\delta ABC < 0$, y sea $\varepsilon = -\delta ABC > 0$. Entonces todo ángulo de ΔABC tiene una amplitud $\geq \varepsilon$.

Demostración. Supongamos que $|\angle A| < \varepsilon$. Sabemos que $|\angle B| + |\angle C| < 180$ por 5.2.4.
Luego
$|\angle A| + |\angle B| + |\angle C| < 180 + \varepsilon \Rightarrow |\angle A| + |\angle B| + |\angle C| - 180 < \varepsilon \Rightarrow$
$-\varepsilon < 180 - |\angle A| - |\angle B| - |\angle C| = \delta ABC = -\varepsilon$
absurdo.

6.1.6 Teorema. El teorema Saccheri-Legendre.
En todo triángulo ΔABC se cumple $\delta ABC \geq 0$, es decir $|\angle A| + |\angle B| + |\angle C| \leq 180$

Demostración. Sea ΔABC un triángulo para el cual $\delta ABC = -\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$.
Sea $\alpha = |\angle A|$.
La sucesión $\left\{ \frac{\alpha}{2^k} \right\}$ tiende a 0, luego existirá un k tal que $\frac{\alpha}{2^k} < \varepsilon$.
Por el lema 6.1.4 existirá un triángulo ΔXYZ para el cual $\sigma ABC = \sigma XYZ$ y con un ángulo, pongamos que sea X, cumpliendo $|\angle X| \leq \frac{\alpha}{2^k} < \varepsilon$, contradiciendo el lema anterior 6.1.5.

6.1.7 Corolario.
Sea ΔABC un triángulo y D un punto tal que A*D*C. Entonces
$\delta ABC = 0 \Leftrightarrow \delta ABD = \delta DBC = 0$.



Demostración. Basta aplicar la proposición 6.1.2, $\delta ABC = \delta ABD + \delta DBC$, y tener en cuenta que los tres valores son positivos.

6.2 Suma angular y defecto de cuadriláteros.

6.2.1 Definición. Suma angular y defecto de un cuadrilátero.
Definimos la suma angular del cuadrilátero $ABCD$ por

$$\sigma ABCD = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C| + |\angle D|$$

Definimos el defecto del cuadrilátero por

$$\delta ABCD = 360 - \sigma ABCD = 360 - |\angle A| - |\angle B| - |\angle C| - |\angle D|$$

6.2.2 Proposición.
Si $ABCD$ es un cuadrilátero convexo, entonces $\sigma ABCD = \sigma ABC + \sigma ADC$ y $\delta ABCD = \delta ABC + \delta ADC$. Además $\sigma ABCD \leq 360$ y $\delta ABCD \geq 0$

Demostración. Si $\lozenge ABCD$ es un cuadrilátero convexo, entonces C está en el interior de $\angle A$ y A está en el interior de $\angle C$ por definición.
Luego $|\angle A| = |\angle BAC| + |\angle CAD|$, y $|\angle C| = |\angle ACB| + |\angle ACD|$ por 5.2.2A1.
$\sigma ABCD = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C| + |\angle D| =$
$|\angle BAC| + |\angle B| + |\angle ACB| + |\angle CAD| + |\angle ACD| + |\angle D| = \sigma ABC + \sigma ADC$
$\delta ABCD = 360 - \sigma ABCD = 360 - (\sigma ABC + \sigma ADC) =$
$180 - \sigma ABC + 180 - \sigma ADC = \delta ABC + \delta ADC$

Aplicando el teorema Saccheri-Legendre (6.1.6), tenemos que el defecto de un cuadrilátero convexo es suma de dos cantidades no negativas, luego tampoco será negativa, y la suma angular será siempre menor o igual a 360.

6.2.3 Definición. Rectángulo.
Un rectángulo es un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos son rectos.

Observación: No suponemos en ningún momento que los rectángulos existan, sólo nos limitaremos a estudiar las propiedades que tendrían los rectángulos en el caso de existir. Se verá más adelante que los rectángulos existen en un plano euclídeo pero no en un plano hiperbólico.

6.2.4 Lema.
Todos los rectángulos son paralelogramos, y por tanto cuadriláteros convexos.

Demostración. Aplicando el Teorema de los ángulos internos alternos (3.6.2), vemos que todo rectángulo es un paralelogramo, y por 2.9.12 todo paralelogramo es convexo.

6.2.5 Proposición.
Si $ABCD$ es un rectángulo, entonces $\delta ABCD = 0$.

Demostración. Los ángulos rectos miden 90, luego
$\delta ABCD = 360 - |\angle A| - |\angle B| - |\angle C| - |\angle D| = 360 - 4 \cdot 90 = 0$

6.2.6 Corolario.
Si $ABCD$ es un rectángulo, entonces ΔABC es un triángulo rectángulo con $\delta ABC = 0$, y ΔADC es un triángulo rectángulo con $\delta ADC = 0$. Por lo tanto, si los rectángulos existen también existirán los triángulos con defecto cero.

Demostración. Sólo hay que aplicar 6.2.2: $0 = \delta ABCD = \delta ABC + \delta ADC$, y la suma de dos cantidades no negativas es cero sólo si ambas son cero.

6.2.7 Proposición.
Si $ABCD$ es un rectángulo, entonces $\Delta BCA \cong \Delta DAC$, y por tanto los lados opuestos de un rectángulo son congruentes.

Demostración. Puesto que ΔABC es un triángulo rectángulo con $\delta ABC = 0$ (6.2.6) entonces

$$0 = \delta ABC = 180 - |\angle CAB| - |\angle ABC| - |\angle BCA| = 180 - |\angle CAB| - 90 - |\angle BCA| \Rightarrow$$

$$0 = 90 - |\angle CAB| - |\angle BCA| \Rightarrow 90 = |\angle CAB| + |\angle BCA|$$

C está en el interior de $\angle BAD$, luego $90 = |\angle DAB| = |\angle DAC| + |\angle CAB|$

Luego

$$\left.\begin{array}{l} 90 = |\angle CAB| + |\angle BCA| \\ 90 = |\angle DAC| + |\angle CAB| \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = |\angle BCA| - |\angle CAD| \Rightarrow |\angle BCA| = |\angle CAD|$$

Por AAS obtenemos que $\Delta BCA \cong \Delta DAC$.

6.2.8 Proposición. Duplicación de rectángulos.
Supongamos que existe un rectángulo cuyos lados miden x e y. Entonces existirá un rectángulo cuyos lados midan 2x e y.

Demostración.
Sea $ABCD$ un rectángulo con $x = |\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ e $y = |\overline{BC}| = |\overline{AD}|$.

Sea E un punto tal que E*A*B y $\overline{EA} \cong \overline{AB}$, por lo tanto $|\overline{EB}| = 2x$.

Sea F un punto tal que F*D*C y $\overline{FD} \cong \overline{CD}$, de la misma manera $|\overline{FC}| = 2x$.

Nuestro objetivo es comprobar que el cuadrilátero $EBCF$ es un rectángulo.
Los ángulos $\angle EAD$ y $\angle FDA$ serán rectos pues son suplementarios de dos ángulos rectos.
Aplicando SAS tenemos que $\Delta EAD \cong \Delta DAB$, luego $\overline{ED} \cong \overline{DB}$, y $\angle EDA \cong \angle BDA$.
E está en el interior de $\angle FDA$ (ver al final de la demostración)
Luego $90 = |\angle FDA| = |\angle FDE| + |\angle EDA| \Rightarrow |\angle FDE| = 90 - |\angle EDA| = 90 - |\angle BDA|$
Pero por otro lado, ΔBAD es un triángulo rectángulo con defecto cero, luego

$$0 = \delta BAD = 180 - |\angle ADB| - |\angle DAB| - |\angle ABD| = 180 - |\angle ADB| - 90 - |\angle ABD| \Rightarrow$$

$$90 = |\angle ADB| + |\angle ABD| \Rightarrow 90 - |\angle ADB| = |\angle ABD|$$

Así pues, $|\angle FDE| = 90 - |\angle BDA| = |\angle ABD|$.

Luego $\angle FDE \cong \angle ABD$, y como $\overline{FD} \cong \overline{AB}$ y $\overline{ED} \cong \overline{DB}$, aplicando SAS llegamos a $\Delta FDE \cong \Delta ABD$. Por lo tanto $\angle F$ es recto.

Con un argumento similar se demuestra que $\angle E$ es recto, y por lo tanto $EBCF$ es un rectángulo.
Veamos que E está en el interior de $\angle FDA$, es decir $E \approx_{\overline{AD}} F \wedge E \approx_{\overline{FD}} A$:
Por hipótesis sabemos que $B \approx_{\overline{AD}} C$.

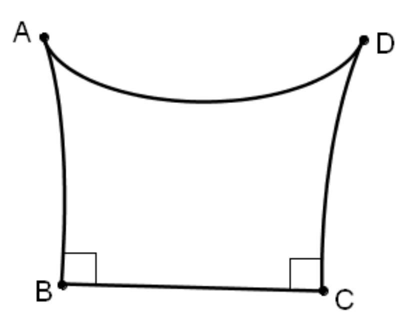
$$\left.\begin{array}{l} E*A*B \Rightarrow E \not\approx_{\overline{AD}} B \Rightarrow E \not\approx_{\overline{AD}} C \\ F*D*C \Rightarrow F \not\approx_{\overline{AD}} C \end{array}\right\} \Rightarrow E \approx_{\overline{AD}} F \text{ (aplicando 1.3.17 y Axioma B4(b))}$$

Las rectas $\overleftrightarrow{EB}$ y $\overleftrightarrow{FC}$ son perpendiculares comunes a $\overleftrightarrow{AD}$, luego son paralelas (2.6.3), luego el segmento $\overline{EA}$ no puede cortar la recta $\overleftrightarrow{FD}$, luego $E \approx_{\overline{FD}} A$.

6.2.9 Proposición.
Supongamos que existen los rectángulos. Entonces hay rectángulos arbitrariamente grandes, en el sentido de que para cualquier valor real positivo arbitrariamente grande λ, existirá un rectángulo cuyos lados midan valores mayores o iguales a λ.

Demostración. Sea $ABCD$ un rectángulo con $x = \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$ e $y = \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{AD}\right|$, y λ cualquier valor real positivo.
Existirá un entero k tal que $2^k x \geq \lambda$, luego aplicando la proposición anterior k veces llegaremos a un rectángulo con un lado que cumple la propiedad deseada. Ahora basta hacer lo mismo para la altura y, y obtener el rectángulo deseado.

6.2.10 Definición. Cuadrilátero de Saccheri.
Un cuadrilátero de Saccheri es un cuadrilátero $ABCD$ que cumple las tres condiciones siguientes:



a) $\angle B$ y $\angle C$ son rectos.

b) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

c) A y D son colaterales respecto a $\overleftrightarrow{BC}$.

En este caso diremos que el lado $\overline{BC}$ es la **base** del cuadrilátero, los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ son los **ángulos de la base**, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son los **lados**, AD se denomina **cumbre**, y A y D son los **ángulos de la cumbre**.

Nota histórica.
En 1733 **Girolamo Saccheri** (1667-1733) publicó una pequeña obra titulada *Euclides ab omni noevo vindicatus* ("Euclides liberado de toda falla") en la que utilizó extensamente estos cuadriláteros. Su objetivo era demostrar el Axioma de Paralelismo por reducción al absurdo. Saccheri demostró fácilmente que si en un cuadrilátero ABCD, los ángulos A y B son rectos, y los lados AD y BC son iguales, entonces los lados D y C son iguales. Sin embargo, la primera consideración conocida sobre los cuadriláteros de Saccheri fue hecha por **Omar Khayyam** (1048-1131) a finales del siglo XI.

6.2.11 Proposición. Propiedades de los cuadriláteros de Saccheri.
Todo cuadrilátero de Saccheri cumple las siguientes propiedades:
a) Sus lados son paralelos (En 6.2.18 veremos que es un paralelogramo).
b) Es convexo.
c) Sus diagonales son congruentes.
d) Los ángulos de la cumbre son congruentes, y son ambos agudos o rectos.

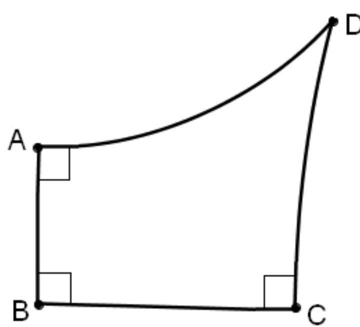
Demostración.
a) Ambas rectas son perpendiculares comunes a la misma recta $\overleftrightarrow{BC}$. (3.6.3)
b) Claramente es un trapecio, y por tanto es convexo por 2.9.9.
c) $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ por SAS, luego $\overline{AC} \cong \overline{BD}$,
d) Siguiendo el argumento del apartado anterior, $\Delta BAD \cong \Delta CDA$ por SSS, y en consecuencia $\angle A \cong \angle D$.

$$0 \leq \delta ABCD = 360 - |\angle A| - |\angle B| - |\angle C| - |\angle D| = 360 - |\angle A| - 90 - 90 - |\angle A| =$$
$$= 180 - 2|\angle A| \Rightarrow 2|\angle A| \leq 180 \Rightarrow |\angle A| \leq 90$$

6.2.12 Proposición.
Dados dos números x e y reales positivos, existe un cuadrilátero de Saccheri con base de longitud x y altura de longitud y.

Demostración. Sabemos que existen en el plano al menos tres puntos A, B y C no alineados.
El punto B lo podemos escoger de forma que $x = \left|\overline{AB}\right|$.
Lanzamos sendas perpendiculares $s_1 = \overrightarrow{AC}$ y $s_2 = \overrightarrow{BD}$ por A y B de forma que C y D son colaterales respecto $\overleftrightarrow{AB}$.
Los puntos C y D los podemos escoger de forma que $y = \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BD}\right|$.
El cuadrilátero $ABCD$ cumplirá las condiciones deseadas.
Los detalles de la demostración quedan como ejercicio.

6.2.13 Definición. Cuadrilátero de Lambert.
Un cuadrilátero de Lambert es un cuadrilátero con al menos tres ángulos rectos.



Nota histórica. El matemático alemán **Johann Heinrich Lambert** (1728–1777) escribió, treinta años después de la publicación de Saccheri (1733), una investigación semejante titulada *Die Theorie der Parallellinien* (La teoría de las paralelas) que no se publicó hasta once años después de su muerte. Lambert eligió un cuadrilátero que contenía tres ángulos rectos (la mitad de un cuadrilátero de Saccheri) y consideró las tres posibles hipótesis para el cuarto ángulo: agudo, recto u obtuso.

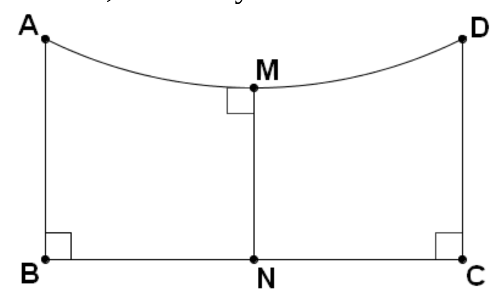
6.2.14 Proposición. Propiedades de los cuadriláteros de Lambert.
Todo cuadrilátero de Lambert cumple las siguientes propiedades:
a) Es un paralelogramo, y por tanto convexo.
b) El cuarto ángulo es agudo o recto.

Demostración.
a) Basta aplicar el teorema de las dobles perpendiculares y 2.8.16.
b) Puesto que es convexo,
$\sigma ABCD = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C| + |\angle D| \leq 360 \Rightarrow 90 + 90 + 90 + |\angle D| \leq 360 \Rightarrow$
$270 + |\angle D| \leq 360 \Rightarrow |\angle D| \leq 90$
Y aplicamos 5.2.2 A3 i 5.2.2 A4.

6.2.15 Proposición.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero de Lambert con ángulos rectos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ y supongamos $\angle D$ agudo. Entonces $\overline{AB} > \overline{CD}$ y $\overline{DA} > \overline{BC}$

Demostración. Veamos que $\overline{AB} > \overline{CD}$.
Supongamos que $\overline{AB} \leq \overline{CD}$. Entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ o $\overline{AB} < \overline{CD}$.
En el primer caso $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ implica que $ABCD$ es un cuadrilátero de Saccheri, luego $\angle A \cong \angle D$, llegando a contradicción.
En el segundo caso $\overline{AB} < \overline{CD}$, entonces existirá un punto C*E*D tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.
Luego $\lozenge ABCE$ será un cuadrilátero de Saccheri, y por tanto $\angle EAB \cong \angle AEC$.
Aplicando el teorema del ángulo exterior, $\angle AEC > \angle D$, pero $\angle D > \angle A = \angle BAD$ que es agudo. Luego $\angle AEC > \angle BAD$. Pero E está en el interior de $\angle BAD$, luego $\angle BAE < \angle BAD$ y por lo tanto $\angle AEC > \angle BAE$, contradiciendo la observación anterior $\angle EAB \cong \angle AEC$.
La segunda desigualdad se demuestra de forma similar.

6.2.16 Proposición. El segmento medio de un cuadrilátero de Saccheri.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero de Saccheri con ángulos rectos $\angle B$ y $\angle C$.
Sea M el punto medio de $\overline{AD}$ y N el punto medio de $\overline{BC}$. Entonces $\angle AMN$ y $\angle BNM$ son rectos. En particular, $ABNM$ y $MNCD$ son cuadriláteros de Lambert.



Demostración. $\Delta ABN \cong \Delta DCN$ por SAS, luego $\overline{AN} \cong \overline{DN}$.
$\Delta AMN \cong \Delta DNM$ por SSS, luego $\angle AMN$ es recto, pues es congruente con su complementario $\angle DMN$.
$\angle A \cong \angle D$ por 6.2.11d, y por lo tanto $\Delta BAM \cong \Delta CDM$ por SAS, y en consecuencia $\overline{BM} \cong \overline{MC}$.
Ahora $\Delta BMN \cong \Delta CMN$ por SSS, y por lo tanto $\angle BNM \cong \angle CNM$, es decir, $\angle BNM$ es un ángulo recto (pues es congruente con su suplementario).

6.2.17 Corolario.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero de Saccheri con ángulos rectos $\angle B$ y $\angle C$.
Supongamos que $ABCD$ no es un rectángulo. Entonces $\overline{AD} > \overline{BC}$.

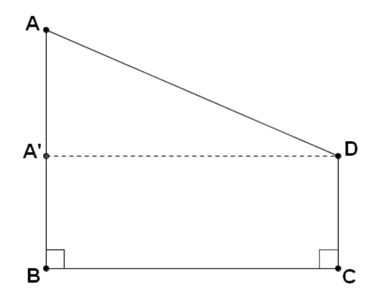
Demostración. Puesto que $ABCD$ no es un rectángulo, $\angle A$ será agudo. Sean M y N como en la proposición anterior. Entonces $ABCD$ es un cuadrilátero de Lambert, y por 6.2.15 tenemos que $\overline{AM} > \overline{BN}$, por lo que $\overline{AD} > \overline{BC}$.

6.2.18 Corolario.
Todos los cuadriláteros de Saccheri son paralelogramos.

Demostración. Sea $ABCD$ un cuadrilátero de Saccheri con ángulos rectos $\angle B$ y $\angle C$.
Sea M y N como en las proposiciones anteriores. Entonces $\overleftrightarrow{MN}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Luego $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$ por 3.6.3. En 2.6.11a ya vimos que $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$.

6.2.19 Lema.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero con ángulos rectos $\angle B$ y $\angle C$, y tal que A y D son colaterales respecto de $\overleftrightarrow{BC}$. Entonces $\overline{AB} > \overline{DC} \Leftrightarrow \angle A < \angle D$.

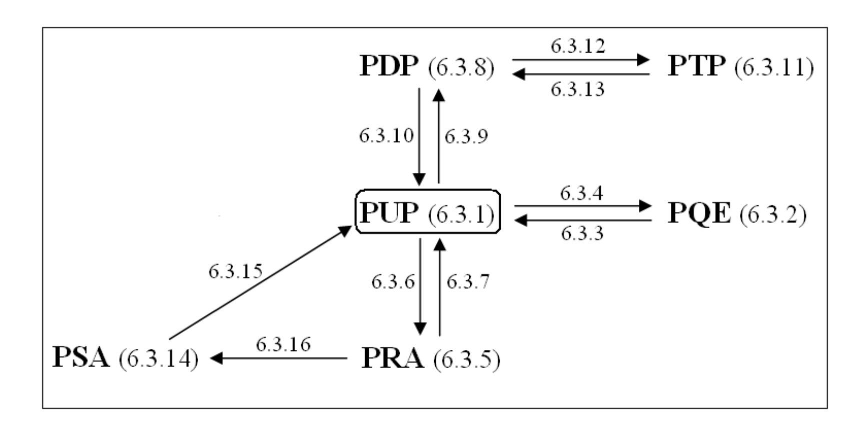
Demostración. Sea A' un punto tal que B*A'*A y $\overline{BA'} \cong \overline{CD}$.



Entonces $A'BCD$ es un cuadrilátero de Saccheri, y por tanto por 6.2.11d $\angle BA'D \cong \angle A'DC$.
Veamos que A' está en el interior de $\angle ADC$: $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ pues ambas rectas son perpendiculares a $\overleftrightarrow{BC}$ (3.6.3). Luego aplicando 2.8.14 tenemos que $ABCD$ es convexo, luego B está en el interior de $\angle ADC$ (2.8.7d). Entonces, puesto que A*A'*B, tenemos que A' pertenecerá al interior de $\angle ADB$ (2.4.6), pero entonces pertenecerá al interior de $\angle ADC$ por 2.6.5. Y puesto que A' está en el interior de $\angle ADC$ se tiene $\angle ADC > \angle A'DC$.
Por otro lado, por el teorema del ángulo exterior $\angle A < \angle BA'D$, y entonces $\angle A < \angle BA'D \cong \angle A'DC < \angle ADC = \angle D$.

6.3 Las condiciones euclídeas principales.

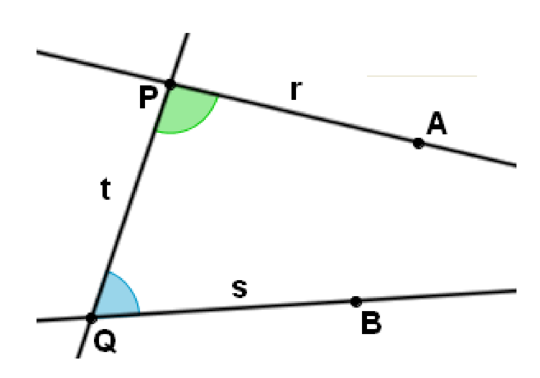
Las condiciones euclídeas son el Postulado de la única paralela (H3.1) o “PUP”, y todos los postulados equivalentes a éste. En esta sección estudiaremos las seis condiciones euclídeas más conocidas y demostraremos la equivalencia entre ellas, siguiendo el esquema siguiente:



6.3.1 Postulado. El Postulado de la única paralela (PUP). (H3.1)
Dada una recta r y un punto P que no pertenece a r, existirá una única recta por P paralela a r.

Un **plano euclídeo** es un plano neutral (es decir, un plano de Hilbert en el que se cumple, además, el Axioma de Dedekind y en el que disponemos de medida para la longitud de segmentos, amplitud de ángulos y el área de polígonos) que además cumple PUP, o cualquier postulado equivalente al mismo.

6.3.2 Postulado. Quinto postulado de Euclides (PQE). (Elementos, 1. Postulado 5)
Supongamos que:
a) $r = \overleftrightarrow{PA}$ y $s = \overleftrightarrow{QB}$ diferentes, con $P \neq Q$.
b) A y B están en el mismo lado respecto a $t = \overleftrightarrow{PQ}$.
c) $|\angle APQ| + |\angle BQP| < 180$
Entonces r y s se cortan en un punto C que está en el mismo lado respecto a t que A y B.



6.3.3 Proposición.

PQE $\Rightarrow$ PUP

Demostración. Sea r una recta y $P \notin r$.
Trazamos la perpendicular t a r por P. Sea Q el punto de intersección con r.
Trazamos la perpendicular s a t por P.
$s // r$, puesto que ambas rectas son perpendiculares a t (3.6.3)
Queremos ver que s es la única recta paralela a r por P.
Supongamos que s_2 es otra recta paralela a r por P.
Tomamos puntos X e Y de s_2 tales que X*P*Y (Axioma B2)
Uno de los ángulos $\angle XPQ$ o $\angle YPQ$ tiene que ser agudo, puesto que no son rectos y son suplementarios.
Luego la suma angular será menor de 180, y aplicando la hipótesis 6.3.2 tenemos que s_2 corta a r en algún punto C, luego no son paralelas.

6.3.4 Proposición.

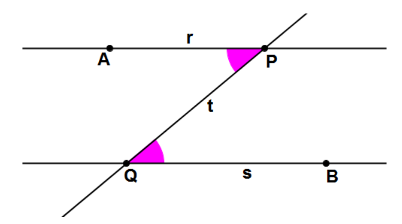
PUP $\Rightarrow$ PQE

Demostración. Sean $r = \overleftrightarrow{PA}$, $s = \overleftrightarrow{QB}$ dos rectas diferentes, con $P \neq Q$.
A y B están en el mismo lado respecto a $t = \overleftrightarrow{PQ}$.
$|\angle APQ| + |\angle BQP| < 180$

Por el Axioma B2 existirá un punto D tal que D*Q*B
$\angle PQD = 180 - \angle PQB$ por ser ángulos suplementarios.
Luego $|\angle PQD| \neq |\angle APQ|$ (porque entonces
$|\angle APQ| + |\angle BQP| = |\angle PQD| + |\angle BQP| = 180 - |\angle BQP| + |\angle BQP| = 180$,
contradiciendo la hipótesis)
Por lo tanto, existirá una semirrecta $\overrightarrow{PX}$ tal que $\angle PQD \equiv \angle XPQ$, y con X en el mismo lado que A respecto a t.
Sea $r_2 = \overleftrightarrow{PX}$. Entonces $r_2 // s$ por el Teorema de los ángulos internos alternos (2.6.1)
Por lo tanto, aplicando PUP, r no puede ser paralela a s.
Sea $C = r \cap s$. Sólo queda ver que C está en el mismo lado que A respecto a t.
Supongamos, por lo contrario, que C y A están en lados opuestos.
Entonces tenemos un triángulo ΔCPQ en el cual $\angle CPQ$ y $\angle APQ$ son suplementarios, $\angle CQP$ y $\angle BQP$ son suplementarios, y por hipótesis, $|\angle APQ| + |\angle BQP| < 180$, luego
$|\angle CPQ| + |\angle CQP| = 180 - |\angle APQ| + 180 - |\angle BQP| = 360 - (|\angle APQ| + |\angle BQP|) > 180$
Contradiciendo 3.5.2.

6.3.5 Postulado. Recíproco del teorema de los ángulos internos alternos (PRA).
Dadas dos rectas paralelas r y s, y una recta transversal t, los ángulos internos alternos son congruentes.

Más detalladamente: Sean $r = \overleftrightarrow{PA}$, $s = \overleftrightarrow{QB}$ dos rectas paralelas, y $t = \overleftrightarrow{PQ}$. Supongamos que A y B están en lados opuestos respecto de la recta t. Entonces $\angle APQ \cong \angle BQP$.



Observación: El recíproco es un teorema en un plano de Hilbert (3.6.2)

6.3.6 Proposición.

$$\text{PUP} \Rightarrow \text{PRA}$$

Demostración. Sean $r = \overleftrightarrow{PA}$, $s = \overleftrightarrow{QB}$ dos rectas paralelas, y $t = \overleftrightarrow{PQ}$. Supongamos que A y B están en lados opuestos respecto de la recta t.
Existirá un punto A' en el mismo lado que A respecto de t tal que $\angle A'PQ \cong \angle BQP$.
Sea $r' = \overleftrightarrow{PA'}$. Ahora podemos aplicar el Teorema de los ángulos internos alternos (3.6.2) para asegurar que $r' // s$, pero entonces aplicando la hipótesis PUP, tenemos que $r' = r$, por lo que $\angle APQ = \angle A'PQ \cong \angle BQP$.

6.3.7 Proposición.

$$\text{PRA} \Rightarrow \text{PUP}$$

Demostración. Sea r una recta y $P \notin r$. Trazamos la perpendicular t a r por P. Sea Q el punto de intersección con r. Trazamos la perpendicular s a t por P. Entonces $s // r$ puesto que ambas rectas son perpendiculares a t (3.6.3). Supongamos que existe otra recta s_2 paralela a r. Aplicando PRA, tenemos que $s_2 \perp t$, luego $s = s_2$ por la unicidad de la recta perpendicular.

6.3.8 Postulado. Postulado de Proclo (PDP).
Si $r // s$ y t corta a r, entonces t corta a s.

Nota histórica: El filósofo griego Proclo (410-485) fue una importante figura del neoplatonismo. Nacido en Bizancio, marchó a Atenas para estudiar elocuencia con Leonas de Isauria y cuando este hubo de emigrar a Bizancio le llevó consigo. Aunque vivió en la época de decadencia del helenismo, su obra ha resultado muy importante para un mejor conocimiento de Euclides y sus Elementos.

6.3.9 Proposición.

$$\text{PUP} \Rightarrow \text{PDP}$$

Demostración. Sea una recta r paralela a s, y sea $P = r \cap t$. Por P sólo puede pasar una única paralela a s, luego t no puede ser paralela a s, es decir, t corta a s.

6.3.10 Proposición.

$$\text{PDP} \Rightarrow \text{PUP}$$

Demostración. Sea r una recta y $P \notin r$.
Trazamos la perpendicular t a r por P. Sea Q el punto de intersección con r.
Trazamos la perpendicular s a t por P.
$s // r$, puesto que ambas rectas son perpendiculares a t (3.6.3)
Sea s_2 cualquier otra recta que pasa por P.
Puesto que s_2 corta a s, aplicando PDP deducimos que s_2 corta a r, es decir, existe una única paralela a r.

6.3.11 Postulado. Transitividad del paralelismo (PTP).
Sean r, s y t tres rectas diferentes. Si $r // s$ y $s // t$, entonces $r // t$.

Nota histórica. Este postulado se conoce también como "**Postulado Playfair**" y se debe al físico y matemático escocés **John Playfair** (1748–1819), aunque ya había sido estudiado por **Proclo** en el siglo V. Playfair lo expuso como negación de su contrario: Si dos rectas se cortan, no pueden ser paralelas a una tercera.

6.3.12 Proposición.

$$\text{PDP} \Rightarrow \text{PTP}$$

Demostración. Sean r, s y t tres rectas diferentes, y supongamos que $r // s$ y $s // t$.
Supongamos que r y t no son paralelas.
Aplicando PDP deducimos que si r corta a t, entonces r también tiene que cortar a s, contradiciendo la hipótesis $r // s$.

6.3.13 Proposición.

$$\text{PTP} \Rightarrow \text{PDP}$$

Demostración. Sea $r // s$ y supongamos que t corta la recta r.
Supongamos que t fuera paralela a s. Entonces aplicando PTP tendríamos que r es paralela a s, contradiciendo la hipótesis que t corta r.

6.3.14 Postulado. Postulado de la suma de los ángulos de un triángulo (PSA).
Todos los triángulos tienen defecto cero, o equivalentemente, en todo triángulo ΔABC se cumple $|\angle A| + |\angle B| + |\angle C| = 180$.
Recordemos que en todo plano neutral se cumple que todos los triángulos cumplen $|\angle A| + |\angle B| + |\angle C| \leq 180$, por el Teorema Saccheri-Legendre (6.1.6).

6.3.15 Proposición.

PSA$\Rightarrow$PUP

Demostración. Sea una recta r y $P \notin r$.
Trazamos una perpendicular m a r por P. Sea Q el pie de esta perpendicular en r. Sea s la recta perpendicular a m por P. Sabemos que $s // r$ por ser ambas perpendiculares a m.
Supongamos que existe otra recta s_2 paralela a r por P.
Sea C un punto de s_2 que sea colateral con Q respecto a s.
Trazamos por C una perpendicular a m. Sea B el punto de intersección entre dicha perpendicular y m. Así pues, ΔPCB será un triángulo rectángulo en $\angle B$.
Sea ahora un punto C_1 tal que $P * C * C_1$ y $\overline{PC} \cong \overline{CC_1}$, y por lo tanto $\left|\overline{PC_1}\right| = 2\left|\overline{PC}\right|$.
Trazamos ahora una perpendicular por C_1 a m, y sea B_1 su punto de intersección con m.
Así pues, ΔPC_1B_1 será un triángulo rectángulo en $\angle B_1$.
P y C_1 están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$, luego $P * B * B_1$. Ahora podemos aplicar el lema 2 para concluir que $\left|\overline{PB_1}\right| = 2\left|\overline{PB}\right|$.
Repitiendo este proceso podemos obtener una sucesión de puntos $C_1, C_2, ...$ y $B_1, B_2, ...$ tal que $\left|\overline{PB_k}\right| = 2^k\left|\overline{PB}\right|$.
Aplicando el Principio Arquimediano, existirá un k suficientemente grande para el cual $\left|\overline{PB_k}\right| > \left|\overline{PQ}\right|$.
Puesto que $\overleftrightarrow{B_kC_k} // r$, tenemos $B_k \approx_r C_k$. Así pues, P y C_k están en lados opuestos de r, por lo cual r corta a $\overline{PC_k}$. Pero $s_2 = \overleftrightarrow{PC_k}$, luego s_2 y r no pueden ser paralelas.

6.3.16 Teorema. (Elementos 1.32)

PRA$\Rightarrow$PSA

y el postulado PRA es equivalente a que el ángulo exterior a un vértice de un triángulo es igual a la suma de sus dos ángulos interiores opuestos.

Demostración. Sea ΔABC un triángulo. Prolongamos $\overline{BC}$ con un punto D y sea $\overleftrightarrow{CE}$ la única recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por C (En 6.3.7 se ha demostrado que PRA$\Rightarrow$PUP).
Tomamos E de forma que esté en el interior de $\angle ACD$.
Aplicando PRA (y en 6.3.6 hemos demostrado que PUP$\Rightarrow$PRA) tenemos que $\angle ECA \cong \angle A$ y $\angle DCE \cong \angle B$.
Luego $|\angle DCA| = |\angle DCE| + |\angle ECA| = |\angle B| + |\angle A|$.
Por otro lado, $\sigma ABC = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C| = |\angle DCA| + |\angle ACB| = 180^{\circ}$ por ser ángulos suplementarios. Por otro lado, si suponemos que $|\angle DCA| = |\angle B| + |\angle A|$, entonces claramente $180^{\circ} = |\angle DCA| + |\angle ACB| = |\angle B| + |\angle A| + |\angle C|$.

6.3.17 Teorema.

PSA$\Rightarrow$PRA

Demostración. PSA$\Rightarrow$PUP por 6.3.15, y PUP$\Rightarrow$PRA por 6.3.6.

6.3.18 Plano euclídeo.
Llamaremos plano euclídeo a todos los resultados que se pueden obtener añadiendo el postulado PUP (6.3.1), o cualquier postulado equivalente a éste, a un plano neutral.

6.3.19 Proposición.
En un plano euclídeo, si A, B, C y D son cuatro puntos tales que

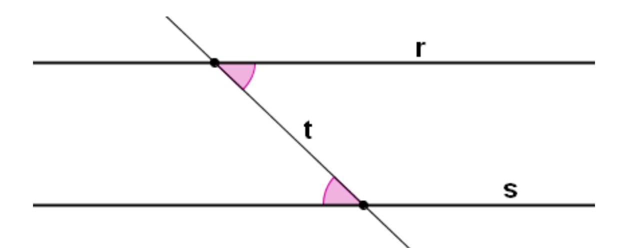
a) A, B, C no son colineales y D está en el interior de $\angle ABC$

b) A, D y C no son colineales y B está en el interior de $\angle ADB$

Entonces $|\angle DAB| + |\angle ABC| + |\angle BCD| + |\angle CDA| = 360$.

Demostración. Por 2.8.11 el cuadrilátero $ABCD$ es convexo, luego por 6.2.2 y PSA se cumple $\sigma ABCD = \sigma ABC + \sigma ADC = 180 + 180 = 360$.

6.3.20 Teorema. Teorema de los ángulos internos alternos.
En un plano euclídeo, dadas dos rectas r y s, y una recta transversal t, las rectas r y s serán paralelas si y sólo si los ángulos internos alternos son iguales.



Demostración. $\Rightarrow$ es 6.3.5 y $\Leftarrow$ es 3.6.2.

6.3.21 Proposición.
En un plano euclídeo, un cuadrilátero $ABCD$ es paralelogramo si y sólo si sus lados opuestos son congruentes.

Demostración. Sea un cuadrilátero $ABCD$. Queremos ver $\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC} \\ \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{AD} \cong \overline{BC} \\ \overline{AB} \cong \overline{CD} \end{array}\right.$.

Trazamos la diagonal $\overleftrightarrow{BD}$ para obtener dos triángulos ΔDAB y ΔDCB.
Supongamos que $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC} \wedge \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$. $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow \angle ABD \cong \angle BDC$, y $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \angle ADB \cong \angle DBC$ por PRA.
Luego $\Delta DAB \cong \Delta DCB$ por ASA, de lo que deducimos que $\overline{AD} \cong \overline{BC} \wedge \overline{AB} \cong \overline{CD}$.
Supongamos ahora que $\overline{AD} \cong \overline{BC} \wedge \overline{AB} \cong \overline{CD}$. Entonces $\Delta DAB \cong \Delta DCB$ por SSS (3.8.4) y aplicando AIA tenemos que $\angle ADB \cong \angle DBC \Rightarrow \overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$ y $\angle ABD \cong \angle BDC \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$.

6.4 El teorema del Defecto Cero de Legendre.

En esta sección vamos a probar el teorema del Defecto Cero de Legendre: Si existe un triángulo con defecto cero, entonces todos los triángulos tienen defecto cero.

6.4.1 Proposición.
Si existe un triángulo con defecto cero, entonces existe un triángulo rectángulo con defecto cero.

Demostración. Sea ΔABC un triángulo tal que $\delta ABC = 0$. Por el lema 3.7.12 sabemos que ΔABC tiene dos ángulos agudos. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que son $\angle A$ y $\angle C$. Trazamos la perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ por el vértice B. Sea F su punto de intersección con $\overleftrightarrow{AC}$. Por el lema 3.7.11 tenemos que A*F*C. El triángulo ΔAFB es rectángulo en F y cumple $\delta AFB = 0$ por 6.1.7.

6.4.2 Proposición.
Si existe un triángulo con defecto cero, entonces existe un rectángulo.

Demostración. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Supongamos que $\delta ABC = 0$, entonces $|\angle ACB| + |\angle ABC| = 90 \Rightarrow |\angle ACB| = 90 - |\angle ABC|$.

Trazamos por C una recta $\overleftrightarrow{CD}$ perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ tal que B y D estén al mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Podemos suponer además que $\overline{CD} = \overline{AB}$. Las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas pues son perpendiculares comunes a $\overleftrightarrow{AC}$. El cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrilátero de Saccheri y por tanto es convexo (6.2.12), luego B está en el interior de $\angle ACD$. Así pues $|\angle ACB| + |\angle BCD| = |\angle ACD| = 90$. Pero $|\angle ACB| = 90 - |\angle ABC|$, luego

$$90 - |\angle ABC| + |\angle BCD| = 90 \Rightarrow -|\angle ABC| = |\angle BCD| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\angle ABC| = |\angle BCD| \Rightarrow \angle ABC \cong \angle BCD$$

Entonces, por SAS deducimos que $\Delta ABC \cong \Delta BCD$, y por tanto $\angle D \cong \angle A$ es un ángulo recto, $\angle ABC \cong \angle DCB$ y $\angle CBD \cong \angle ACB$.
Finalmente, puesto que $\lozenge ABCD$ es convexo, C está en el interior de $\angle ABD$, y $|\angle ABD| = |\angle ABC| + |\angle CBD| = |\angle DCB| + |\angle ACB| = 90$. Luego todos los ángulos son rectos, y por lo tanto es un rectángulo.

6.4.3 Proposición.
Sea ΔXYZ un triángulo rectángulo con ángulo recto $\angle X$. Sea M el máximo de $|\overline{XY}|$ y $|\overline{XZ}|$. Supongamos que existe un rectángulo $\lozenge ABCD$ cuyos lados tienen longitudes mayores que M. Entonces $\delta XYZ = 0$.

Demostración. Supongamos que $\overline{XY} < \overline{AB}$ y $\overline{XZ} < \overline{AB}$. Entonces existirán puntos A*Y'*B y A*Z'*D tales que $\overline{XY} \cong \overline{AY'}$ y $\overline{XZ} \cong \overline{AZ'}$.
Puesto que $\lozenge ABCD$ es un rectángulo, $\delta ABCD = 0$ (6.2.4). Y puesto que $\delta ABCD = \delta ABD + \delta BCD$, tenemos que $\delta ABD = 0$. Pero A*Y'*B, luego $\delta ABD = \delta AY'D + \delta Y'BD$, y por tanto $\delta AY'D = 0$.

Por último y de la misma manera, puesto que A*Z'*D,
$0 = \delta AY'D = \delta AY'Z' + \delta Y'Z'D \Rightarrow \delta AY'Z' = 0$.
Pero $\Delta XYZ \cong \Delta AY'Z'$ (por SAS), así que $\delta XYZ = 0$.

6.4.4 Proposición.
Supongamos que todo triángulo rectángulo tiene defecto cero. Entonces todo triángulo tiene defecto cero.

Demostración. Sea ΔABC un triángulo. Este triángulo tiene dos ángulos agudos por 3.7.12. Supongamos que sean $\angle A$ y $\angle C$. Trazamos la perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ por el vértice B. Sea F su punto de intersección con $\overleftrightarrow{AC}$. Por el lema 3.7.11 tenemos que A*F*C. Los triángulos ΔAFB y ΔCBF son triángulos rectángulos .
Por último $\delta ABC = \delta AFB + \delta CBF = 0 + 0 = 0$.

6.4.5 Proposición.
Si existe un triángulo con defecto cero, entonces existe un rectángulo.

Demostración. Supongamos que existe un triángulo con defecto cero. Entonces por 6.4.1 existirá un triángulo rectángulo con defecto cero. Luego por 6.4.2 existirá un rectángulo.

6.4.6 Proposición.
Si existen los rectángulos, todos los triángulos tienen defecto cero.

Demostración. Este rectángulo lo podemos hacer arbitrariamente grande por la proposición 6.2.9. Luego por 6.4.3 todos los triángulos rectángulos tendrán defecto cero. Por último, por 6.4.4 todos los triángulos tendrán defecto cero.

6.4.7 Corolario. El teorema del Defecto Cero de Legendre.
Si existe un triángulo con defecto cero, entonces todos los triángulos tienen defecto cero.

Demostración. Basta aplicar 6.4.5 y 6.4.6.

6.4.8 Corolario.
Si existe un triángulo con defecto cero, entonces todos los cuadriláteros convexos tienen defecto cero.

Demostración. Todos los triángulos tendrán defecto cero por 6.4.7. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Entonces, por 6.2.2, $\delta ABCD = \delta ABD + \delta BCD = 0 + 0 = 0$.

Los siguientes corolarios sientan las bases para la geometría hiperbólica:

6.4.9 Corolario.
Si existe un triángulo con defecto positivo, entonces todos los triángulos tienen defecto positivo.

Demostración. Si existe un triángulo con defecto cero, entonces por 6.4.7 todos los triángulos tendrían defecto cero, contradiciendo la hipótesis.

6.4.10 Corolario.
Si existe un triángulo con defecto positivo, entonces no existen rectángulos.

Demostración. Si existen rectángulos todos los triángulos tienen defecto cero por 6.4.6, contradiciendo la hipótesis.

6.4.11 Corolario.
Si no existen rectángulos, todos los triángulos tienen defecto positivo.

Demostración. Supongamos que exista algún triángulo con defecto cero. Entonces, por 6.4.5, existirá un rectángulo, contradiciendo la hipótesis.

6.5 Otras Condiciones euclídeas.

6.5.1 Postulado. Existencia de un triángulo con defecto cero (PET).
Existe al menos un triángulo con defecto cero.

6.5.2 Teorema. PET es una condición euclídea.

$$\text{PET} \Leftrightarrow \text{PUP}$$

Demostración. Si existe un triángulo con defecto cero, entonces todos los triángulos tienen defecto cero por 6.4.7, y si los triángulos tienen defecto cero, entonces se cumple PUP por 6.3.15. Recíprocamente, Si se cumple PUP entonces todos los triángulos tienen defecto cero por 6.3.6 y 6.3.16, luego existirá algún triángulo con defecto cero (pues los triángulos existen pues existen tres puntos no colineales por el Axioma I3).

6.5.3 Postulado. Existencia de rectángulos (PER).
Existe al menos un rectángulo.

Observación. De este postulado se deduce que en un plano en el que no se cumpla el Quinto Postulado no existen los rectángulos.

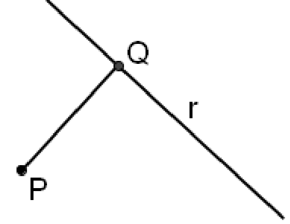
6.5.4 Teorema. PER es una condición euclídea.

$$\text{PER} \Leftrightarrow \text{PUP}$$

Demostración. Si existen los rectángulos, entonces todos los triángulos tienen defecto cero por 6.4.6. Recíprocamente, PUP implica PRA por 6.3.6, PARA implica PSA por 6.3.16, y PSA implica PER por 6.4.2.

6.5.5 Definición. Distancia de un punto a una recta.
Sea $P \notin r$. Definimos la distancia de P a r, y escribiremos dist(P,r), como la longitud del segmento $\overline{PQ}$, donde Q es la proyección ortogonal de P en r (3.6.6).

$$dist(P,r) = \left|\overline{P\, pr(P,r)}\right|$$



6.5.6 Proposición.
La proyección ortogonal Q de P en r es el punto de la recta más próximo a P. Para cualquier otro punto Q' de la recta se cumple $\left|\overline{PQ}\right| < \left|\overline{PQ'}\right|$.

Demostración. Sea $Q' \in r$, $Q' \neq Q$. Consideremos el triángulo $\Delta PQQ'$. Es un triángulo rectángulo en Q, luego $\angle Q'$ es agudo (3.7.6). Por lo que $\angle Q' < \angle Q$ y por tanto $\overline{PQ'} > \overline{PQ}$ (3.7.7). Supongamos que existe un $Q' \in r$, $Q' \neq Q$, para el cual $\overline{PQ'} \cong \overline{PQ}$. El triángulo $\Delta PQQ'$ sería isósceles en P, luego $\angle Q' \cong \angle Q$ recto, llegando a contradicción pues forzosamente en un triángulo rectángulo $\angle Q'$ ha de ser agudo.

6.5.7 Postulado. Equidistancia entre rectas paralelas (PEP).
Dadas dos rectas paralelas r y s, todos los puntos de r están a la misma distancia de s.

6.5.8 Lema.
Supongamos que existen dos rectas paralelas r y s y tres puntos diferentes P, Q y R en r equidistantes a s. Entonces existen los rectángulos.

Demostración. Supongamos $r // s$, $P, Q, R \in r$, diferentes.
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, $P * Q * R$.
Sea A, B y C las proyecciones perpendiculares de P, Q y R respectivamente.
A, B y C serán puntos diferentes pues las rectas perpendiculares a cada punto son diferentes.
Por hipótesis, $\overline{PA} \cong \overline{QB} \cong \overline{RC}$, luego $PABQ$ es un cuadrilátero de Saccheri, y por lo tanto $|\angle APQ| = |\angle BQP| \leq 90$ (6.2.14), y también $QBCR$ es un cuadrilátero de Saccheri, y por lo tanto $|\angle BQR| = |\angle CRQ| \leq 90$.
Por otro lado, $\angle BQP$ y $\angle BQR$ son suplementarios, luego $|\angle BQP| + |\angle BQR| = 180$.
Para que esto suceda, la única posibilidad es $|\angle BQP| = |\angle BQR| = 90$, luego $|\angle APQ| = |\angle BQP| = 90$, es decir, $PABQ$ es un rectángulo.
Ahora, aplicando 6.2.7, llegamos a $\overline{AF} \cong \overline{BG}$.

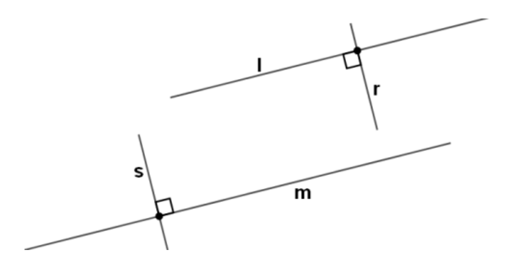
6.5.9 Proposición. PEP es una condición euclídea.

$$\text{PEP} \Leftrightarrow \text{PUP}$$

Demostración. Veamos PEP $\Rightarrow$ PUP. Si se cumple PEP, entonces por el lema anterior 6.5.8 existen los rectángulos. Pero la existencia de rectángulos es una condición euclídea por 6.5.4.
Veamos ahora PUP $\Rightarrow$ PEP. Sean dos rectas paralelas r y s. Y sean A y B dos puntos diferentes de r.
Sean A' y B' las proyecciones perpendiculares de A y B en s, respectivamente.
Luego $\angle AFG$ y $\angle FGB$ son rectos, y $\overline{AF} \cong \overline{BG}$.
Sea r' una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AF}$ y que pase por A. Las rectas r' y s serán paralelas pues ambas son perpendiculares comunes a $\overleftrightarrow{AF}$. Por PUP, $r = r'$, y por tanto $\angle FAB$ será también recto.
De la misma forma demostramos que $\angle ABG$ es recto, luego $AFGB$ será un rectángulo.

6.6 Aún más condiciones euclídeas.

6.6.1 Postulado. El paralelismo se transmite por perpendicularidad. (PTP)
Si $l \,//\, m$, $r \perp l$ y $s \perp m$, entonces $r = s$ o $r \,//\, s$



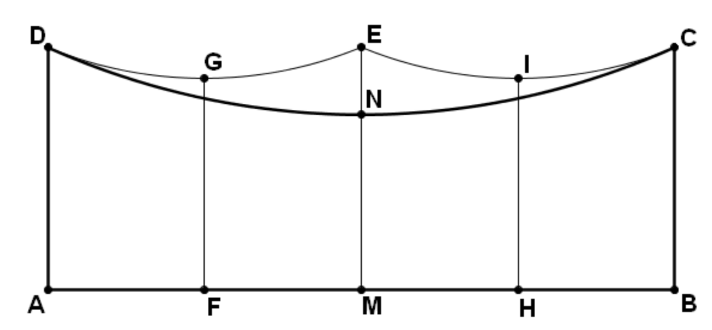
6.6.2 Proposición.
PTP es una condición euclídea.

6.6.4 Proposición.
En un plano euclídeo, las mediatrices de cortan en un punto.

Demostración. Sea ΔABC un triángulo, C' el punto medio de $\overline{AB}$, B' el punto medio de $\overline{AC}$, sea r la perpendicular a $\overline{AB}$ por B' y sea s la perpendicular a $\overline{AB}$ por B'.
Si $r \,//\, s$, aplicando 6.3.22 tendríamos o bien $\overline{AB} = \overline{AC}$ o bien $\overline{AB} \,//\, \overline{AC}$, dos posibilidades imposibles en un triángulo.

6.6.5 Proposición.
Si no se cumple el Axioma de Paralelismo, entonces existe un triángulo en el que dos de sus mediatrices no se cortan.

Demostración. Si no se cumple el Axioma de Paralelismo, entonces no existen los rectángulos (6.5.3). Luego los cuadriláteros de Saccheri no son rectángulos, y por tanto sus ángulos de la cumbre son agudos, no rectos.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero de Sacheri con ángulos rectos en A y en B, y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.
Sea M el punto medio de $\overline{AB}$ y N el punto medio de $\overline{CD}$. Puesto que el ángulo $\angle D$ es agudo, se cumple $\angle D < \angle MND$ y por tanto $\overline{MN} < \overline{AD}$ por 6.2.19. Sea E el punto tal que $M * N * E$ y $\overline{ME} \cong \overline{AD}$.
Vamos a demostrar que al menos dos de las mediatrices del triángulo ΔDEC no se cortan en un punto.
Por 6.2.16 sabemos que $\angle AME$ y $\angle BME$ son rectos, luego $AMED$ y $MBCE$ son cuadriláteros de Sacheri.
Sea F el punto medio de $\overline{AM}$ y G el punto medio de $\overline{DE}$. Nuevamente por 6.2.16 la recta $\overleftrightarrow{FG}$ será mediatriz de $\overline{AM}$ y de $\overline{DE}$.
Y de la misma manera, si H es el punto medio de $\overline{MB}$ y I es el punto medio de $\overline{EC}$, por 6.2.16 la recta $\overleftrightarrow{HI}$ será mediatriz de $\overline{MB}$ y de $\overline{EC}$.



Pero las rectas $\overleftrightarrow{FG}$ y $\overleftrightarrow{HI}$ son paralelas pues son perpendiculares comunes a $\overleftrightarrow{AB}$ (3.6.3). Así pues, en el triángulo ΔDEC las mediatrices de los lados $\overline{DE}$ y $\overline{EC}$ no se cortan.

6.6.6 Corolario.
La circunscribilidad (ver 11.5.1) de los triángulos es una condición euclídea.

Demostración. En 11.5.2 veremos que en un plano euclídeo todo triángulo es circunscribible. En el mismo apartado se demuestra que si un triángulo es circunscribible, sus tres mediatrices se cortan en un punto, cosa que no sucede en un plano que no es euclídeo, como acabamos de demostrar en 6.6.5.

Fuente: http://mathed.byu.edu/~williams/Classes/362F2006/Notes/Circles%20and%20Triangles.pdf

Volumen II: Geometría euclídea

A partir de este punto, y mientras no se diga lo contrario, vamos a suponer que trabajamos sobre un plano euclídeo, esto es, un plano neutral en el que, además, se cumple el Postulado de la única paralela (o cualquiera de sus postulados equivalentes que hemos visto en el tema anterior).

7 Paralelogramos.

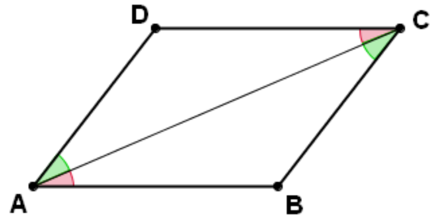
7.1 Paralelogramos.

7.1.1 Definición. Paralelogramo.
Recordemos la definición de 2.8.15: Un paralelogramo es un cuadrilátero $ABCD$ en el que los lados opuestos son paralelos, es decir, la recta $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$. En 2.8.16 se demostró que todo paralelogramo es un trapecio y por tanto es un cuadrilátero convexo.

7.1.2 Teorema. Caracterización de los paralelogramos.
En un plano euclídeo son equivalentes:
a) El cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.
b) Cada diagonal determina dos triángulos congruentes. (Elementos 1.34)
c) Dos de sus lados opuestos son congruentes. (Elementos 1.34)
d) Los ángulos opuestos son congruentes. (Elementos 1.34)
e) Las diagonales se cortan por su punto medio.

Nota: Para las caracterizaciones c) y d) estamos suponiendo que trabajamos con cuadriláteros simples.

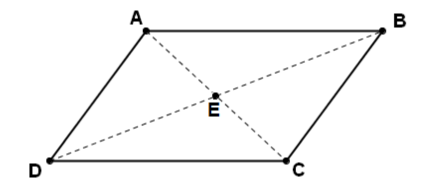
Demostración:
$a \Rightarrow b$) Trazamos la diagonal $\overline{AC}$, y consideramos los triángulos ΔADC y ΔABC. Los ángulos $\angle DCA$ y $\angle BAC$ son congruentes, pues son los ángulos internos alternos determinados por dos rectas paralelas (6.3.20). De la misma forma los ángulos $\angle DAC$ y $\angle ACB$ son congruentes, y se cumple trivialmente $\overline{AC} \cong \overline{AC}$, luego $\Delta ADC \cong \Delta ABC$ por el criterio ASA.



$a \Rightarrow c$) De $\Delta ADC \cong \Delta ABC$ se deduce directamente $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

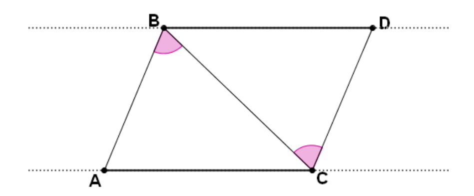
$a \Rightarrow d$) Siguiendo el razonamiento anterior,
$\angle A = \angle BAC + \angle CAD = \angle ACD + \angle ACB = \angle C$, y de la misma forma se demuestra $\angle D = \angle B$.
$a \Rightarrow e$) Sea $O = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ el punto de corte de las dos diagonales (En 2.8.12 vimos que las dos diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan en un punto). Los triángulos ΔAOB y ΔCOD serán congruentes por el criterio ASA, pues ya hemos visto

que $\angle OAB \cong \angle OCD$, $\angle OBA \cong \angle ODC$ y por el apartado a) sabemos que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
Luego $\overline{DO} \cong \overline{OB}$ y $\overline{AO} \cong \overline{OC}$.
$c \Rightarrow a$) Trazamos la diagonal $\overline{AC}$. Los triángulos ΔADC y ΔCBA serán congruentes por el criterio SSS, pues por hipótesis $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, y trivialmente $\overline{AC} \cong \overline{AC}$.
Luego $\angle DAC \cong \angle ACB$ y por tanto $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$ por 6.3.20. De la misma forma
$\angle DCA \cong \angle BAC \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$.
$d \Rightarrow a$) Trazamos la diagonal BD.
Por hipótesis: $\angle B = \angle D \Rightarrow \angle ABD + \angle DBC = \angle ADB + \angle BDC$
Sabemos que $180 = \angle A + \angle ABD + \angle ADB = \angle C + \angle BDC + \angle DBC$
$\angle A = \angle C$, luego $\angle ABD + \angle ADB = \angle BDC + \angle DBC$
Restando, $\angle DBC - \angle ADB = \angle ADB - \angle DBC$
Y por tanto $\angle DBC + \angle DBC = \angle ADB + \angle ADB \Rightarrow \angle DBC = \angle ADB$
Y aplicando 3.6.2 $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$
$e \Rightarrow c$) Sea E el punto de corte de las diagonales.



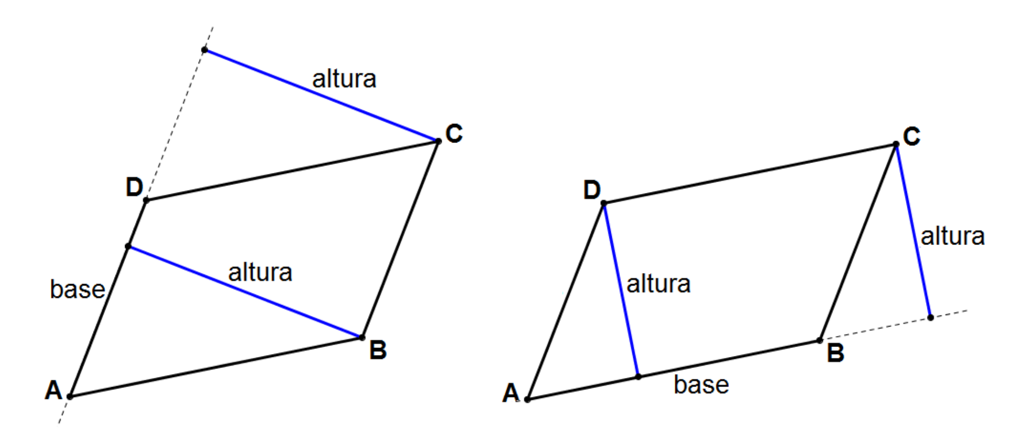
Basta aplicar el criterio SAS a los triángulos ΔAED y ΔBEC teniendo en cuenta $\overline{AE} \cong \overline{EC}$, $\overline{DE} \cong \overline{BE}$ y $\angle AED \cong \angle BEC$ por ser ángulos opuestos por el vértice para deducir que $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. De forma similar, con los triángulos ΔAEB y ΔDEC llegamos a $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

c) Supongamos que $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Trazamos el segmento $\overline{BC}$ y observamos que los triángulos ΔABC y ΔDCB son congruentes por el criterio SAS y 6.3.20.



Luego $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, y por tanto podemos aplicar el teorema 7.1.2c para deducir que es un paralelogramo.

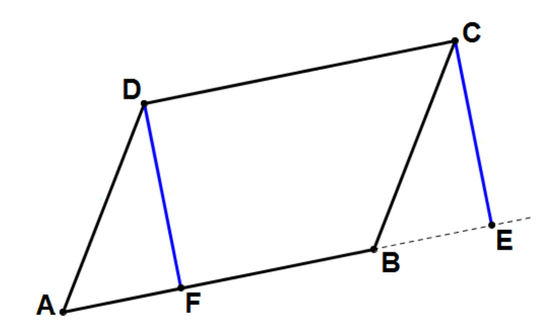
7.1.3 Definición. Bases y alturas de un paralelogramo.
Dado un paralelogramo $ABCD$, diremos **base** a cualquiera de sus lados, diremos **altura** al segmento perpendicular a dicha base y que pasa por uno de los dos vértices del lado opuesto.



Por lo tanto todo paralelogramo tiene cuatro posibles bases y ocho posibles alturas.

7.1.4 Proposición.
Dado un paralelogramo $ABCD$ y fijada una base $\overline{AB}$, sus dos alturas asociadas por C y por D son congruentes.

Demostración. Sea E el punto de corte con $\overleftrightarrow{AB}$ de la altura por C y sea F el punto de corte con $\overleftrightarrow{AB}$ de la altura por D.

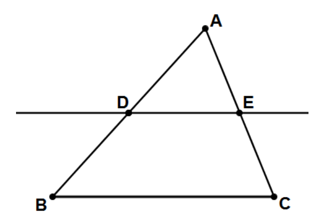


El cuadrilátero $FECD$ es un paralelogramo pues sus cuatro ángulos son rectos por 6.3.22, luego por 7.1.2c sus lados opuestos serán congruentes, en particular $\overline{DF} \cong \overline{CE}$.

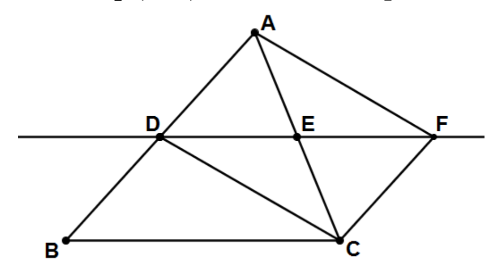
7.2 El conector de puntos medios.

7.2.1 Teorema. El conector de puntos medios de un triángulo.

Dado un triángulo ΔABC, si D es el punto medio de $\overline{AB}$ y E es el punto medio de $\overline{AC}$, entonces $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$, y $\left|\overline{DE}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{BC}\right|$



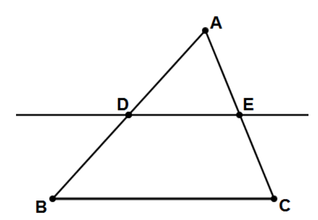
Demostración. En la semirrecta $op(\overrightarrow{ED})$ marcamos el punto F tal que $\overline{ED} = \overline{EF}$.



El cuadrilátero $DCFA$ es un paralelogramo pues sus diagonales se cortan en el punto medio (7.1.2e). Por lo tanto $\overline{CF}$ es paralelo y congruente con $\overline{DA}$.
Por ser D el punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{BD} \cong \overline{DA}$, luego $\overline{BD} \cong \overline{CF}$.
Ahora aplicando 7.1.3 tenemos que $\lozenge BCFD$ es un paralelogramo, y por tanto $\overline{BC}$ y $\overline{DF}$ son paralelos y congruentes.
Por ser E el punto medio de $\overline{DF}$, $\left|\overline{DE}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{DF}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{BC}\right|$.

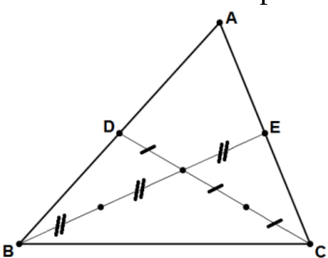
7.2.2 Proposición.

Existe un recíproco parcial para el lema anterior que puede ser útil.
Dado un triángulo ΔABC, y sea D el punto medio de $\overline{AB}$.
Si la recta r pasa por D y es paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, entonces pasa por el punto medio de $\overline{AC}$, y se cumple $\left|\overline{DE}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{BC}\right|$.



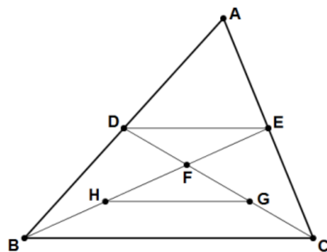
Demostración. Por el Teorema de Pasch (2.2.5), y puesto que r no puede pasar por $\overline{BC}$, la recta r cortará en un punto E’ a $\overline{AC}$.
Sea E el punto medio del segmento $\overline{AC}$. Por el lema anterior, $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$. Luego unicidad de la paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ por D, se tendrá que $\overleftrightarrow{DE} = \overleftrightarrow{DE'}$, y por ser E’ el único punto de corte con $\overline{AC}$, $E = E'$, y basta aplicar el lema 7.2.1.

7.2.3 Corolario.
Dos medianas de un triángulo se trisecionan en su punto de intersección.



Demostración. Dado un triángulo ΔABC, si D es el punto medio de $\overline{AB}$ y E es el punto medio de $\overline{AC}$, aplicamos el lema anterior para deducir que $\overline{DE} // \overline{BC}$ y $|\overline{DE}| = \frac{1}{2}|\overline{BC}|$.

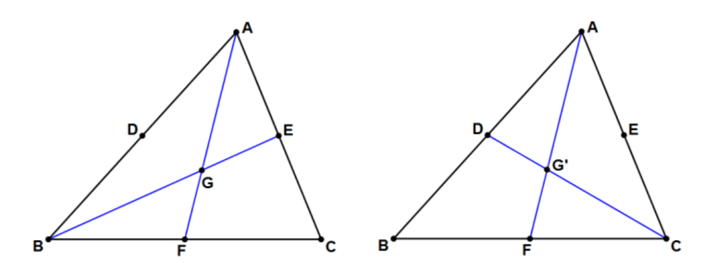
Sea F el punto de intersección de las dos medianas $\overline{CD}$ y $\overline{BE}$ (Se cortan pues $\lozenge BCED$ es un trapecio por 7.2.1 y aplicamos 2.8.14 y 2.8.12). Sea G el punto medio de $\overline{BF}$ y H el punto medio de $\overline{CF}$.



Aplicando nuevamente el lema anterior al triángulo ΔBCF, tenemos que $\overline{HG} // \overline{BC}$ y $|\overline{HG}| = \frac{1}{2}|\overline{BC}|$, así pues, $\overline{DE} // \overline{HG}$ $|\overline{HG}| = |\overline{DE}|$.
Luego el cuadrilátero $HGED$ es un paralelogramo (7.1.3), y por lo tanto sus diagonales cortarán en su punto medio, es decir, $\overline{FE} \cong \overline{FH}$ y $\overline{FG} \cong \overline{FD}$.
Por construcción de los puntos F y G, tenemos $\overline{FE} \cong \overline{FH} \cong \overline{HB}$ y $\overline{FD} \cong \overline{FG} \cong \overline{CG}$.

7.2.4 Corolario.
Las tres medianas se encuentran en un punto único llamado **baricentro.**

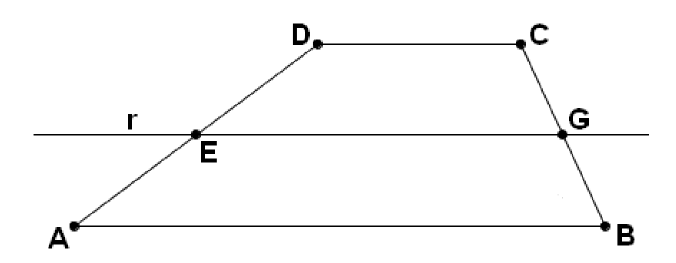
Demostración. Sea un triángulo ΔABC, en el que trazamos las medianas $\overline{AF}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$. Sea G el punto de corte de $\overline{AF}$ y $\overline{BE}$, (se cortan pues $AEFB$ es un trapecio por 7.21 y aplicamos 2.8.14 y 2.8.12) y sea G' el punto de corte de $\overline{AF}$ y $\overline{CD}$.



Por la proposición anterior, $\left|\overline{FG}\right| = \frac{1}{3}\left|\overline{FA}\right|$, y también $\left|\overline{FG'}\right| = \frac{1}{3}\left|\overline{FA}\right|$, puesto que los puntos G y G' están en el interior del segmento $\overline{FA}$ (las medianas son segmentos pertenecientes al interior del triángulo), se debe cumplir $G = G'$.

Nota: El baricentro de un triángulo material coincide con su **centro de gravedad**.

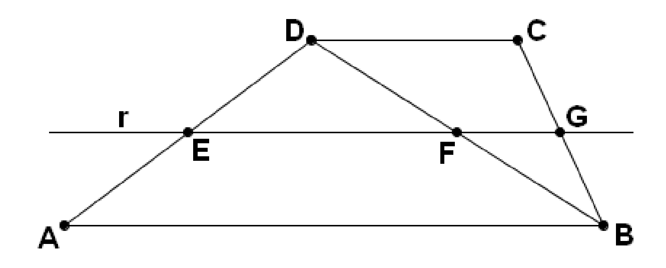
7.2.5 Proposición. El conector de puntos medios de un trapecio.
a) Si una recta pasa por el punto medio de un lado de un trapecio y es paralela a la base, entonces también pasa por el punto medio del otro lado, y su longitud es un medio de la semisuma de la suma de las dos bases.
b) La recta que pasa por los dos puntos medios de los lados es paralela a la base.



Demostración. Sea un trapecio $ABCD$ tal que $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$.
a) Sea E el punto medio de $\overline{AD}$ y sea r la recta que pasa por E y es paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.
Trazamos la diagonal $\overline{BD}$ del trapecio.
Por la proposición 7.2.2, la recta r cortará el segmento $\overline{BD}$ en su punto medio F y

$$\left|\overline{EF}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right|$$

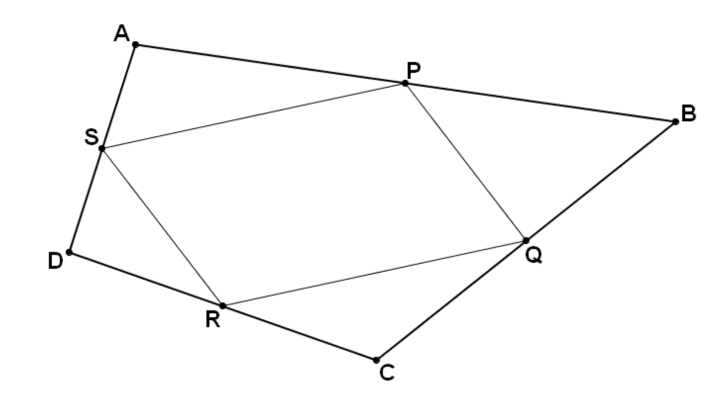
Volvemos a aplicar la misma proposición para el triángulo ΔBCD, con lo que demostramos que r corta a $\overline{BC}$ en su punto medio G, y $\left|\overline{FG}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{CD}\right|$.



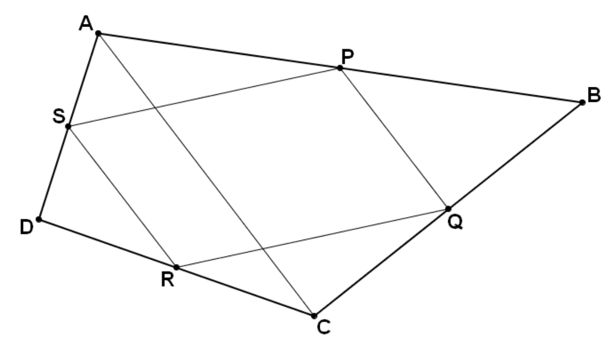
Finalmente, $\left|\overline{EG}\right| = \left|\overline{EF}\right| + \left|\overline{FG}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right| + \frac{1}{2}\left|\overline{CD}\right| = \frac{\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{CD}\right|}{2}$.

b) Sean E y G los puntos medios de los lados y supongamos que $r = \overleftrightarrow{EG}$ no es paralela a $\overleftrightarrow{AB}$. Sea s la recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por E. Por el razonamiento anterior, esta recta s pasará por G, y por lo tanto $s = r$, lo que nos lleva a contradicción. Así que forzosamente $r // \overleftrightarrow{AB}$.

7.2.6 Teorema. Teorema de Varignon.
Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero forman un paralelogramo, llamado "Paralelogramo de Varignon".



Demostración. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cualquiera y marcamos los puntos medios P, Q, R y S de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, tal y como aparecen en el esquema superior. Trazamos la diagonal $\overline{AC}$, con lo que observamos que aparece un triángulo ΔACD en el que S y R son puntos medios de dos de sus lados.

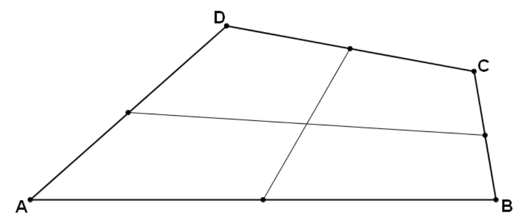


Luego, aplicando el Teorema 7.2.1, $\overleftrightarrow{SR} // \overleftrightarrow{AC}$.
Aplicando el mismo razonamiento al triángulo ΔACB deducimos que $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{AC}$, y por la transitividad del paralelismo llegamos a $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{SR}$.
Con un razonamiento similar, ahora con la diagonal $\overleftrightarrow{BD}$, llegaremos a $\overleftrightarrow{SP} // \overleftrightarrow{QR}$.

Nota histórica. Se atribuye este teorema a **Pierre Varignon** (1654-1722). Este a teorema fue publicado de forma póstuma en 1731. Realmente cuesta creer que una propiedad tan sencilla haya estado tanto tiempo sin ser descubierta y demostrada.

Problema propuesto: El Problema #2 de **[Prob2]** propone demostrar que el área del paralelogramo de Varignon asociado a un cuadrilátero es la mitad del área de dicho cuadrilátero.

7.2.7 Definición. Bimedianas.
Las bimedianas de un cuadrilátero son las rectas que unen los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero.

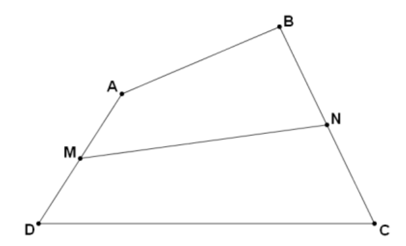


7.2.8 Proposición.
Las bimedianas de un cuadrilátero se cortan en sus puntos medios.

Demostración. Puesto que las bimedianas de un cuadrilátero son las diagonales del paralelogramo de Varignon asociado, basta aplicar 7.1.2e.

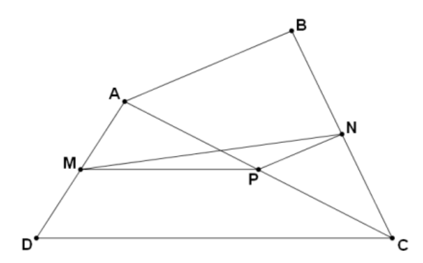
7.2.9. Proposición. Conector de puntos medios en un cuadrilátero.
Sea un cuadrilátero convexo $ABCD$, y sean M y N los puntos medios de los lados opuestos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Entonces:

$$MN = \frac{AB+CD}{2} \Leftrightarrow AB // CD$$



Demostración. En el sentido $\Leftarrow$ es la proposición 7.2.5. Veamos $\Rightarrow$.
Trazamos la diagonal AC y marcamos su punto medio P.
Aplicando el teorema 7.2.1 al triángulo ΔADC tenemos que $MP = \frac{1}{2}CD$ y $MP // CD$.

Aplicando el mismo teorema al triángulo ΔABC tenemos que $PN = \frac{1}{2}AB$ y $PN // AB$.



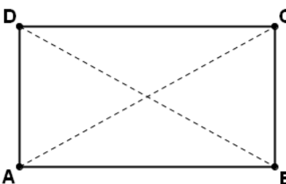
Luego aplicando la desigualdad triangular al triángulo ΔMNP se deduce que

$$MN < MP + PN = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}AB = \frac{AB+CD}{2}$$

y la igualdad sólo ocurre en si P está en $\overleftrightarrow{MN}$, en cuyo caso $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{MP} = \overleftrightarrow{MN} = \overleftrightarrow{PN} // \overleftrightarrow{AB}$.

7.3 Rectángulos.

7.3.1 Definición. Rectángulo. (Elementos 1 Definición 22)
Recordamos la definición dada en 6.2.3: Un rectángulo es un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos son rectos.

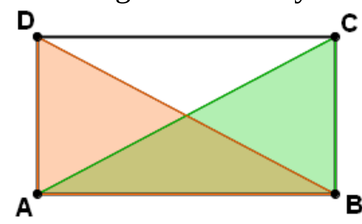


En 6.2.4 se demostró que todo rectángulo es un paralelogramo. En el contexto de un plano euclídeo podemos aplicar también 7.1.2d

7.3.2 Definición. Base y altura de un rectángulo.
Dado un rectángulo $ABCD = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}\}$, el segmento $\overline{AB}$ será la **base** y el segmento $\overline{BC}$ será la **altura** del rectángulo.

7.3.3 Proposición.
Todo rectángulo tiene las diagonales congruentes.

Demostración: Consideramos los triángulos ΔADB y ΔBCA.



$\angle A = \angle B$ pues ambos son rectos, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ pues todo rectángulo es un paralelogramo (6.2.4) y aplicamos 7.1.2c. Por otro lado trivialmente $\overline{AB} \cong \overline{AB}$, luego $\Delta ADB \cong \Delta BCA$ por el criterio SAS. Por lo tanto $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

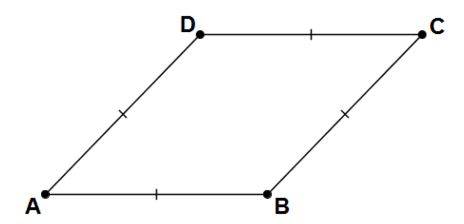
7.3.4 Proposición. Caracterización de los rectángulos entre los paralelogramos.
Dado un paralelogramo $ABCD$, son equivalentes:
a) $ABCD$ es un rectángulo.
b) Uno de sus ángulos es recto.
c) Sus dos diagonales son congruentes.

Demostración: Los triángulos ΔABD y ΔBAC serán congruentes por el criterio SSS, pues por hipótesis $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, y por 7.1.2c también $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.
Por lo tanto $\angle BAD \cong \angle ABC$, pero estos ángulos son suplementarios (6.3.20), luego ambos son rectos. De la misma forma se demuestra que $\angle C$ y $\angle D$ también serán rectos.

$a \Leftrightarrow c$) Es 7.3.3 y 7.3.4.

7.4 Rombos.

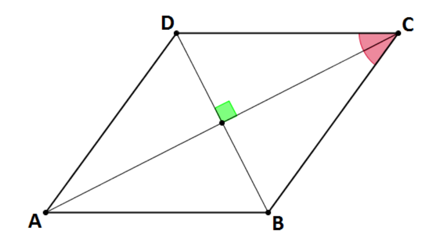
7.4.1 Definición. Rombo. (Elementos 1 Definición 22)
Un rombo es un cuadrilátero cuyos cuatro lados son congruentes.



7.4.2 Proposición.
Todo rombo es un paralelogramo.

Demostración. Basta aplicar 7.1.2c.

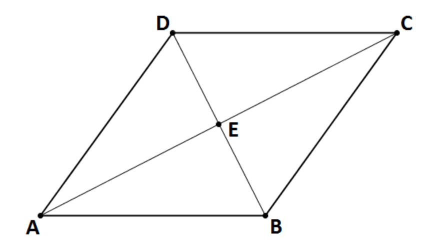
7.4.3 Proposición.
En todo rombo se cumplen las siguientes propiedades:
a) Las diagonales se cortan perpendicularmente.
b) Las diagonales son las bisectrices de los ángulos internos.



Demostración. Sea un rombo $ABCD$ y sea E el punto de corte de las dos diagonales. Por ser un rombo $\overline{CD} \cong \overline{BC}$, por 7.1.2e, $\overline{DE} \cong \overline{BE}$ y claramente $\overline{CE} \cong \overline{CE}$, luego por el criterio SSS se deduce que $\Delta DEC \approx \Delta BEC$, y por tanto $\angle DCE \cong \angle BCE$ y $\angle EDC \cong \angle EBC$. Luego el segmento $\overline{CE}$ es la bisectriz por C del triángulo ΔDCB, y por 3.11.1 coincide con la altura, luego $\angle BEC$ y $\angle DEC$ son rectos.

7.4.4 Proposición. Caracterización de los rombos entre todos los paralelogramos.
Dado un paralelogramo $ABCD$, son equivalentes:
a) $ABCD$ es un rombo.
b) Dos de sus lados consecutivos son congruentes.
c) Las diagonales son perpendiculares.
d) Una de las diagonales es la bisectriz del ángulo interno de su vértice.

Demostración. Sea el paralelogramo $ABCD$ y sea E el punto de corte de sus diagonales.



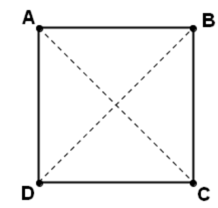
a) Supongamos que $\overline{BC} \cong \overline{CD}$. Luego $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BC} \cong \overline{AD}$ por 7.1.2c. Y por lo tanto es un rombo.

b) Si las diagonales son perpendiculares $\angle BEC \cong \angle DEC$, $\overline{DE} \cong \overline{BE}$ por ser un paralelogramo y 7.1.2e, luego aplicando SAS tenemos que $\Delta DEC \cong \Delta BEC$, luego $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, y podemos aplicar el apartado a) de esta misma demostración.

c) Supongamos que $\angle DCE \cong \angle BCE$. Luego el segmento $\overline{CE}$ es bisectriz del triángulo ΔDBC y también es mediana por 7.1.2e. Luego por 3.11.2 el triángulo ΔDBC será isósceles en C y en consecuencia $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, por lo que nuevamente podemos aplicar el apartado a) de esta misma demostración.

7.5 Cuadrados.

7.5.1 Definición. Cuadrado. (Elementos 1 Definición 22)
Un cuadrado es un cuadrilátero con los cuatro lados y los cuatro ángulos iguales, es decir, es un rombo y un rectángulo al mismo tiempo.



7.5.2 Proposición.
Las diagonales de un cuadrado son congruentes, perpendiculares y bisectrices de los ángulos internos del cuadrado.

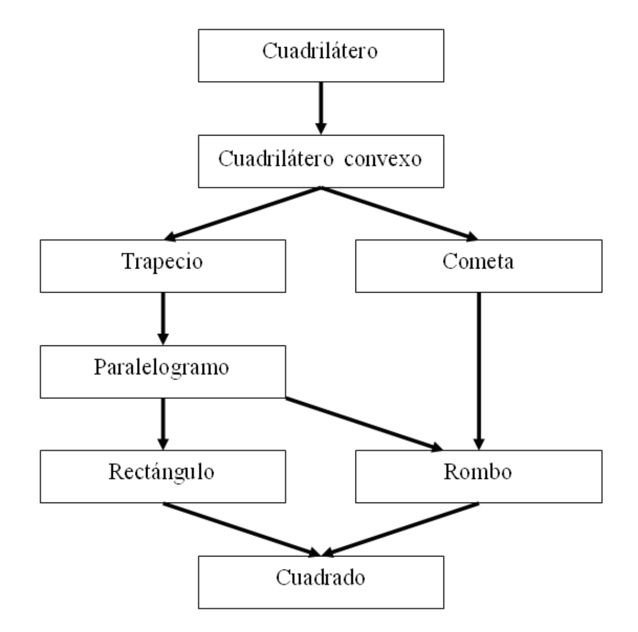
Demostración: Basta aplicar 7.3.3, 7.4.3a y 7.4.3b.

7.5.3 Proposición.
Todo paralelogramo que cumpla al menos una de las siguientes condiciones es un cuadrado:
a) Las diagonales son congruentes y perpendiculares.
b) Las diagonales son congruentes y una de ellas es bisectriz del ángulo interno del vértice del paralelogramo.

Observación: Esta caracterización sólo es válida para paralelogramos, y no se cumple para cualquier cuadrilátero.

Demostración. a) Por 7.4.4b, si las diagonales del paralelogramo son perpendiculares será un rombo, y por 7.3.4 si las diagonales son congruentes será un rectángulo.
b) Por 7.4.4c será un rombo, y por 7.3.4 será un rectángulo.

7.5.4 Esquema. Los cuadriláteros fundamentales.



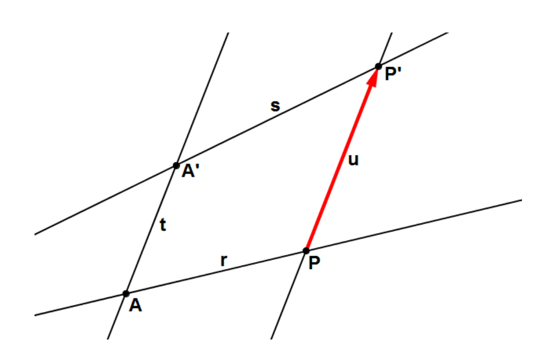
8 Semejanza.

8.1 Proyección paralela.

8.1.1 Definición. Proyección paralela.
Sean dos rectas r y s, y sea t una recta transversal común. Sean $A = r \cap t$ y $A' = s \cap t$. Para cualquier punto $P \in r$, existirá una única recta u paralela a t por P, y sea $P' = s \cap u$. Tenemos así definida una función

$$f : r \to s$$
$$P \mapsto f(P) = P' = u \cap s$$

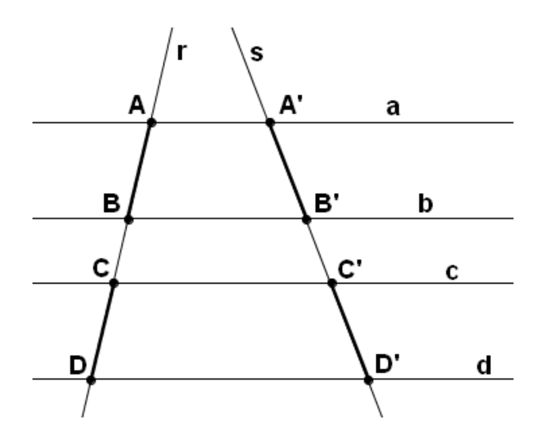
a la que denominaremos **proyección paralela de r en s a lo largo de t**.



8.1.2 Teorema.
La proyección paralela es una biyección.

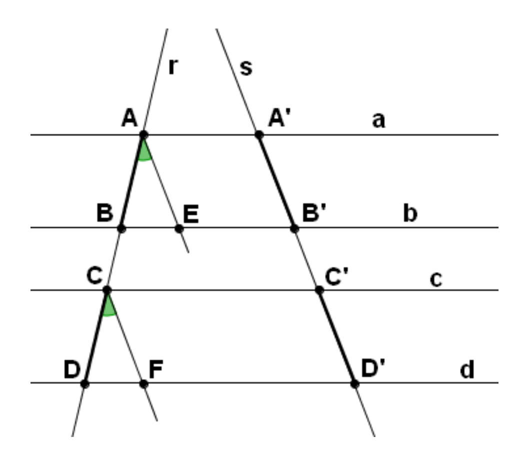
Demostración. Supongamos que $f(P) = f(Q)$. Las rectas $\overleftrightarrow{Pf(P)}$ y $\overleftrightarrow{Qf(Q)}$ son ambas paralelas a t, y ambas pasan por el mismo punto, luego por PUP han de ser la misma. Puesto que P y Q son puntos de corte de esta recta con r, se deduce que $P = Q$. Luego es inyectiva.
Supongamos que $P' \in s$. Trazamos la recta u, paralela a t por P'. Sea P su punto de corte con r. Por unicidad de la recta paralela por un punto, u será también la única recta paralela a t por P, y por tanto, por unicidad de su punto de corte con s, $f(P) = P'$. Luego es suprayectiva.

8.1.3 Teorema. La proyección paralela mantiene la congruencia de segmentos.
Sean dos rectas r y s que cortan a cuatro rectas a, b, c y d, las cuatro paralelas entre sí, en los puntos A, A', B, B', C, C', D y D' tal y como se indica en el siguiente diagrama:



Entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD} \Rightarrow \overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}$
Este teorema también se suele llamar "**Pequeño Teorema de Tales".**

Demostración: Supongamos que r y s no son paralelas. Por el punto A trazamos una recta paralela a s. Sea E su punto de corte con b. De la misma forma trazamos por C una recta paralela a s. Sea F su punto de corte con d.



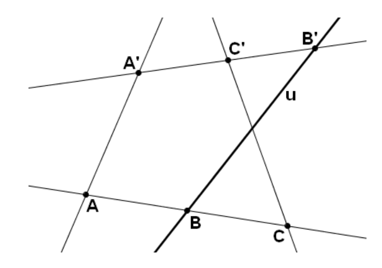
$AE // CF$ por transitividad del paralelismo. Luego $\angle DCF \cong \angle BAE$. También se cumple $b // d$ luego $\angle ABE \cong \angle CDF$ y por hipótesis $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, luego podemos aplicar el criterio de congruencia de triángulos ASA para deducir que $\Delta ABE \cong \Delta CDF$, y por tanto $\overline{AE} \cong \overline{CF}$.
Los cuadriláteros $AA'B'E$ y $C'D'FC$ son paralelogramos, luego sus lados opuestos son congruentes (7.1.2c), es decir, $\overline{AE} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{CF} \cong \overline{C'D'}$. Luego por transitividad de la congruencia de segmentos $\overline{A'B'} \cong \overline{AE} \cong \overline{CF} \cong \overline{C'D'} \Rightarrow \overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}$.

Nota. El caso en que r y s sean paralelas debe demostrarse de forma independiente, aunque la demostración anterior ya indica el razonamiento a seguir.

8.1.4 Teorema. La proyección paralela mantiene el orden.
Sean dos rectas r y s, y sea t una recta transversal común. Sea f la proyección paralela de r en s a lo largo de t.

Entonces $A*B*C \Rightarrow A'*B'*C'$

Demostración. Supongamos lo contrario, por ejemplo que $A'*C'*B'$. Sea $u = \overleftrightarrow{BB'}$.

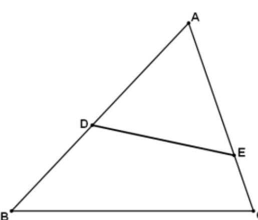


$$\left.\begin{array}{l} AA' \,//\, BB' \Rightarrow A' \approx_u A \\ A'*C'*B' \Rightarrow A' \approx_u C' \end{array}\right\} \Rightarrow A \approx_u C'$$

$$A*B*C \Rightarrow A \not\approx_u C$$

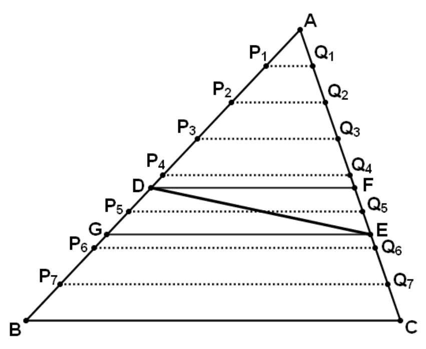
Luego por 2.1.5, llegamos a $C \not\approx_u C'$. Pero sin embargo $CC' \,//\, BB' \Rightarrow C' \approx_u C$, llegando a contradicción. Al mismo resultado llegaríamos suponiendo $C'*A'*B'$.

8.1.5 Lema.
Dado un triángulo ΔABC y puntos D en $\overline{AB}$ y E en $\overline{AC}$. Si $\overleftrightarrow{DE}$ no es paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ entonces $\frac{AD}{AB} \neq \frac{AE}{AC}$.



Demostración. Sea F la proyección paralela de D en $\overline{AC}$, y sea G la proyección paralela de E en $\overline{AB}$. Supongamos que $A*D*G*B$ (el caso $A*G*D*B$ se demostraría de forma similar).

Sabemos que existirá un n tal que $\frac{\overline{AB}}{2^n} < \overline{GD}$ (4.5.2) , y para este n tendremos los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$, con $A*P_i*P_{i+1}*B$ tales que $\overline{P_iP_{i+1}} \cong \frac{\overline{AB}}{2^n} < \overline{GD}$. Estos puntos, por proyección paralela en $\overline{AC}$ se transformarán en los puntos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, con $A*Q_i*Q_{i+1}*C$ tales que $\overline{Q_iQ_{i+1}} \cong \frac{\overline{AC}}{2^n} < \overline{FE}$.



Luego existirá un k tal que $P_{k-1} * D * P_k$ y $Q_k * E * P_{k+1}$ (aquí se necesita el Axioma de Arquímedes).

Entonces $AD < AP_k \Rightarrow \frac{AD}{AB} < \frac{AP_k}{AB}$ y $AQ_k < AE \Rightarrow \frac{AQ_k}{AC} < \frac{AE}{AC}$

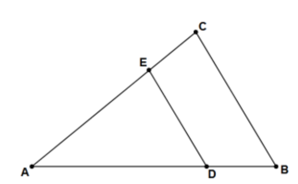
Pero también se cumple $\frac{AP_k}{AB} = \frac{AP_k}{AP_n} = \frac{k|AP_1|}{n|AP_1|} = \frac{k}{n}$ y $\frac{AQ_k}{AC} = \frac{AQ_k}{AQ_n} = \frac{k}{n}$ luego

$\frac{AD}{AB} < \frac{AP_k}{AB} = \frac{k}{n} = \frac{AQ_k}{AC} < \frac{AE}{AC}$ y por tanto $\frac{AD}{AB} < \frac{AE}{AC}$

8.1.6 Corolario. Recíproco del Teorema del Lado Deslizante.

Dado un triángulo ΔABC y puntos D en $\overline{AB}$ y E en $\overline{AC}$ tales que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

Entonces $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$.

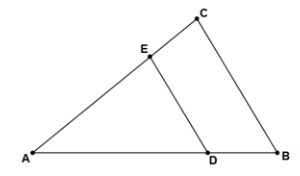


Demostración. Es el contrapositivo del lema anterior: $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

8.1.7 Proposición. El Teorema del Lado Deslizante.

Dado un triángulo ΔABC y puntos D en $\overline{AB}$ y E en $\overline{AC}$ tales que $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$.

Entonces $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

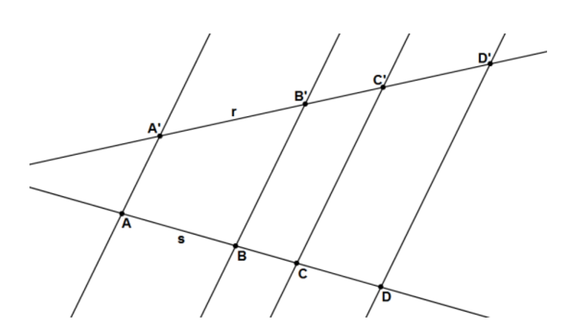


Demostración.

Sea E' el punto de $\overrightarrow{AC}$ tal que $\frac{AE'}{AC} = \frac{AD}{AB}$ (queda por demostrar que lo podemos hacer) y trazamos la recta $\overleftrightarrow{DE'}$. Aplicando 8.1.6 deducimos que $\overleftrightarrow{DE'} // \overleftrightarrow{BC}$, y puesto que $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$, llegamos a $\overleftrightarrow{DE'} // \overleftrightarrow{DE}$, y por el Postulado de la Única Paralela tenemos $\overleftrightarrow{DE} = \overleftrightarrow{DE'}$, y por tanto $E = E'$ y $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ tal y como queríamos ver.

8.1.8 Corolario. La proyección paralela mantiene las razones de los segmentos.
Sean dos rectas r y s, y sea t una recta transversal común. Sea f la proyección paralela de r en s a lo largo de t. Sean A, B, C y D en r tales que $C \neq D$. Entonces

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$



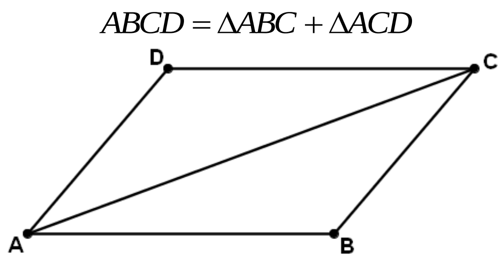
Demostración. Es una aplicación directa de 8.1.7.

8.2 Proporcionalidad mediante área.

En este apartado supondremos el concepto de área y sus propiedades para demostrar uno de los teoremas más importantes de la semejanza de figuras: Dos triángulos con la misma altura tienen áreas proporcionales a sus respectivas bases (Elementos 6.1), y basándonos en este resultado demostraremos el "Teorema del lado deslizante" (Elementos 6.2).

8.2.1 Proposición. Área de paralelogramos y de triángulos.
Todo paralelogramo se puede descomponer en dos triángulos congruentes al trazar una de sus diagonales.

$$ABCD = \Delta ABC + \Delta ACD$$



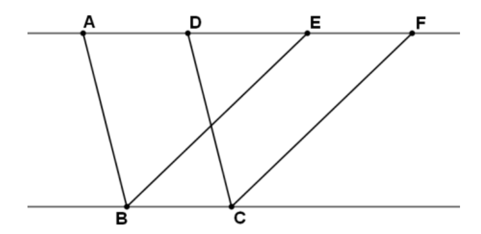
Demostración. En 7.1.2b vimos que ambos triángulos son concurrentes, luego tienen áreas iguales, y por tanto

$$[ABCD] = [\Delta ABC] + [\Delta ACD] = 2[\Delta ABC]$$

Es decir, el área de un paralelogramo es el doble del área del triángulo que queda determinado por dos de sus lados y la diagonal.
Recíprocamente, dado un triángulo cualquiera ΔABC, podemos "ampliarlo" trazando las paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$ por C y a $\overleftrightarrow{BC}$ por A y determinando su punto D de intersección, obteniendo así un paralelogramo $ABCD$ cuya diagonal determinará este mismo triángulo y otro congruente con el mismo.

8.2.2 Proposición. (Elementos 1.35)
Dos paralelogramos que tengan la misma base y estén entre dos rectas paralelas tendrán áreas iguales.

Demostración. Sean $ABCD$ y $EBCF$ dos paralelogramos compartiendo una base $\overline{BC}$ común y para los que $\overline{AD}$ y $\overline{EF}$ están en una misma recta.



Por ser $ABCD$ un paralelogramo tenemos que $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (7.1.2c)
Por ser $EBCF$ un paralelogramo tenemos que $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (7.1.2c)
Luego por transitividad de la congruencia de segmentos tendremos $\overline{AD} \cong \overline{EF}$.

Luego $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} \cong \overline{DE} + \overline{EF} = \overline{DF}$.
Por ser $ABCD$ un paralelogramo tenemos que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (7.1.2c)
Por ser $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ rectas paralelas tenemos que $\angle EAB \cong \angle FDC$ (5.3.5 y 3.4.2)
Luego $\Delta EAB \cong \Delta FDC$ por el criterio SAS.
Por lo tanto $[\Delta EAB] = [\Delta FDC]$ por el Axioma A2.

Sea G el punto de corte de los segmento $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$.
Los trapecios resultantes al quitar el triángulo común ΔDGE de los triángulos ΔEAB y ΔFDC tendrán el mismo área:

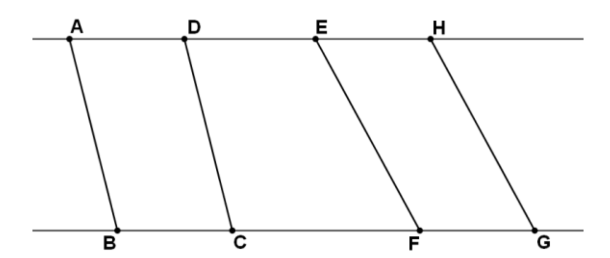
$$[ABGD] = [GCFE]$$

Y si añadimos ahora a cada figura el triángulo ΔBGC obtendremos figuras con el mismo área:

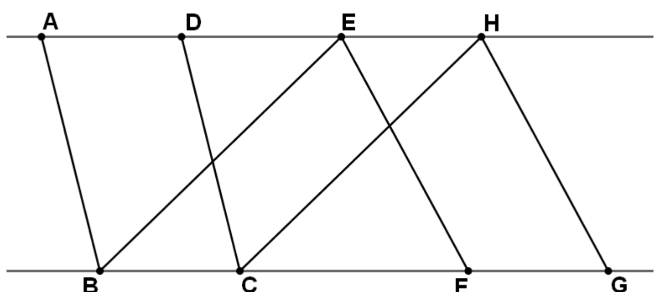
$$[ABCD] = [EBCD]$$

Tal y como queríamos ver.

8.2.3 Proposición. (Elementos 1.36)
Dos paralelogramos entre rectas paralelas y con bases congruentes tienen el mismo área.



Demostración. Sean $\lozenge ABCD$ y $\lozenge EFGH$ dos paralelogramos tales que $\overline{BC} \cong \overline{FG}$, $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{EH}$ y $\overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{EH}$.
Por ser $EFGH$ un paralelogramo tenemos $\overline{FG} \cong \overline{EH}$.
Trazamos los segmentos $\overline{BE}$ y $\overline{CH}$.



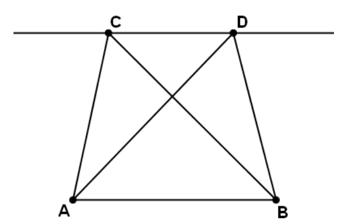
$\overline{BC} \cong \overline{FG}$ y $\overline{FG} \cong \overline{EH}$ luego $\overline{BC} \cong \overline{EH}$, y por tanto $\lozenge EBCH$ es un paralelogramo.
Ahora podemos aplicar la proposición anterior para deducir que

$$[ABGD] = [EBCH]$$

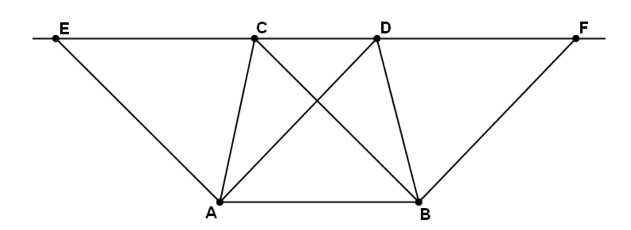
Pero con el mismo razonamiento tenemos que $[EFGH] = [EBCH]$, y por tanto

$$[ABGD] = [EFGH]$$

8.2.4 Proposición. (Elementos 1.37)
Dos triángulos con la misma base y que están entre dos rectas paralelas tienen el mismo área.



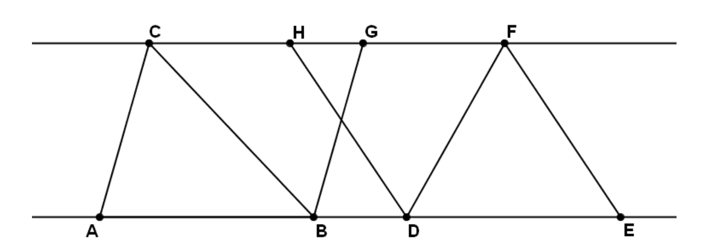
Demostración. Sean ΔABC y ΔABD dos triángulos para los cuales $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{AB}$.
Trazamos la paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ por A y la paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por C y sea E su punto de corte, obteniendo así el paralelogramo $EABC$.
Trazamos la paralela a $\overleftrightarrow{AD}$ por B y la paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por D y sea F su punto de corte, obteniendo así el paralelogramo $DABF$.
Los puntos E, C, D y F están claramente alineados en la recta $\overleftrightarrow{CD}$, por lo que podemos aplicar la proposición 8.2.2



$$[\Delta ABC] = \frac{1}{2}[EABC] = \frac{1}{2}[DABF] = [\Delta ABD]$$

8.2.5 Proposición. (Elementos 1.38)
Dos triángulos con la misma base y entre dos rectas paralelas tienen el mismo área.

Demostración. Sean ΔABC y ΔDEF dos triángulos para los cuales $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CF}$.
Sea G el punto de corte de la paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ por B y la paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por C. Obtenemos así el paralelogramo $ABGC$.
Sea H el punto de corte de la paralela a $\overleftrightarrow{EF}$ por D y la paralela a $\overleftrightarrow{DE}$ por F. Obtenemos así el paralelogramo $DEFH$.



Podemos ahora aplicar la Proposición 8.2.2 para deducir que

$$[\Delta ABC] = \frac{1}{2}[ABGC] = \frac{1}{2}[DEFH] = [\Delta DEF]$$

8.2.6 Teorema. (Elementos 6.1)

Sea ΔABC un triángulo y D un punto tal que B*D*C. Entonces

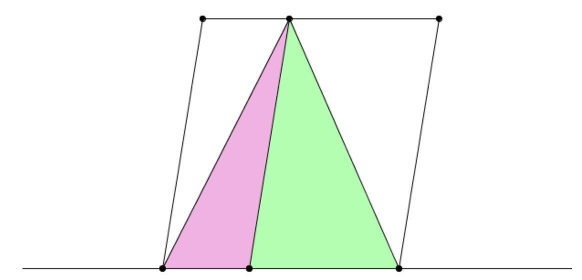
$$\frac{[\Delta ADC]}{[\Delta ABC]} = \frac{DC}{BC}$$

Demostración. Los triángulos ΔADC y ΔABC comparten una misma altura h, luego

$$\frac{[\Delta ADC]}{[\Delta ABC]} = \frac{\frac{1}{2} DC \cdot h}{\frac{1}{2} BC \cdot h} = \frac{DC}{BC}$$

Demostración en Los Elementos 6.1:

Triángulos y paralelogramos con la misma altura tienen áreas proporcionales a sus respectivas bases.



La demostración que encontramos en los Elementos de Euclides se basa en la teoría de magnitudes desarrollada en el Libro 5.

Sean los triángulos ΔABC y ΔBDC con A, B y D alineados en una misma recta r.

Queremos ver

$$AB : BD :: [\Delta ABC] : [\Delta BDC]$$

Por la definición de magnitudes proporcionales de la Definición 5 del Libro 5, tenemos que demostrar que para cualquier $n, m \in IN$, se cumple:

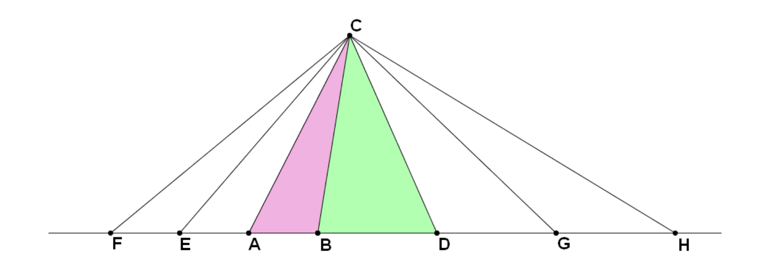
$$n \cdot AB = m \cdot BD \Rightarrow n \cdot [\Delta ABC] = m \cdot [\Delta BDC]$$
$$n \cdot AB < m \cdot BD \Rightarrow n \cdot [\Delta ABC] < m \cdot [\Delta BDC]$$
$$n \cdot AB > m \cdot BD \Rightarrow n \cdot [\Delta ABC] > m \cdot [\Delta BDC]$$

En la demostración se utilizan los casos $n = 3$ y $m = 3$ como representativos del caso general.

Tomamos puntos E y F de la recta r tales que $\overline{AB} \cong \overline{DA} \cong \overline{ED}$

y tomamos puntos G y H de la recta r tales que $\overline{BD} \cong \overline{DG} \cong \overline{GH}$

Así pues, hemos obtenido los segmentos $\overline{FB} = 3 \cdot \overline{AB}$ y $\overline{BH} = 3 \cdot \overline{BD}$.



Aplicando Elementos 1.38 (8.2.5 tenemos

$$\overline{AB} \cong \overline{DA} \cong \overline{ED} \Rightarrow [\Delta FEC] = [\Delta EAC] = [\Delta ABC]$$

Y por tanto

$$[\Delta FBC] = [\Delta FEC] + [\Delta EAC] + [\Delta ABC] = 3 \cdot [\Delta ABC]$$

Y de la misma forma:

$$\overline{DH} = 3 \cdot \overline{BD} \Rightarrow [\Delta BHC] = 3 \cdot [\Delta BDC]$$

Y claramente, si $\overline{FB} \cong \overline{BH} \Rightarrow [\Delta FBC] = [\Delta BHC]$, es decir:

$$3 \cdot AB = 3 \cdot BD \Rightarrow 3 \cdot [\Delta ABC] = 3 \cdot [\Delta BDC].$$

Por otro lado, está también claro que $\overline{FB} < \overline{BH} \Rightarrow [\Delta FBC] < [\Delta BHC]$, es decir,

$$3 \cdot AB < 3 \cdot BD \Rightarrow 3 \cdot [\Delta ABC] < 3 \cdot [\Delta BDC]$$

Y que $\overline{FB} > \overline{BH} \Rightarrow [\Delta FBC] > [\Delta BHC]$, es decir,

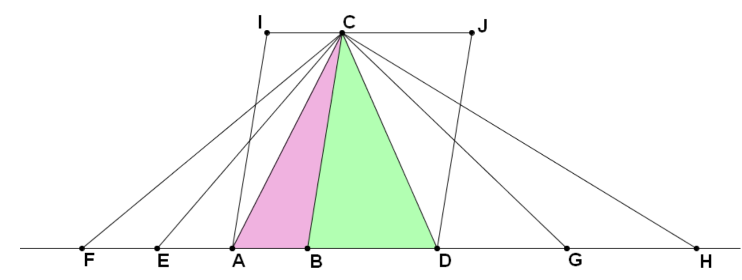
$$3 \cdot AB > 3 \cdot BD \Rightarrow 3 \cdot [\Delta ABC] > 3 \cdot [\Delta BDC]$$

Es decir, se cumplen las tres condiciones de la definición de magnitudes proporcionales:

$$AB : BD :: [\Delta ABC] : [\Delta BDC]$$

Una vez hemos demostrado la proporcionalidad para triángulos, la proporcionalidad para paralelogramos se deduce fácilmente teniendo en cuenta que un paralelogramo es el doble que un triángulo:

Ampliamos el triángulo ΔABC al paralelogramo $ABCI$, y ampliamos el triángulo ΔBDC al paralelogramo $BDJC$:



Claramente se cumple $[ABCI] = 2 \cdot [\Delta ABC]$ y $[BDJC] = 2 \cdot [\Delta BDC]$

Aplicando Elementos 5.4: $[\Delta ABC] : [\Delta BDC] :: 2[\Delta ABC] : 2[\Delta BDC]$

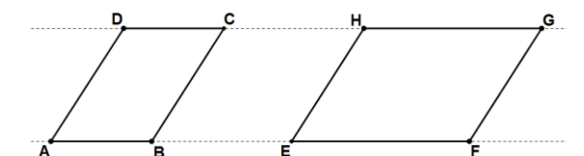
Luego $[\Delta ABC] : [\Delta BDC] :: [\Delta ABCI] : [\Delta BDJC]$

Y aplicando Elementos 5.11:

$$AB : BD :: [\Delta ABC] : [\Delta BDC] :: [\Delta ABCI] : [\Delta BDJC] \Rightarrow AB : BD :: [\Delta ABCI] : [\Delta BDJC]$$

Observación. En la demostración que encontramos en los Elementos el segmento BC es altura del triángulo, es decir, perpendicular a la recta AB, pero esta suposición no es necesaria para el desarrollo de la demostración.

8.2.7 Corolario.
Sea $ABCD$ y $EFGH$ son dos paralelogramos tales que A, B, E y F son colineales y C, D, H y G son colineales, entonces

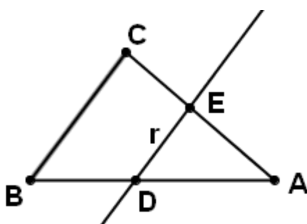


$$\frac{[ABCD]}{[EFGH]} = \frac{AB}{EF}$$

Demostración. Ambos paralelogramos comparten una misma altura h, y por tanto

$$\frac{[ABCD]}{[EFGH]} = \frac{AB \cdot h}{EF \cdot h} = \frac{AB}{EF}$$

8.2.8 Teorema. (Elementos 6.2).
Sea ΔABC un triángulo, y r una recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ que corta $\overleftrightarrow{AB}$ en un punto D interior a $\overline{AB}$. Entonces r también cortará $\overline{AC}$ en un punto interior E y $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.



Nota. Este Teorema es uno de los más importantes de Los Elementos, pues en él se sostiene todo el desarrollo de la semejanza de figuras que estudiaremos en el próximo capítulo.

Demostración. Por el teorema de Pasch (2.2.5), si r corta a $\overline{AB}$ en un punto interior, entonces también cortará $\overline{AC}$ o $\overline{BC}$ en un punto interior, pero r es paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, por lo tanto r cortará $\overline{AC}$ en un punto interior.

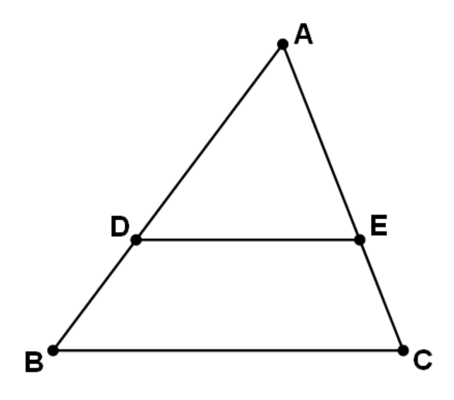
Aplicamos el lema anterior al triángulo ΔAEB: $\frac{[\Delta ADE]}{[\Delta AEB]} = \frac{AD}{AB}$

Y aplicamos el mismo lema al triángulo ΔADC: $\frac{[\Delta ADE]}{[\Delta ADC]} = \frac{AE}{AC}$

Por otro lado, $[\Delta AEB] = [\Delta ADE] + [\Delta DEB]$ y $[\Delta ADC] = [\Delta ADE] + [\Delta DEC]$, y sabemos que $[\Delta DEB] = [\Delta DEC]$ por el lema 5.3.4, luego $[\Delta AEB] = [\Delta ADC]$, y en consecuencia:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{[\Delta ADE]}{[\Delta AEB]} = \frac{[\Delta ADE]}{[\Delta ADC]} = \frac{AE}{AC}$$

Demostración de Los Elementos:



$$\overline{DE} \,//\, \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{AD} : \overline{DB} :: \overline{AE} : \overline{EC}$$

Sea un triángulo ΔABC y sean D y E puntos en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.

$\Rightarrow$ Supongamos que $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$. Trazamos los segmentos $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ y consideramos los triángulos ΔDBE y ΔECD.

Aplicando Elementos 1.38 tenemos $[\Delta DBE] = [\Delta ECD]$.
Luego $[\Delta ADE] : [\Delta DBE] :: [\Delta ADE] : [\Delta ECD]$
Pero los triángulos ΔADE y ΔDBE tienen la misma altura, luego

$$[\Delta ADE] : [\Delta DBE] :: \overline{AD} : \overline{DB}$$

Por otro lado, los triángulos ΔADE y ΔECD también tienen la misma altura, y por tanto:

$$[\Delta ADE] : [\Delta ECD] :: \overline{AE} : \overline{EC}$$

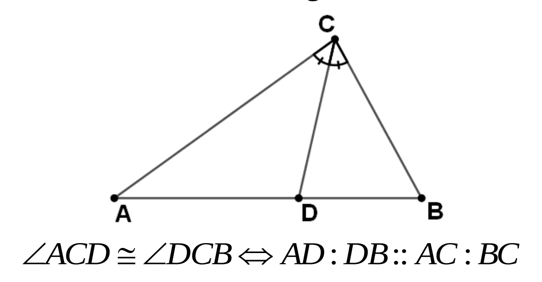
Nos queda pues una cadena de proporcionalidades
$\overline{AD} : \overline{DB} :: [\Delta ADE] : [\Delta DBE] :: [\Delta ADE] : [\Delta ECD] :: \overline{AE} : \overline{EC}$
De donde deducimos que $\overline{AD} : \overline{DB} :: \overline{AE} : \overline{EC}$

$\Leftarrow$ Supongamos que $\overline{AD} : \overline{DB} :: \overline{AE} : \overline{EC}$
Aplicando Elementos 6.1 tenemos que $\overline{AD} : \overline{DB} :: [\Delta ADE] : [\Delta DBE]$ y también $\overline{AE} : \overline{EC} :: [\Delta ADE] : [\Delta EDC]$, luego por la transitividad de la proporcionalidad deducimos que

$$[\Delta ADE] : [\Delta DBE] :: [\Delta ADE] : [\Delta EDC]$$

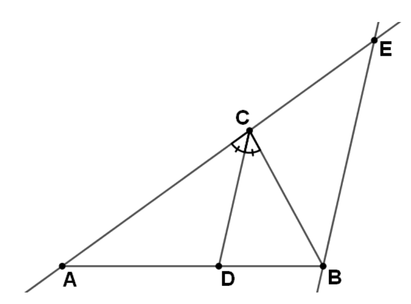
Entonces $[\Delta DBE] = [\Delta EDC]$ (Elementos 5.9)
Los triángulos ΔDBE y ΔEDC comparten el lado $\overline{ED}$ y ambos son colaterales, luego por Elementos 1.39 llegamos a $\overline{BC} \,//\, \overline{DE}$.

8.2.9 Proposición. Teorema de la bisectriz. (Elementos 6.3)
La bisectriz por el vértice de un triángulo se caracteriza por cortar el lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados contiguos.



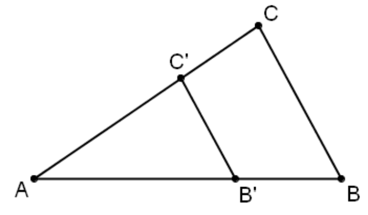
$$\angle ACD \cong \angle DCB \Leftrightarrow AD : DB :: AC : BC$$

Demostración. Sea un triángulo ΔABC y sea D en $\overline{AB}$ tal que $\angle ACD \cong \angle DCB$. Trazamos la recta paralela a CD por B y sea E su punto de corte con AC.



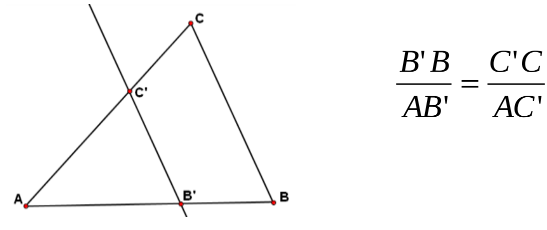
$\Rightarrow \angle CEB \cong \angle ACD$ y $\angle CBE \cong \angle DCB$ por el Teorema de los Ángulos Internos Alternos, y por hipótesis $\angle ACD \cong \angle DCB$, luego $\angle CEB \cong \angle CBE$, y por tanto $\overline{BC} \cong \overline{CE}$.
Puesto que $CD // BE$, podemos aplicar Elementos 6.2 (8.2.8) para deducir que $\overline{AD} : \overline{DB} :: \overline{AC} : \overline{CE}$, y puesto que $\overline{BC} \cong \overline{CE}$, llegamos al resultado que queríamos obtener.
$\Leftarrow$Trazo nuevamente la recta paralela a CD por B y sea E su punto de corte con la recta AC. Nuevamente Elementos 6.2 nos garantiza que $AD : DB :: AC : CE$, pero por hipótesis $AD : DB :: AC :: BC$, de lo que deducimos que $\overline{CE} \cong \overline{BC}$ (Elementos 5.9)
Luego ΔBCE es isósceles y por tanto $\angle CEB \cong \angle CBE$.
Por paralelismo tenemos $\angle ACD \cong \angle CEB$ y $\angle DCB \cong \angle CBE$, luego por transitividad de la congruencia de ángulos llegamos a $\angle ACD \cong \angle DCB$ tal y como queríamos ver.

8.2.10 Definición. Triángulos en posición de Tales.
Diremos que dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ están en posición de Tales cuando, nombrando los vértices adecuadamente, $A = A'$, B’ está en el segmento $\overline{AB}$ y el lado $\overline{B'C'}$ es paralelo a $\overline{BC}$.



Observación. El punto C’ estará en el segmento $\overline{AC}$, pues $\overleftrightarrow{B'C'}$ no puede cortar a $\overleftrightarrow{BC}$ y aplicamos el Teorema de Pasch (2.2.5) al triángulo ΔABC.

8.2.11 Teorema.
Si dos triángulos están en posición de Tales, sus segmentos correspondientes son proporcionales:



$$\frac{B'B}{AB'} = \frac{C'C}{AC'}$$

Nota. En 8.3.6 se demostrará que el recíproco también es cierto.

Demostración. Es una aplicación directa de Elementos 6.2 (8.2.8)

Nota histórica. Tales de Mileto (624-548 AC aprox.) fue uno de los grandes matemáticos de la antigua Grecia, el primero de los Siete Sabios griegos. Las fechas de su nacimiento y muerte se deducen suponiendo que el eclipse del año 585 AC ocurrió cuando Tales tenía alrededor de cuarenta años.

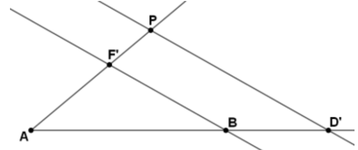
8.2.12 Teorema.
En geometría euclídea se cumple el **postulado de la división de segmentos** (4.5.1).

Demostración. Sea $\overline{AB}$ un segmento y n un número entero positivo $n \geq 1$.
Sea P_1 un punto que no pertenece a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ (1.2.14). Sobre la semirrecta $\overrightarrow{AP_1}$ podemos definir los puntos $P_2, P_2, P_3, P_4, ..., P_n$, de forma que $\overline{P_k P_{k+1}} \cong \overline{AP_1}$. Trazamos ahora la recta $\overleftrightarrow{BP_n}$, y las rectas que pasan por cada P_k y son paralelas a $\overleftrightarrow{BP_n}$ .Cada una de estas rectas determinará un punto Q_k de intersección con $\overline{AB}$. Los puntos $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ dividirán el segmento en n partes iguales.

8.2.13 Proposición. Determinación del cuarto proporcional. (Elementos 6.12)
De la Proposición 6.2 podemos deducir un método muy simple para encontrar el cuarto proporcional a tres segmentos dados.
Sean tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$, y queremos determinar un cuarto segmento $\overline{GH}$ tal que

$$\overline{AB} : \overline{CD} :: \overline{EF} : \overline{GH}$$

Sea $D' \in op(\overrightarrow{BA})$ tal que $\overline{BD'} \cong \overline{CD}$. Tomamos un punto cualquiera G fuera de la recta $\overleftrightarrow{AB}$, y sobre la semirrecta $\overrightarrow{AG}$ marcamos F' tal que $\overline{AF'} \cong \overline{EF}$. Trazamos la recta $\overleftrightarrow{BF'}$ y su paralela por D', que cortará $\overrightarrow{AG}$ en un punto P. El segmento $\overline{F'P}$ es el segmento buscado.



Efectivamente, aplicando la Proposición 6.2 tenemos $AB : BD' :: AF' : F'P$, con $\overline{BD'} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AF'} \cong \overline{EF}$.

8.3 Triángulos semejantes.

8.3.1 Definición. Triángulos semejantes.
Diremos que los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes cuando sean **equiangulares**, es decir, cuando podamos definir una biyección entre sus vértices

$$A \leftrightarrow A' \quad B \leftrightarrow B' \quad C \leftrightarrow C'$$

de forma que $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, y $\angle C \cong \angle C'$.

Por lo tanto la congruencia de triángulos es un caso particular de semejanza.
Utilizaremos el símbolo $\approx$ para representar la semejanza entre dos triángulos:

$$\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$$

8.3.2 Teorema. Criterio AA de semejanza de triángulos.
Si dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ cumplen $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, entonces son semejantes.

Demostración. $\angle A \cong \angle A' \Rightarrow |\angle A| = |\angle A'|$ y $\angle B \cong \angle B' \Rightarrow |\angle B| = |\angle B'|$ por lo tanto, aplicando 6.3.14,
$180 = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C| = |\angle A'| + |\angle B'| + |\angle C'| \Rightarrow$
$|\angle A| + |\angle B| + |\angle C| = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C'| \Rightarrow |\angle C| = |\angle C'| \Rightarrow \angle C \cong \angle C'$

8.3.3 Teorema. Construcción de triángulos semejantes.
Si ΔABC es un triángulo, $\overline{DE}$ un segmento y H es uno de los semiplanos fronterizos con $\overleftrightarrow{DE}$, entonces existirá un único punto $F \in H$ tal que $\Delta ABC \approx \Delta DEF$.

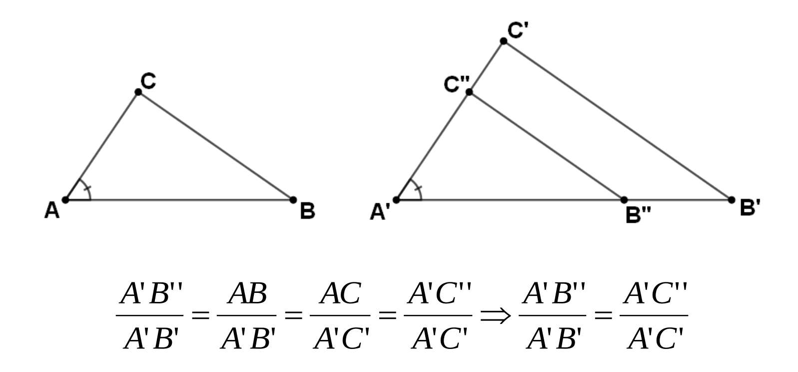
Demostración. Dada la semirrecta $\overrightarrow{DE}$, existirá una única semirrecta $\overrightarrow{DF}$ tal que $\angle A = \angle CAB \cong \angle FDE$, con $F \in H$.
De la misma forma, existirá una única semirrecta $\overrightarrow{EG}$ tal que $\angle B = \angle ABC \cong \angle DEF$, con $G \in H$.
$|\angle A| + |\angle B| < 180 \Rightarrow |\angle FDE| + |\angle GED| < 180$, por lo que, aplicando PQE (6.3.2), las rectas $\overleftrightarrow{DF}$ y $\overleftrightarrow{EG}$ se cortarán en un punto $P \in H$.

Ahora, aplicando el criterio AA de semejanza (8.3.2), $\Delta ABC \approx \Delta DEP$.

8.3.4 Teorema. Criterio SAS de semejanza de triángulos.
Si ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son dos triángulos tales que $\angle A \cong \angle A'$ y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, entonces son semejantes.

Demostración. Si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y aplicando SAS son congruentes, y por tanto semejantes.

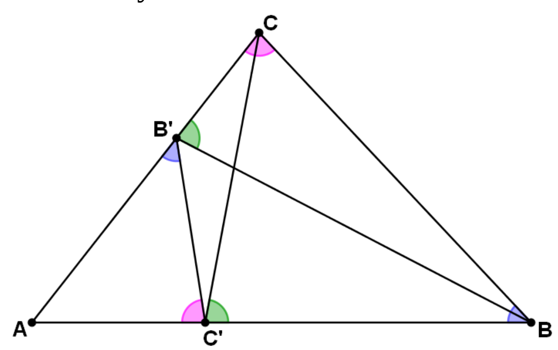
Supongamos que $\overline{A'B'} > \overline{AB}$, luego existirá $B'' \in \overline{A'B'}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B''}$, también se cumplirá $\overline{A'C'} > \overline{AC}$, y por tanto existirá $C'' \in \overline{A'C'}$ tal que $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$. Claramente $\Delta ABC \cong \Delta A'B''C''$ por el criterio SAS, luego $\angle A'B''C'' \cong \angle ABC$ y $\angle A'C''B'' \cong \angle ACB$.



$$\frac{A'B''}{A'B'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{A'C''}{A'C'} \Rightarrow \frac{A'B''}{A'B'} = \frac{A'C''}{A'C'}$$

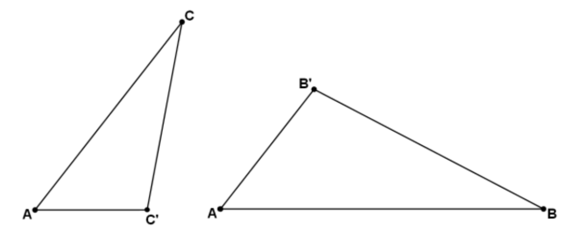
Y podemos aplicar 8.1.6 para deducir que $\overleftrightarrow{B''C''} // \overleftrightarrow{B'C'}$. Pero entonces $\angle A'B''C'' \cong \angle A'B'C'$, pero entonces $\angle ABC \cong \angle A'B''C'' \cong \angle A'B'C'$ y de la misma manera $\angle ACB \cong \angle A'C''B'' \cong \angle A'C'B'$, es decir, los triángulos son semejantes aplicando el criterio AA (8.3.2).

8.3.5 Proposición.
En un triángulo ΔABC, sea C' en $\overline{AB}$ de forma que $\angle AC'B' = \angle C$. Entonces $\angle AB'C' = \angle B$, $\Delta AC'B' \approx \Delta ACB$ y $\angle CB'B = \angle CC'B$



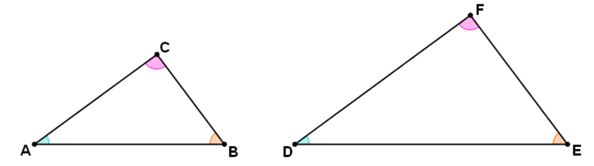
En particular, CC' será una altura si y solo si BB' es una altura.

Demostración. Si $\angle AC'B' = \angle C$, por el criterio AA de semejanza de triángulos está claro que $\angle AB'C' = \angle B$ y $\Delta AC'B' \approx \Delta ACB$.
Puesto que $\Delta AC'B' \approx \Delta ACB$, tendremos
$\frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB} \Rightarrow \frac{AC'}{AB'} = \frac{AC}{AB}$, es decir, que los triángulos $\Delta AB'B$ y $\Delta AC'C$ tienen dos lados proporcionales y comparten el mismo ángulo correspondiente, luego son semejantes por el criterio SAS de semejanza: $\Delta AC'C \approx \Delta AB'B$

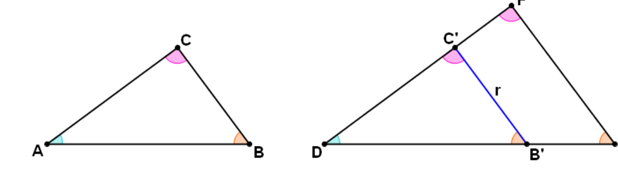


luego $\angle AB'B = \angle AC'C$ y por suplementarios, $\angle CB'B = \angle CC'B$.

8.3.6 Teorema. Criterio SSS de semejanza de triángulos.
Dos triángulos ΔABC y ΔDEF son semejantes si y solo si sus lados correspondientes son proporcionales: $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$.



Demostración. Supongamos que tienen los lados proporcionales. Si $\overline{AB}\cong\overline{DE}$ entonces $\overline{AC}\cong\overline{DF}$ y $\overline{BC}\cong\overline{EF}$ y los triángulos son congruentes por el criterio SSS de congruencia de triángulos, luego son semejantes.
Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\overline{DE}>\overline{AB}$. Sea $B'\in\overline{DE}$ tal que $\overline{AB}\cong\overline{DB'}$.
Se cumplirá también $\overline{DF}>\overline{AC}$, y sea $C'\in\overline{DF}$ tal que $\overline{AC}\cong\overline{DC'}$.

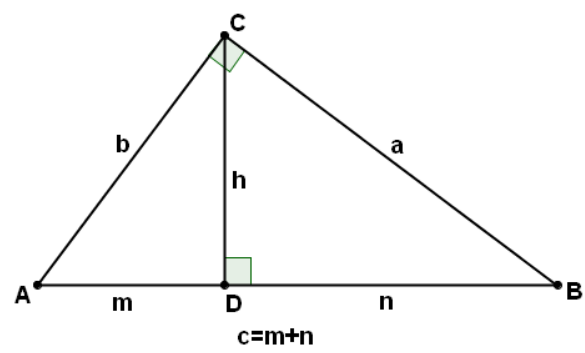


Entonces $\frac{DB'}{DE}=\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=\frac{DC'}{DF}$, luego aplicando el criterio SAS de semejanza tendremos que $\Delta DB'C'$ y ΔDEF son semejantes.
Por otro lado, $\frac{EF}{B'C'}=\frac{DE}{DB'}=\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow BC=B'C'$, y por tanto los triángulos ΔABC y $\Delta DB'C'$ son congruentes por el criterio SSS de congruencia de triángulos.
Finalmente $\Delta ABC\cong\Delta DB'C'\approx\Delta DEF\Rightarrow\Delta ABC\approx\Delta DEF$.

Recíprocamente, si los triángulos son semejantes, sus lados serán proporcionales por el Teorema del Lado Deslizante (8.1.7=8.2.8).

8.4 El Teorema de Pitágoras.

8.4.1 Teorema. El Teorema del cateto y el Teorema de la altura.
Sea ΔABC un triángulo rectángulo en C y trazamos su altura CD correspondiente al vértice C. Internamente quedan determinados dos triángulos también rectángulos ΔACD y ΔBCD:



Sea $a = |\overline{BC}|$, $b = |\overline{AC}|$, $c = |\overline{AB}|$, $m = |\overline{AD}|$ y $n = |\overline{DB}|$, (y por tanto $c = m + n$).

Entonces:
a) $b^2 = m \cdot c$ (“**Primer Teorema del cateto**”)
b) $a^2 = n \cdot c$ (“**Segundo Teorema del cateto**”)
c) $h^2 = m \cdot n$ (“**Teorema de la altura**”)
d) Recíprocamente, si se cumple $b^2 = m \cdot c$, entonces el triángulo ΔABC es rectángulo en C.

Demostración.
a) El triángulo ΔACD es semejante al triángulo ΔABC porque ambos son triángulos rectángulos y comparten el mismo ángulo en A. Por lo tanto:

$$\frac{b}{c} = \frac{m}{b} \Rightarrow b^2 = m \cdot c$$

b) Es el mismo razonamiento: El triángulo ΔBCD es semejante al triángulo ΔABC porque ambos son triángulos semejantes compartiendo el mismo ángulo en B. Por lo tanto:

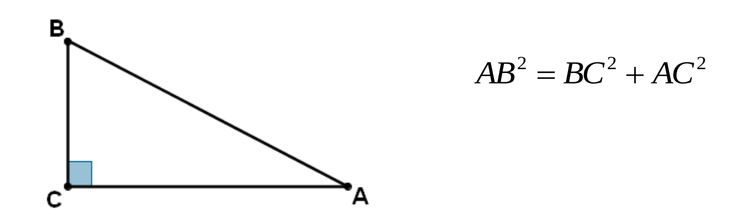
$$\frac{a}{c} = \frac{n}{a} \Rightarrow a^2 = n \cdot c$$

c) Por ser los dos triángulos ΔACD y ΔBCD semejantes entre ellos (ambos son semejantes a ΔABC), tenemos que

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

d) El razonamiento del apartado a) es perfectamente reversible: Si se cumple $b^2 = m \cdot c$, es decir, $\frac{b}{c} = \frac{m}{b}$, entonces los triángulos ΔADC y ΔABC son semejantes por el criterio SAS (8.3.4), y por tanto $\angle C = \angle ADC$ que es recto.

8.4.2 Teorema. El teorema de Pitágoras. (Elementos 1.47)
En todo triángulo ΔABC rectángulo en C se cumple:

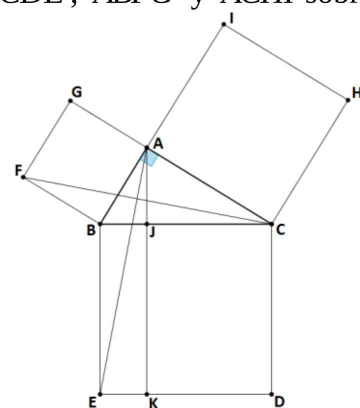


$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

Demostración: Es una consecuencia directa de los resultados anteriores (8.4.1):

$$a^2 + b^2 = n \cdot c + m \cdot c = (n+m) \cdot c = c \cdot c = c^2$$

Demostración de Elementos 1.47: Sea ΔABC un triángulo rectángulo en A.
Construimos los cuadrados $BCDE$, $ABFG$ y $ACHI$ sobre cada uno de los tres lados.

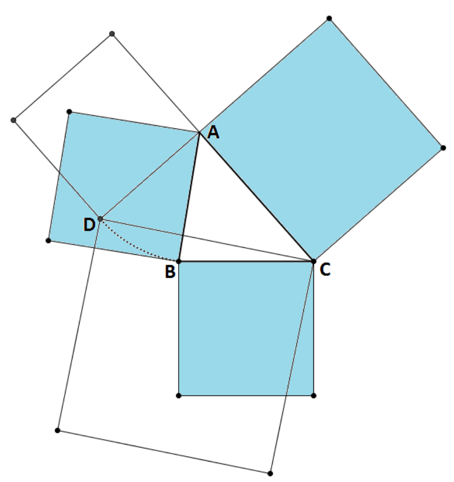


Los puntos G, A y C están alineados pues forman ángulos suplementarios (3.5.8).
De la misma forma deducimos que los puntos B, A y I están alineados.
Puesto que $\angle CBE \cong \angle ABF$ (ambos son rectos), tenemos que
$\angle ABE = \angle ABC + \angle CBE \cong \angle ABC + \angle ABF = \angle CBF$
pero también $\overline{BC} \cong \overline{BE}$ y $\overline{BA} \cong \overline{BF}$ pues son cuadrados, luego por el criterio SAS de congruencia de triángulos deducimos que $\Delta FBC \cong \Delta ABE$.
Trazamos la recta paralela a $\overleftrightarrow{BE}$ por A, que cortará a $\overline{BC}$ en el punto J y a $\overline{ED}$ en el punto K.
El área del rectángulo $BEKJ$ es el doble de la del triángulo ΔABE, pues ambos tienen la misma base $\overline{BE}$ y están delimitados por las mismas rectas paralelas $\overleftrightarrow{BE} // \overleftrightarrow{AK}$.
De la misma forma, el área del cuadrado $FBAG$ es el doble de la del triángulo ΔFBC, pues ambos tienen la misma base $\overline{FB}$ y están delimitados por las mismas rectas paralelas $\overleftrightarrow{FB} // \overleftrightarrow{CG}$.
Y puesto que acabamos de ver que ambos triángulos son congruentes, tendrán la misma área, por lo que el rectángulo $BEKJ$ tendrá el mismo área que el cuadrado $FBAG$.
(En este punto Euclides utiliza la noción común "si dos cosas son iguales sus dobles también serán iguales" sin haberla declarado previamente)
De la misma se demuestra que el área del rectángulo $JCDK$ es igual al área del cuadrado $ACHI$.
Puesto que el cuadrado $BCDE$ es unión disjunta de los rectángulos $BEKJ$ y $ACHI$, su área será la suma de ambos, es decir, de los cuadrados $FBAG$ y $ACHI$, tal y como queríamos ver.

8.4.3 Teorema. El recíproco del teorema de Pitágoras. (Elementos 1.48)
Todo triángulo ΔABC que cumpla $AB^2 = BC^2 + AC^2$ es rectángulo en el vértice C.

Demostración: Sea un triángulo ΔABC, y $a = BC$, $b = AC$, y $c = AB$.
Sabemos que se cumple $a^2 + b^2 = c^2$.
Construimos un triángulo $\Delta A'B'C'$ rectángulo con los catetos a y b.
En este triángulo podemos aplicar el teorema de Pitágoras:
$(A'B')^2 = (A'C')^2 + (B'C')^2 = b^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow (A'B')^2 = c^2 \Rightarrow A'B' = c$
Y por tanto podemos aplicar el criterio SSS de semejanza de triángulos:
$\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$, y por tanto $\angle C' = \angle C$ será recto.

Demostración de Elementos 1.48:
Por comodidad denotaremos por $\Diamond AB$ el cuadrado construido sobre el segmento $\overline{AB}$, y denotemos por $[\Diamond AB]$ su área.
Sea ΔABC un triángulo en el cual se cumple $[\Diamond BC] = [\Diamond AB] + [\Diamond AC]$. Queremos ver que $\angle BAC$ es un ángulo recto.
Trazamos la perpendicular al lado $\overline{AC}$ y sea D un punto de dicha perpendicular tal que $\overline{AD} \cong \overline{AB}$.



Puesto que $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ se deduce que $[\Diamond AD] = [\Diamond AB]$.
Puesto que el triángulo ΔADC es recto en A, podemos aplicar en este triángulo el Teorema de Pitágoras para deducir que $[\Diamond CD] = [\Diamond AD] + [\Diamond AC]$, luego

$$[\Diamond CD] = [\Diamond AD] + [\Diamond AC] = [\Diamond AB] + [\Diamond AC] = [\Diamond BC]$$

Luego $[\Diamond CD] = [\Diamond BC]$ y por tanto $\overline{CD} \cong \overline{BC}$ (aquí Euclides aplica la propiedad de que si dos cuadrados tienen la misma área entonces tienen el mismo lado sin haberla demostrado antes)
Así pues, $\overline{CD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ y $\overline{AC} \cong \overline{AC}$, luego podemos aplicar el criterio SSS de congruencia de triángulos para deducir que $\Delta ADC \cong \Delta ABC$, y por tanto $\angle BAC \cong \angle DAC$ que es un ángulo recto.

Nota histórica. Aunque en Occidente asociamos este teorema a la figura de **Pitágoras de Samos** (580-500AC aprox.), uno de los grandes matemáticos de la antigua Grecia, podemos encontrar este resultado en documentos chinos mucho más antiguos, por ejemplo en el principio del Zhou-Bi Suan-Jing, alrededor del 1100AC.

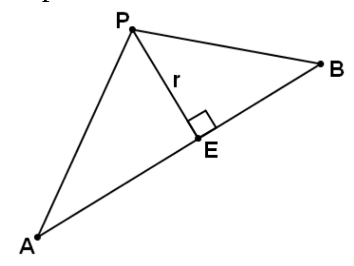
8.4.4 Lema.
Para cualquier par de puntos X, Y de una recta $\overleftrightarrow{AB}$ se cumple

$$X = Y \Leftrightarrow XA^2 - XB^2 = YA^2 - YB^2$$

Demostración. $\Rightarrow$ Es trivial.
$\Leftarrow$ Introducimos coordenadas en la recta. Sean x, y, a, b números asociados respectivamente a los puntos X, Y, A, B.

$$XA^2 - XB^2 = YA^2 - YB^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 - (x-b)^2 = (y-a)^2 - (y-b)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2xa + a^2 - (x^2 - 2xb + b^2) = y^2 - 2ya + a^2 - (y^2 - 2yb + b^2) \Leftrightarrow$$
$$-2xa + 2xb = -2ya + 2yb \Leftrightarrow$$
$$x(b-a) = y(b-a) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow X = Y$$

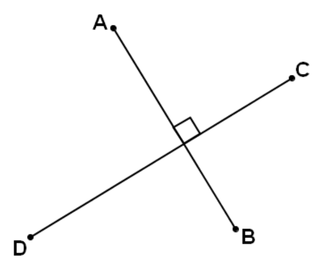
8.4.5 Teorema. Caracterización métrica de los puntos de una perpendicular.
Sea E un punto de una recta $\overleftrightarrow{AB}$, y sea r la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por E.



$$P \in r \Leftrightarrow PA^2 - PB^2 = EA^2 - EB^2$$

Demostración. $\Rightarrow$ Es una aplicación directa del Teorema de Pitágoras.
$\Leftarrow$ Sea s la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por P, y sea F su punto de corte con $\overleftrightarrow{AB}$. Aplicando la primera parte de esta misma demostración tenemos que $PA^2 - PB^2 = FA^2 - FB^2$, y puesto que, por hipótesis, $PA^2 - PB^2 = EA^2 - EB^2$, llegamos a $FA^2 - FB^2 = EA^2 - EB^2$, y por tanto, aplicando el lema anterior, $E = F$. Finalmente, por unicidad de las rectas perpendiculares, $P \in s = r$.

8.4.6 Teorema. Caracterización métrica de dos segmentos perpendiculares.
Dados cuatro puntos A, B, C, D del plano,

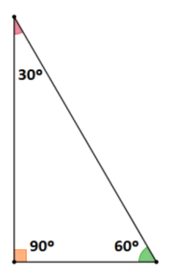


$$AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$$

Demostración. Este teorema se demostrará en 21.7.6 dentro del contexto de un plano complejo. Es el apartado a del problema #26 de **[Prob4]**.

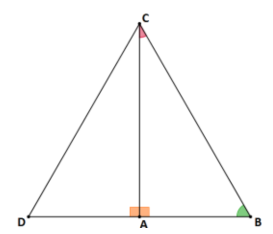
8.5 Algunos triángulos notables.

8.5.1 Teorema. Primera caracterización del triángulo 30-60-90.



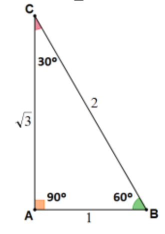
Un triángulo ΔABC tiene ángulos 30º-60º-90º si y sólo si es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide el doble que el cateto más corto.

Demostración. Sea un triángulo ΔABC tal que $\angle A = 90^{o}$, $\angle B = 60^{o}$ y $\angle C = 30^{o}$. Prolongamos el lado AB hasta un punto D tal que $AD = AB$.



Los triángulos ΔDAC y ΔBAC son congruentes por el criterio SAS.
Por lo tanto $\angle BDC = \angle ADC = \angle ABC = 60^{o}$ y $\angle DCA = \angle ACB = 30^{o}$.
Así pues, $\angle DCB = \angle DCA + \angle ACB = 30^{o} + 30^{o} = 60^{o}$, es decir, el triángulo ΔDCB es equiangular, luego equilátero por 3.8.6, por lo que BC=DB y $BA = AD$ con lo que $BD = 2AB$, y finalmente $BC = 2AB$, como queríamos ver.
Recíprocamente, supongamos que tenemos un triángulo rectángulo ΔABC, con $\angle A = 90^{o}$ y $BC = 2AB$.
Como hemos hecho anteriormente, prologamos el lado AB hasta un punto D tal que $AD = AB$. Los triángulos ΔDAC y ΔBAC son congruentes por el criterio SAS. Luego $DC = BC$. Y puesto que también $DB = DA + AB = 2AB = BC$, el triángulo ΔDCB será equilátero, y por tanto equiangular por 3.8.6, por lo que $\angle A = \angle ABC = \angle DBC = 60^{o}$.
Por último, $\angle C = 180 - \angle A - \angle B = 180 - 90 - 60 = 30^{o}$.

8.5.2 Teorema. Segunda caracterización del triángulo 30-60-90.



Un triángulo ΔABC tiene ángulos 30º-60º-90º si y sólo si sus lados mantienen una proporción $1 : \sqrt{3} : 2$.

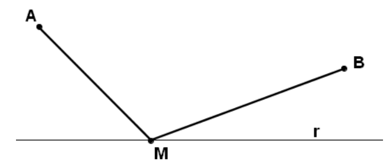
Demostración. Acabamos de demostrar que en todo triángulo 30-60-90 la hipotenusa BC es el doble que el cateto más corto AB, y $AC = \sqrt{3}AB$ se deduce por Pitágoras.
Veamos ahora el recíproco: En primer lugar, se trata de un triángulo rectángulo, pues $2^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2$ y aplicamos el recíproco del teorema de Pitágoras (8.4.3). Y puesto que se trata de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide el doble que el cateto más corto, basta aplicar la caracterización anterior.

8.5.3 Teorema. El teorema del triángulo 45-45-90.
Un triángulo ΔABC tiene ángulos 45º-45º-90º si y sólo si es un triángulo rectángulo isósceles.

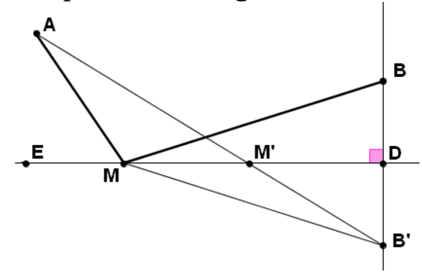
Demostración. $\Rightarrow$ Por definición. $\Leftarrow$ Si es isósceles tendrá dos ángulos iguales y por ser un triángulo rectángulo el tercero será de 90º. Luego $2\alpha + 90º = 180º \Rightarrow \alpha = 45º$

8.6 El Problema de Herón.

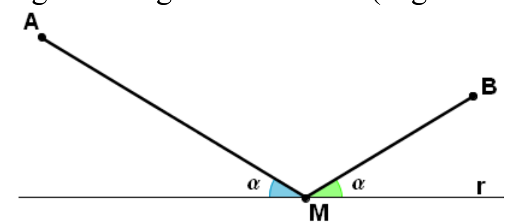
8.6.1 Proposición. El Problema de Herón.
Dos puntos A y B se encuentran al mismo lado de una recta r. Queremos encontrar un punto M en r para el cual la suma de distancias de A a M y de M a B sea mínima.



Solución. Sea B' el punto simétrico de B respecto de r.
Sea M' el punto de intersección entre AB' y la recta r.
Tenemos $MB = MB'$, y por la desigualdad triangular (5.1.4a) aplicada al triángulo $\Delta AMB'$, $AM + MB' \geq AB'$, cumpliéndose la igualdad sólo en el caso M=M'.



Añadimos un par de puntos E y D de la recta para denotar cómodamente los ángulos.
El punto $M' = AB' \cap r$ está caracterizado por cumplir $\angle AM'E = \angle DM'B'$, y puesto que $\angle DM'B' = \angle DM'B$, para cualquier punto M' de r, llegamos a la caracterización de M' como el punto de r para el cual $\angle AM'E = \angle DM'B$, es decir, el ángulo "de entrada" (ángulo de incidencia) es igual al ángulo "de salida" (ángulo de reflexión).

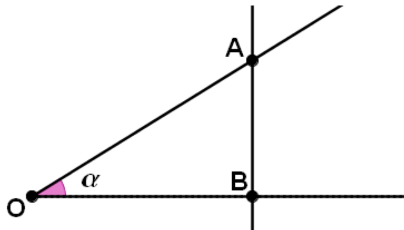


9 Trigonometría.

9.1 Las razones trigonométricas.

9.1.1 Definición. Razones trigonométricas de ángulos agudos.

Sea un ángulo agudo α . Sea A un punto arbitrario de uno de sus lados y sea B el pie de la perpendicular al lado opuesto de A.



El triángulo ΔAOB tendrá un ángulo recto y otro igual a α , luego sus ángulos serán independientes de la elección del punto A. Si tomamos puntos distintos obtendremos triángulos semejantes, luego podemos definir el seno y el coseno de α como las razones

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{OA}\right|} \ , \ \cos(\alpha) = \frac{\left|\overline{OB}\right|}{\left|\overline{OA}\right|} \quad \text{y} \quad \tan(\alpha) = \frac{\left|\overline{BA}\right|}{\left|\overline{OB}\right|} \ si \left|\overline{OB}\right| \neq 0$$

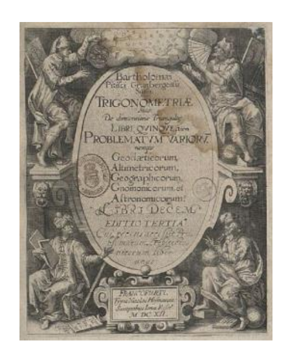
Observamos que podemos tomar el punto A a una unidad de distancia de O, y entonces el seno y el coseno de α son simplemente las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{OB}$.

Se define la cotangente de un ángulo como

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}, \text{ siempre que } \tan(\alpha) \neq 0$$

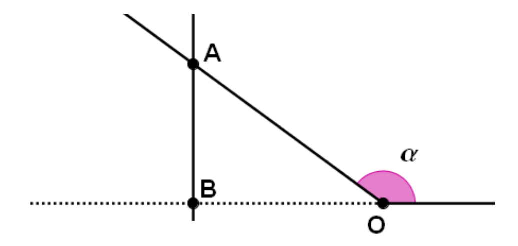
Nota histórica.

El matemático, astrónomo y teólogo **Bartholomaeus Pitiscus** fue el primero en acuñar el término trigonometría en su libro *Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* (1595). Es una obra en cinco volúmenes sobre trigonometría esférica y plana.
En *Thesaurus mathematicus* (1613), Pitiscus mejoró las tablas trigonométricas y el Magnus Canon doctrinæ triangulorum de Georg Joachim Rheticus.



Fuente: M. Macho

9.1.2 Definición. Razones trigonométricas de ángulos obtusos.
Las definiciones de seno y coseno valen tal cual para ángulos obtusos, pero en este caso convendremos en que **el coseno tiene signo negativo**.



9.1.3 Teorema. La propiedad fundamental de la trigonometría.

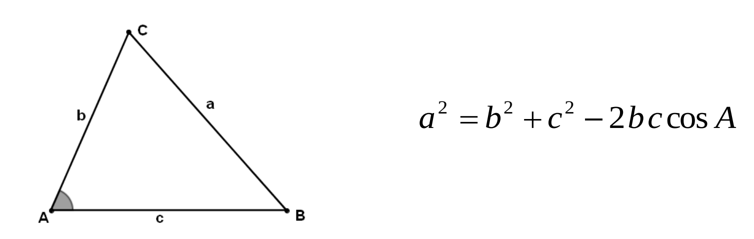
$$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$$

Demostración.

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow 1=\frac{AB^2}{AB^2}=\frac{BC^2+AC^2}{AB^2}=$$

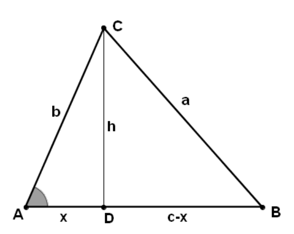
$$=\frac{BC^2}{AB^2}+\frac{AC^2}{AB^2}=\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)$$

9.1.4 Teorema. El Teorema del coseno (Elementos 2.13).



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Demostración: Trazamos la perpendicular por AB a C. Sea D su punto de corte con AB.



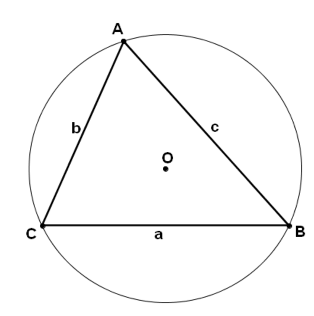
Aplicando Pitágoras al triángulo rectángulo ADC tenemos: $x^2+h^2=b^2$ (1)
Y de la misma forma aplicando Pitágoras al triángulo BDC: $(c-x)^2+h^2=a^2$
Por lo tanto:

$$(c-x)^2+h^2=a^2 \Rightarrow c^2+x^2-2cx+h^2=a^2 \Rightarrow b^2+c^2-2cx=a^2 \quad (1)$$

Por definición de coseno: $\cos A=\frac{x}{b}\Rightarrow x=b\cos A$
Y substituyendo en la igualdad anterior llegamos a: $b^2+c^2-2bc\cos A=a^2$

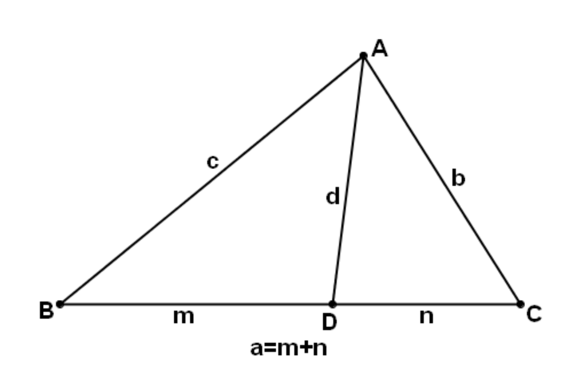
Podemos realizar una demostración similar en el caso que el triángulo ABC sea obtuso.

9.1.5 Teorema. El teorema del seno.
En el apartado 11.6.4 se demostrará el siguiente resultado: Sea ABC un triángulo y O el centro de su circunferencia circunscrita. Sea r el radio de esta circunferencia.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

9.1.6 Corolario. Teorema de Stewart.
Dado el triángulo ABC, sean a, b, c las longitudes de los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sea D un punto dentro del segmento BC.
Si BD = m, CD = n y AD = d, se cumple:



$$d^2 a = b^2 m + c^2 n - mna$$

Demostración. Sea $\alpha = \angle BDA$, y $\beta = \angle CDA$. Puesto que son suplementarios, $\cos(\beta) = -\cos(\alpha)$.
Aplicamos el teorema del coseno (9.1.4) a los triángulos ΔABD y ΔADC
En ΔABD : $c^2 = m^2 + d^2 - 2md\cos(\alpha)$
En ΔADC :

$$b^2 = n^2 + d^2 - 2nd\cos(\beta) \Leftrightarrow b^2 = n^2 + d^2 + 2nd\cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{b^2 - n^2 - d^2}{2nd}$$

$$c^2 = m^2 + d^2 - 2md\cos(\alpha) \Leftrightarrow c^2 = m^2 + d^2 - 2md\frac{b^2 - n^2 - d^2}{2nd}$$

$$\Leftrightarrow c^2 - m^2 - d^2 = m\frac{n^2 + d^2 - b^2}{n}$$

$$\Leftrightarrow nc^2 - nm^2 - nd^2 = mn^2 + md^2 - mb^2 \Leftrightarrow nc^2 - nm^2 - mn^2 + mb^2 = md^2 + nd^2$$

$$\Leftrightarrow nc^2 + mb^2 - (nm^2 + mn^2) = (m+n)d^2 \Leftrightarrow nc^2 + mb^2 - nm(m+n) = ad^2$$

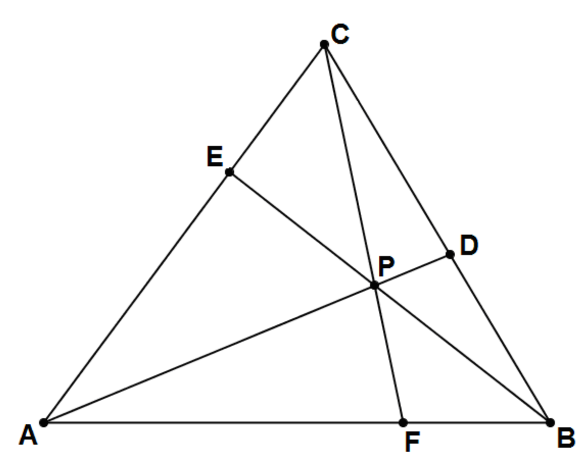
$$\Leftrightarrow nc^2 + mb^2 - nma = ad^2$$

9.1.7 Teorema. Versión trigonométrica del Teorema de Ceva.
Dado un triángulo ΔABC y tres cevianas AD, BE y CF, son equivalentes:

a) AD, BE y CF son concurrentes, es decir, pasan por un mismo punto P.

b) $\dfrac{\sin\angle ABE\ \sin\angle BCF\ \sin\angle CAD}{\sin\angle DAB\ \sin\angle EBC\ \sin\angle FCA}=1$

c) $\dfrac{|FB|\cdot|DC|\cdot|EA|}{|AF|\cdot|BD|\cdot|CE|}=1$



Observación: En 11.1.2 se demuestra $a)\Leftrightarrow c)$

Demostración.
$a)\Rightarrow b)$
Aplicando el Teorema del Seno al triángulo ΔABP:
$$\frac{\sin\angle ABE}{AP}=\frac{\sin\angle BAD}{PB}=\frac{\sin\angle APB}{AB}\Rightarrow\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle BAD}=\frac{AP}{PB}$$
Aplicando el Teorema del Seno al triángulo ΔAPC:
$$\frac{\sin\angle DAC}{PC}=\frac{\sin\angle ACF}{AP}=\frac{\sin\angle APC}{AC}\Rightarrow\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle ACF}=\frac{PC}{AP}$$
Aplicando el Teorema del Seno al triángulo ΔBPC:
$$\frac{\sin\angle EBC}{PC}=\frac{\sin\angle FCB}{PB}=\frac{\sin\angle BPC}{BC}\Rightarrow\frac{\sin\angle FCB}{\sin\angle EBC}=\frac{PB}{PC}$$
Multiplicando estas tres igualdades obtenemos la igualdad deseada:
$$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle BAD}\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle ACF}\frac{\sin\angle FCB}{\sin\angle EBC}=\frac{AP}{PB}\frac{PC}{AP}\frac{PB}{PC}=1$$

$b)\Rightarrow c)$
Aplicando el Teorema del Seno al triángulo ΔAFC:
$$\frac{AF}{\sin\angle FCA}=\frac{AC}{\sin\angle AFC}\Leftrightarrow\frac{AC}{AF}=\frac{\sin\angle AFC}{\sin\angle FCA}$$

Aplicando el Teorema del Seno al triángulo ΔFCB:
$$\frac{FB}{\sin\angle FCB}=\frac{BC}{\sin\angle CFB}\Leftrightarrow\frac{FB}{BC}=\frac{\sin\angle FCB}{\sin\angle CFB}$$

Puesto que $\angle AFC + \angle BFC = 180º$ tenemos que $\sin \angle AFC = \sin \angle BFC$, y multiplicando ambas expresiones llegamos a

$$\frac{AC}{AF} \cdot \frac{FB}{BC} = \frac{\sin \angle AFC}{\sin \angle FCA} \cdot \frac{\sin \angle FCB}{\sin \angle CFB} = \frac{\sin \angle CFB}{\sin \angle FCA} \cdot \frac{\sin \angle FCB}{\sin \angle CFB} = \frac{\sin \angle FCB}{\sin \angle FCA}$$

Y de la misma manera llegamos a:

$$\frac{AB}{BD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{\sin \angle DAC}{\sin \angle DAB} \text{ y } \frac{BC}{CE} \cdot \frac{AE}{AB} = \frac{\sin \angle ABE}{\sin \angle EBC}$$

Multiplicando las tres expresiones llegamos a

$$\frac{AC}{AF} \cdot \frac{FB}{BC} \cdot \frac{AB}{BD} \cdot \frac{CD}{AC} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{AE}{AB} = \frac{\sin \angle ABE}{\sin \angle EBC} \cdot \frac{\sin \angle DAC}{\sin \angle DAB} \cdot \frac{\sin \angle FCB}{\sin \angle FCA}$$

La parte de la izquierda, una vez simplificados los elementos repetidos, es la expresión del apartado c). La parte de la derecha es, por hipótesis, igual a 1.

$c) \Rightarrow a)$

Sea P el punto de corte de las cevianas AD y BE, y sea F' el punto de corte de la recta CP con el lado AB. Tenemos que demostrar que $F = F'$.

Por hipótesis se cumple

$$\frac{|AF| \cdot |BD| \cdot |CE|}{|FB| \cdot |DC| \cdot |EA|} = 1$$

Y, puesto que tenemos demostrado $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c)$, se cumplirá también

$$\frac{|AF'| \cdot |BD| \cdot |CE|}{|F'B| \cdot |DC| \cdot |EA|} = 1$$

Luego

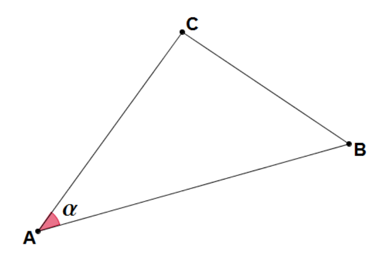
$$\frac{|AF| \cdot |BD| \cdot |CE|}{|FB| \cdot |DC| \cdot |EA|} = \frac{|AF'| \cdot |BD| \cdot |CE|}{|F'B| \cdot |DC| \cdot |EA|} \Rightarrow \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AF'|}{|F'B|}.$$

Esto sólo puede pasar cuando $F = F'$.

Problema propuesto: Problemas #12 de **[Prob5]**.

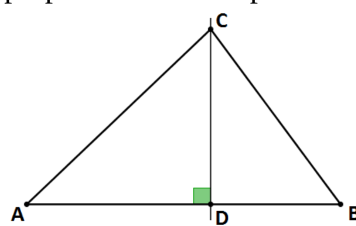
9.2 Área mediante trigonometría.

9.2.1 Teorema. Área del triángulo mediante trigonometría.
Sea un triángulo ΔABC. Entonces



$$\left[\Delta ABC\right]=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin\angle CAB}{2}$$

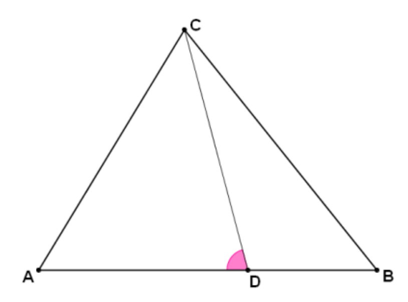
Demostración. Trazamos una perpendicular $\overline{CD}$ por el vértice C del triángulo.



Luego ΔACD será un triángulo rectángulo y por tanto
$\sin A=\dfrac{CD}{AC}\Rightarrow CD=AC\sin A$, y por tanto $\left[\Delta ABC\right]=\dfrac{AB\cdot CD}{2}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2}$

Observación. Aunque hemos demostrado este teorema para el caso en que el triángulo es agudo, un razonamiento similar sirve para los casos de triángulos rectángulos y obtusos.

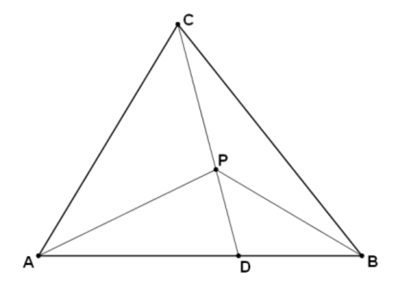
9.2.2 Proposición. Área de un triángulo mediante una ceviana.
Dado un triángulo ΔABC y un punto D en $\overline{AB}$,



$$\left[\Delta ABC\right]=\frac{1}{2}AB\cdot CD\cdot\sin(\angle ADC)$$

Demostración.
$$\left[\Delta ABC\right]=\left[\Delta ADC\right]+\left[\Delta CDB\right]=\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin(\angle ADC)+\frac{1}{2}BD\cdot CD\cdot\sin(\angle CDB)=$$
$$=\frac{1}{2}CD\cdot\sin(\angle ADC)\left(AD+BD\right)=\frac{1}{2}CD\cdot AB\cdot\sin(\angle ADC)$$

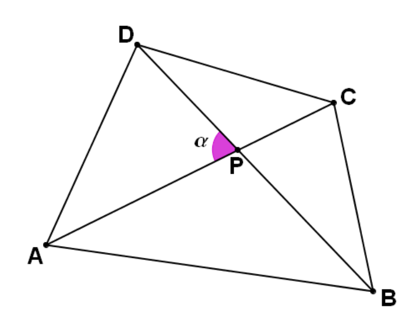
9.2.3 Corolario.
Dado un triángulo ΔABC y un punto P en su interior, sea D el punto de corte de AD con el lado AB. Entonces



$$\frac{PD}{CD} = \frac{[\Delta APB]}{[\Delta ACB]}$$

Demostración. $[\Delta ACB] = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin(\angle ADC)$ y $[\Delta APB] = \frac{1}{2} AB \cdot PD \cdot \sin(\angle ADP)$,
y por tanto $\frac{[\Delta APB]}{[\Delta ACB]} = \frac{(1/2) AB \cdot PD \cdot \sin(\angle ADP)}{(1/2) AB \cdot CD \cdot \sin(\angle ADC)} = \frac{PD}{CD}$

9.2.4 Corolario. Área de un cuadrilátero.
El área de un cuadrilátero es igual a 1/2 del producto de las diagonales por el seno del ángulo que comprenden.



$$[ABCD] = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2}$$

Demostración. Sea P el punto de corte de las dos diagonales. Sea $\alpha = \angle DPA$.

$$[\Delta DAC] = [\Delta DPA] + [\Delta DPC] =$$

$$= \frac{DP \cdot PA \cdot \sin\alpha}{2} + \frac{DP \cdot PC \cdot \sin(180-\alpha)}{2} = \frac{DP \cdot PA \cdot \sin\alpha}{2} + \frac{DP \cdot PC \cdot \sin(\alpha)}{2} =$$

$$= \frac{DP \cdot \sin\alpha \cdot (PA + PC)}{2} = \frac{DP \cdot \sin\alpha \cdot (AC)}{2} = \frac{AC \cdot DP \cdot \sin\alpha}{2}$$

De la misma forma

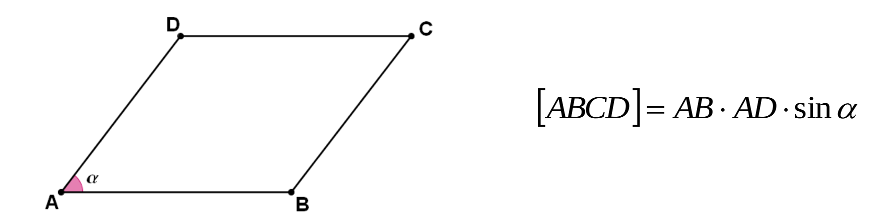
$$[\Delta BAC] = \frac{AC \cdot PB \cdot \sin\alpha}{2}$$

Y por tanto

$$[ABCD] = [\Delta DAC] + [\Delta BAC] =$$

$$= \frac{AC \cdot DP \cdot \sin\alpha}{2} + \frac{AC \cdot PB \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{AC \cdot \sin\alpha \cdot (DP + PB)}{2} = \frac{AC \cdot \sin\alpha \cdot DB}{2}$$

9.2.5 Proposición. Área de un paralelogramo en función de sus lados.

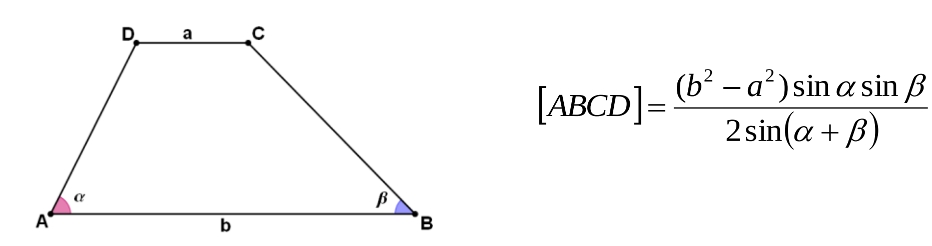


$$[ABCD] = AB \cdot AD \cdot \sin\alpha$$

Demostración. Trazamos la diagonal $\overline{BD}$ que descompone el paralelogramo en dos triángulos congruentes, y por tanto con la misma área:

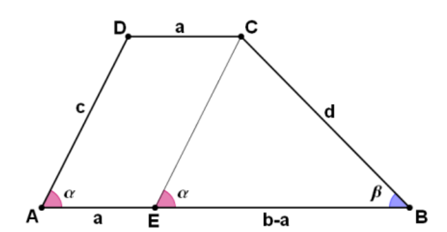
$$[ABCD] = 2[\Delta ABD] = 2\,\frac{AB \cdot AD \cdot \sin\alpha}{2} = AB \cdot AD \cdot \sin\alpha$$

9.2.6 Proposición. Área de un trapecio en función de sus bases y sus ángulos.



$$[ABCD] = \frac{(b^2 - a^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

Demostración. Trazamos la paralela a AD por C que cortará a AB en un punto E.



$$[ABCD] = [AECD] + [\Delta EBC] = a \cdot c \cdot \sin\alpha + \frac{c \cdot (b-a) \cdot \sin\alpha}{2} = c \cdot \sin\alpha \cdot \left(a + \frac{b-a}{2}\right) =$$

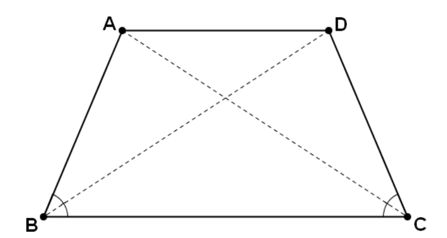
$$= c \cdot \sin\alpha \cdot \left(a + \frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right) = \frac{c \cdot (a+b)\sin\alpha}{2} = (1)$$

Por otro lado, aplicando la fórmula del seno,

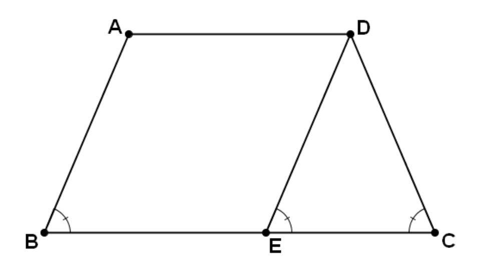
$$\frac{c}{\sin\beta} = \frac{b-a}{\sin(180-(\alpha+\beta))} \Leftrightarrow c = \frac{(b-a)\sin\beta}{\sin(180-(\alpha+\beta))} = \frac{(b-a)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$, y por tanto

$$(1) = \frac{(a+b)(b-a)\sin\alpha\sin\beta}{2} = \frac{(b^2-a^2)\sin\alpha\sin\beta}{2}$$

9.2.7 Proposición. Caracterización de los trapecios isósceles en un plano euclídeo.
Dado un trapecio ABCD en un plano euclídeo, con $AD // BC$, son equivalentes:
a) Los ángulos en los extremos de una base son congruentes.
b) Los lados laterales son congruentes.
c) Sus diagonales son congruentes.



Demostración.
$a) \Leftrightarrow b)$ Trazamos la recta paralela r a AB que pasa por D. Dicha recta no puede ser paralela a BC, puesto que entonces $r // BC // AD \Rightarrow r // AD$, pero $A \in r \cap AD$, llegando al absurdo. Sea E su punto de corte con BC.



El cuadrilátero $ADEB$ es un paralelogramo, luego, si se cumple la condición (a), es decir, $\angle ABC = \angle DEC$, y puesto que $\angle ABC = \angle DCB$ se llega a $\angle DEC = \angle DCB$. Luego ΔDEC es isósceles, y por tanto $\overline{DC} \cong \overline{DE}$. Pero por ser $ADEB$ un paralelogramo, $\overline{DE} \cong \overline{AB}$, y por transitividad de la congruencia de segmentos llegamos finalmente a $\overline{AB} \cong \overline{DC}$.
Si se cumple la condición (b), $\overline{DC} \cong \overline{AB}$, por ser $ADEB$ un paralelogramo tendremos $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, y por tanto $\overline{DC} \cong \overline{DE}$, luego, por la caracterización de los triángulos isósceles, $\angle DEC = \angle DCE$, y puesto que $\angle ABC = \angle DEC$, llegamos a $\angle ABC = \angle DCB$.

$a) \Rightarrow c)$ Basta aplicar el criterio SAS de congruencia a los triángulos ΔABC y ΔDCB, para deducir que si se cumplen (a) y (b), entonces $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

$c) \Rightarrow b)$ Puesto que $AD // BC$, aplicando 8.2.5, los triángulos ΔABC y ΔDBC tendrán el mismo área. Luego, aplicando 9.2.1, y teniendo en cuenta que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$, llegamos a $\sin \angle DBC = \sin \angle ACB$. Puesto que ambos ángulos son agudos o ambos son obtusos, se deduce que $\angle DBC \cong \angle ACB$. Ahora sólo falta aplicar el criterio SAS de congruencia para deducir que $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ y por tanto $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

9.3 Identidades trigonométricas.

9.3.1 Teorema. Fórmulas trigonométricas para la suma y resta de ángulos.

a) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

b) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

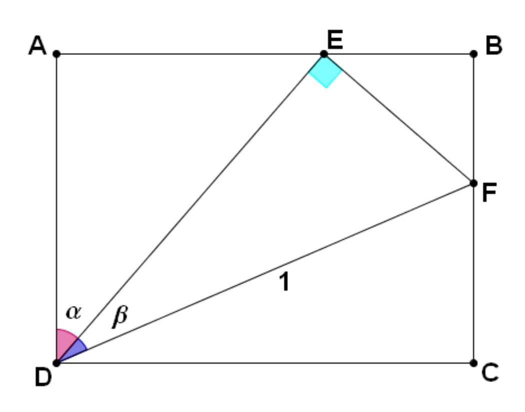
c) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

d) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

e) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

Demostración. Sean α y β dos ángulos tales que $a,\beta,a+\beta<90$. Construimos un rectángulo $\lozenge ABCD$ con un punto E en $\overline{AB}$ y un punto F en $\overline{BC}$ tales que $\alpha=\angle ADE$, $\beta=\angle EDF$, $\angle DEF=90^{o}$ y $|DF|=1$.

Este rectángulo lo podemos construir de la siguiente manera: Dado el triángulo rectángulo ΔDEF con $\beta=\angle EDF$ y $|DF|=1$, trazamos una recta r exterior β con ángulo α, y una recta s perpendicular a r por D. Trazamos ahora la perpendicular a r por E, que se cortará con r en el punto A, y la perpendicular a s por F, que se cortará con s en C. El punto B será la intersección de dichas perpendiculares.



$$\sin\beta=\frac{|EF|}{|DF|}=|EF|,\ \cos\beta=\frac{|DE|}{|DF|}=|DE|$$

En el triángulo ΔEBF :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+90+\angle AED=180\Rightarrow\angle AED=90-\alpha\\ \angle DEF=90\\ \angle AED+\angle DEF+\angle BEF=180\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$90-\alpha+90+\angle BEF=180\Rightarrow\angle BEF=\alpha$$

$$\sin\alpha=\frac{|BF|}{|EF|}\Rightarrow|BF|=\sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{|BE|}{|EF|}\Rightarrow|BE|=\sin\beta\cos\alpha$$

En el triángulo ΔDAE:

$$\sin\alpha = \frac{|AE|}{|DE|} \Rightarrow |DE|\sin\alpha = |AE| \Rightarrow \cos\beta\cdot\sin\alpha = |AE|$$

$$\cos\alpha = \frac{|AD|}{|DE|} \Rightarrow |DE|\cos\alpha = |AD| \Rightarrow \cos\beta\cdot\cos\alpha = |AD|$$

En el triángulo ΔCFD:

Puesto que $AB // CD$ tenemos que $\angle DFC = \alpha+\beta$.

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{|CD|}{|DF|} = |CD| = |AE| + |BE| = \cos\beta\cdot\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{|CF|}{|DF|} = |CF| = |BC| - |BF| = |AD| - |BF| = \cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$

Con lo que llegamos a las fórmulas de la suma de ángulos:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\beta\cdot\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$

De las que deducimos la fórmula de la tangente de la suma:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\beta\cdot\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha} =$$

$$= \frac{(\cos\beta\cdot\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha)/(\cos\beta\cdot\cos\alpha)}{(\cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha\ )/(\cos\beta\cdot\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\beta\sin\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

9.3.2 Corolario. Fórmulas trigonométricas para el ángulo doble.

a) $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

b) $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

c) $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Demostración. Basta aplicar las fórmulas de la suma de ángulos para $\beta = \alpha$. En el apartado b tenemos en cuenta que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

9.3.3 Corolario. Fórmulas trigonométricas para el ángulo mitad.

a) $\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\dfrac{\cos(\alpha)+1}{2}}$

b) $\sin(\alpha/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(\alpha)}{2}}$

c) $\tan(\alpha/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$

Demostración. a) Basta aplicar 9.3.2b para $\beta = 2\alpha$: $\cos(\beta) = 2\cos^2(\beta/2) - 1$.

b) $\sin^2(\beta/2) = 1 - \cos^2(\beta/2) = 1 - \dfrac{\cos(\beta)+1}{2} = \dfrac{2-\cos(\beta)+1}{2} = \dfrac{1-\cos(\beta)}{2}$

c) $\tan^2(\alpha/2) = \dfrac{\sin^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)} = \dfrac{(1-\cos(\alpha))/2}{(1+\cos(\alpha))/2} = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$

$$\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \frac{(1-\cos(\alpha))(1-\cos(\alpha))}{(1+\cos(\alpha))(1-\cos(\alpha))} = \frac{(1-\cos(\alpha))^2}{1-\cos^2(\alpha)} = \frac{(1-\cos(\alpha))^2}{\sin^2(\alpha)}$$

$$\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \frac{(1-\cos(\alpha))(1+\cos(\alpha))}{(1+\cos(\alpha))(1+\cos(\alpha))} = \frac{1-\cos^2(\alpha)}{(1+\cos(\alpha))^2} = \frac{\sin^2(\alpha)}{(1+\cos(\alpha))^2}$$

9.3.4 Ejercicio.

En todo triángulo ΔABC se cumple:

a) $\sin A \sin B \sin C = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B$

b) $\cot B \cot C + \cot A \cot C + \cot A \cot B = 1$

Demostración.

$A + B + C = 180^{o} \Rightarrow$

$0 = \sin(180) = \sin(A+B+C) = \sin(A+B)\cos C + \sin(C)\cos(A+B) =$

$(\sin A \cos B + \sin B \cos A)\cos C + \sin C(\cos A \cos B - \sin A \sin B) =$

$\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C$

Luego

$\sin A \sin B \sin C = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B$

$$1 = \frac{\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B}{\sin A \sin B \sin C} =$$

$$= \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C} + \frac{\cos A \cos C}{\sin A \sin C} + \frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} = \cot B \cot C + \cot A \cot C + \cot A \cot B$$

9.3.5 Tabla. Razones trigonométricas de los ángulos más importantes.

Ángulo	Sin	Cos	Tan	Csc	Sec	Cot
0º	0	1	0	∞	1	∞
15º	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$2+\sqrt{3}$
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
75º	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$2-\sqrt{3}$
90º	1	0	∞	1	∞	0
105º	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$\frac{-\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$-\left(2+\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$-\left(2-\sqrt{3}\right)$
120º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
150º	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-2\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
165º	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$\frac{-\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$-\left(2-\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$-\left(2+\sqrt{3}\right)$
180º	0	-1	0	∞	-1	∞

Fuente: Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (Abramowitz, Stegun, 1972)

10 Circunferencias. Cuadriláteros cíclicos.

Una circunferencia puede no ser redonda.
Ninguno comprendíamos el secreto nocturno de las pizarras
ni por qué la esfera armilar se exaltaba tan sola cuando la mirábamos.
Sólo sabíamos que una circunferencia puede no ser redonda
y que un eclipse de luna equivoca a las flores
y adelanta el reloj de los pájaros.
Ninguno comprendíamos nada:
ni por qué nuestros dedos eran de tinta china
y la tarde cerraba compases para al alba abrir libros.
Sólo sabíamos que una recta, si quiere, puede ser curva o quebrada
y que las estrellas errantes son niños que ignoran las aritmética.

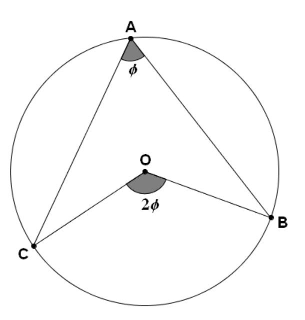
Rafael Alberti, Los ángeles colegiales, en Sobre los ángeles (1929)

En esta sección desarrollamos en un plano euclídeo los resultados sobre circunferencias, cuerdas y tangentes introducidos en el apartado 4.3 en el contexto de un plano de Hilbert.

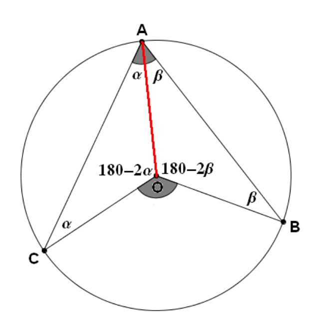
10.1 Ángulos inscritos y cuerdas.

10.1.1 Teorema. Teorema del ángulo central. (Elementos 3.20)

En un círculo, el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia, cuando los ángulos tienen como base la misma circunferencia.

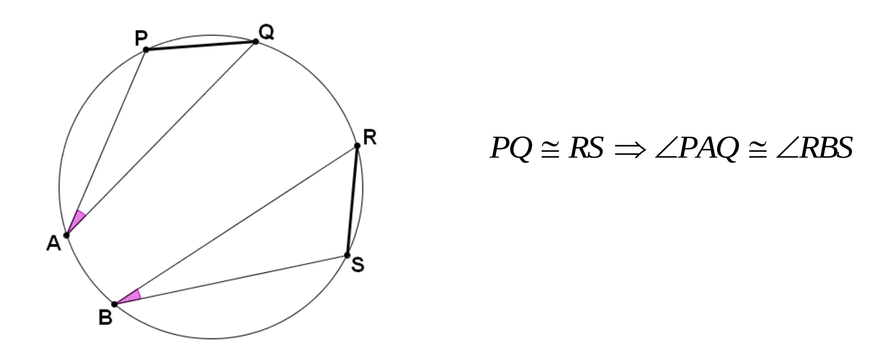


Demostración: Trazamos el radio AO

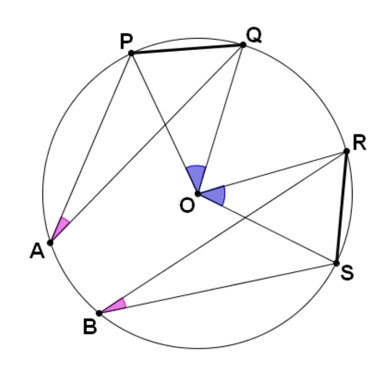


$$\angle COB = 360º - (180º - 2\alpha) - (180º - 2\beta) = 360 - 180 + 2\alpha - 180 + 2\beta =$$
$$2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2\phi$$

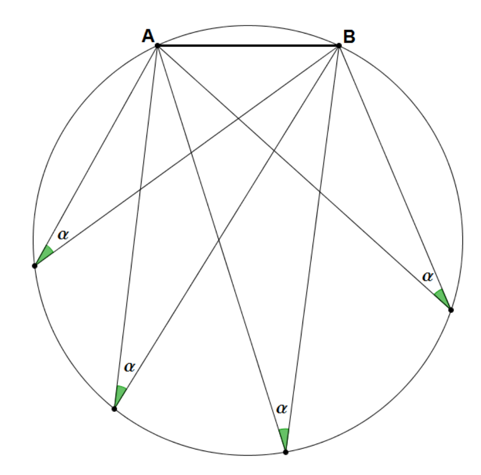
10.1.2 Corolario.
Dos ángulos inscritos en una circunferencia abarcando cuerdas congruentes serán congruentes:



Demostración: Los triángulos ΔPQO y ΔRSO serán congruentes por el criterio SSS, luego $\angle POQ = \angle ROS$. Aplicando 10.1.1, $\angle PAQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \frac{1}{2}\angle ROS = \angle RBS$.

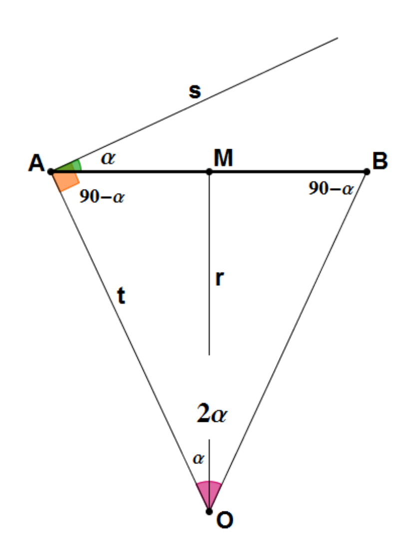


10.1.3 Proposición. El Arco Capaz.
Dado un segmento $\overline{AB}$ y un ángulo α , existirá un arco en el que todo punto P del mismo cumple $\angle APB = \alpha$. A dicho arco le llamaremos **arco capaz**.

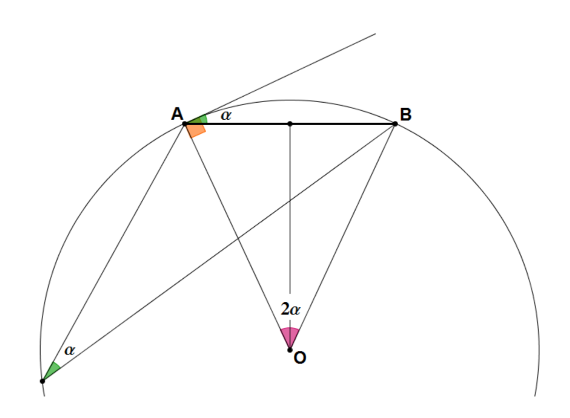


Un observador que se moviera por dicho arco siempre vería el segmento con el mismo ángulo α .

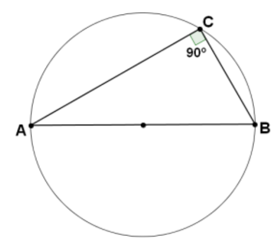
Para encontrar el arco capaz procederemos de la siguiente manera:
Trazamos la mediatriz r del segmento $\overline{AB}$.
Trazamos una semirrecta s con un ángulo α sobre el extremo A del segmento.
Trazamos la perpendicular t a s por A.
Sea O el punto de intersección entre r y t.
El arco capaz será la circunferencia de centro O y radio $\overline{OA} = \overline{OB}$.
En efecto, Sea M el punto medio de $\overline{AB}$.
Los triángulos ΔAMO y ΔBMO son congruentes, pues son dos triángulos rectángulos con catetos congruentes. Luego $90 - \alpha = \angle OAB = \angle OBA$, y $\overline{AO} \cong \overline{BO}$, es decir, el triángulo ΔABO es un triángulo isósceles con $\angle AOB = 180 - 2(90 - \alpha) = 2\alpha$



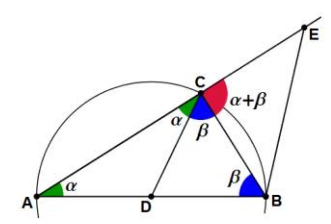
Por 10.1.1, los puntos de la circunferencia con centro O y radio $\overline{AO}$ abarcarán un ángulo igual a la mitad del central, es decir, igual a α.



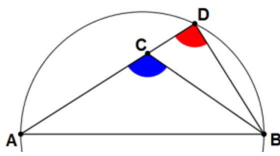
10.1.4 Teorema. Teorema de Tales. (Parte de Elementos 3.31)
Dada una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, todo ángulo $\angle ACB$ será recto si y sólo si está inscrito en dicha circunferencia.



Demostración: Sea un triángulo ΔABC cuyo lado $\overline{AB}$ es el diámetro de una circunferencia de centro D. Supongamos que el tercer vértice pertenece a dicha circunferencia. Trazamos el radio $\overline{DC}$. Puesto que $\overline{CD} \cong \overline{BD}$, el triángulo ΔBCD es isósceles en D y por tanto $\beta = \angle DBC \cong \angle DCB$.De la misma forma ΔADC es isósceles en D, luego $\alpha = \angle DAC \cong \angle ACD$. Así pues, $\angle ACB = \alpha + \beta$.



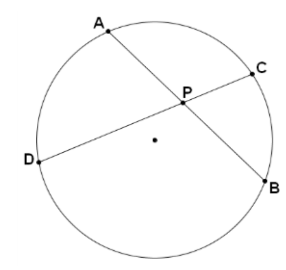
Ahora bien, prolongando el lado $\overline{AC}$ hasta un punto E, sabemos que también $\angle ECB = \alpha + \beta$ (Es un ángulo exterior), luego $\angle ACB \cong \angle FCB$, y por tanto ambos ángulos son rectos.
Recíprocamente, supongamos que tenemos un triángulo ΔABC rectángulo en C. Trazamos la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$. Supongamos que C no está en esta circunferencia.
Prolongamos la recta $\overleftrightarrow{AC}$ hasta un punto D que sí pertenece a la circunferencia.



Por la primera parte de esta demostración, $\angle ADB$ será recto, pero $\angle ACB$ también es recto, ambas rectas serán perpendiculares comunes a una misma recta por un punto exterior, luego $C = D$ y por tanto C pertenecerá a la circunferencia.

Nota histórica. Tales vivió en Mileto, una isla griega en la costa de Asia Menor, entre 625 y 546 AC, aproximadamente. Tenemos certeza de este periodo porque, según Herotodo, predijo un eclipse solar que se ha podido datar, con las técnicas modernas, exactamente el 28 de mayo del 585 AC. Tradicionalmente se ha señalado a Tales como el primer gran filósofo, matemático y científico griego. Se le considera precursor del rigor lógico en las demostraciones geométricas, y en general, del desarrollo práctico y teórico de la geometría. Entre otras muchas anécdotas atribuidas a Tales, se cuenta que, en un viaje a Egipto, Tales fue capaz de medir la altura de una pirámide midiendo su sombra justo en el momento del día en que los objetos proyectaban una sombra igual a su altura.

10.1.5 Teorema. Potencia de un punto interior de una circunferencia.



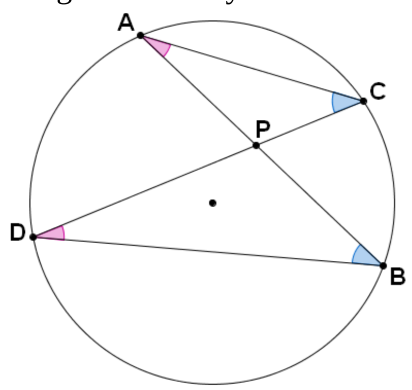
$AP \cdot PB = CP \cdot PD$

para cualquier par de cuerdas AB y CD que pasen por P.

El recíproco de este teorema también es cierto: Dados cuatro puntos A, B, C y D del plano, y siendo $P = AB \cap CD$, si se cumplen las condiciones:
a) P pertenece a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, o bien no pertenece ni a $\overline{AB}$ ni a $\overline{CD}$.
b) $AP \cdot PB = CP \cdot PD$

Entonces los cuatro puntos pertenecen a una misma circunferencia.

Demostración: Trazamos los segmentos AC y BD.



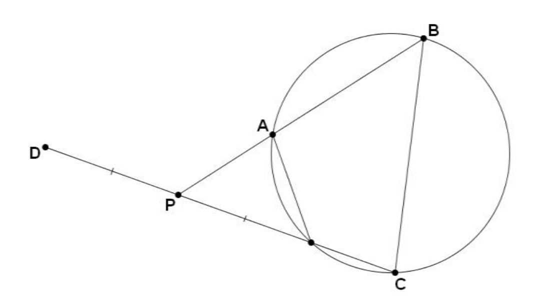
Los triángulos ΔACP y ΔDBP son semejantes, pues $\angle CAP \cong \angle PCB$ y $\angle ACP \cong \angle PBD$ al ser ángulos que abarcan un mismo arco (10.1.2). Luego sus lados son proporcionales:

$$\frac{AP}{DP} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow AP \cdot PB = PC \cdot DP$$

Veamos ahora el recíproco. Supongamos que un punto P cumple las dos condiciones anteriores.
Sea D' el punto de corte entre la recta CD y la circunferencia circunscrita (ABC).
Aplicamos este mismo teorema para deducir que $AP \cdot PB = CP \cdot PD'$.
Puesto que, además, por hipótesis, se cumple $AP \cdot PB = CP \cdot PD$, se deduce directamente $CP \cdot PD' = CP \cdot PD$ y por lo tanto $PD' = PD$.

Luego, o bien $D = D'$, tal y como queremos ver, o bien D y D' son puntos simétricos respecto de P.
Pero, puesto que A, C, B y D’ pertenecen a una misma circunferncia, se cumple que P pertenece a $\overline{AB}$ y CD' o bien ni pertenece a $\overline{AB}$ ni a CD', y si D y D' son puntos simétricos respecto de P, entonces deja de suceder la condición a), llegando a contradicción. Luego $D = D'$.

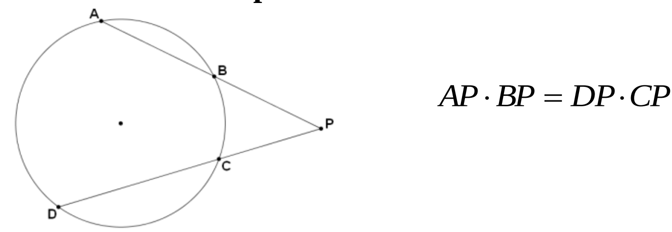
Nota. Es importante reseñar que si la condición $AP \cdot PB = CP \cdot PD$, por si sola no garantiza que los cuatro puntos pertenezcan a una misma circunferencia:



$AP \cdot PB = CP \cdot PD$, pero no pertenecen a una misma circunferencia.

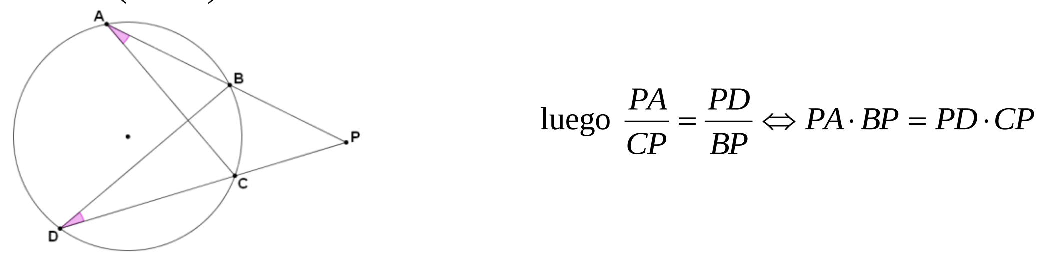
Es necesario asegurarnos de que el punto P pertenece al interior de los dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, o no pertenece a ninguno de ellos.

10.1.6 Teorema. Potencia de un punto exterior de una circunferencia.



$AP \cdot BP = DP \cdot CP$

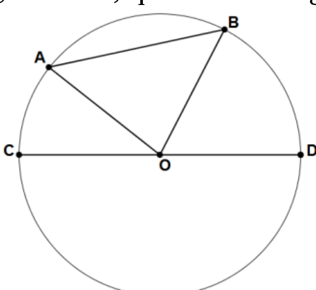
Demostración. Trazamos los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, con los que obtenemos dos triángulos ΔPAC y ΔPDB que serán semejantes pues comparten el ángulo en P y $\angle PAC = \angle BAC \cong \angle BDB = \angle BDP$ pues son ángulos que abarcan el mismo arco de la circunferencia (10.1.2)



luego $\dfrac{PA}{CP} = \dfrac{PD}{BP} \Leftrightarrow PA \cdot BP = PD \cdot CP$

10.1.7 Proposición.
El diámetro es siempre mayor que cualquier otra cuerda.

Demostración. Sea una circunferencia c con centro O, sea $\overline{CD}$ un diámetro y sea $\overline{AB}$ una cuerda que no sea diámetro, es decir, que no contenga el punto O.



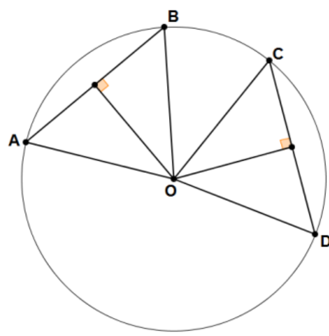
Entonces ΔAOB es un triángulo, y por tanto podemos aplicar la desigualdad triangular: $\left|\overline{AB}\right| < \left|\overline{AO}\right| + \left|\overline{OB}\right|$

Pero $\overline{AO}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ son radios, luego $\left|\overline{AO}\right| = \left|\overline{OB}\right| = \left|\overline{OC}\right| = \left|\overline{OD}\right|$, y por tanto

$$\left|\overline{AB}\right| < \left|\overline{AO}\right| + \left|\overline{OB}\right| = \left|\overline{CO}\right| + \left|\overline{OD}\right| = \left|\overline{CD}\right|$$

10.1.8 Proposición.
Cuerdas congruentes equidistan del centro. Recíprocamente, cuerdas que equidistan del centro son congruentes.

Demostración. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos cuerdas congruentes de la misma circunferencia $c(O,r)$. Trazamos los radios para completar dos triángulos ΔAOB y ΔCOD, que serán congruentes por el criterio SSS.

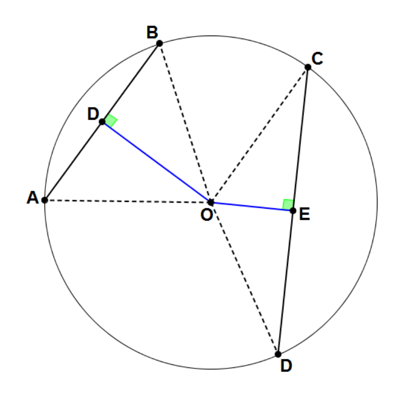


Son dos triángulos isósceles en el vértice O y congruentes, por lo tanto sus respectivas alturas por el vértice O serán segmentos congruentes (3.11.5), y en consecuencia la distancia de cada cuerda al centro será la misma.

10.1.9 Proposición.
Dadas dos cuerdas, la mayor dista menos del centro. Recíprocamente, la que dista menos del centro es mayor.

Demostración. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos cuerdas en la misma circunferencia $c(O,r)$. Sean D y E los pies de las perpendiculares respectivas por el centro O. Queremos ver que

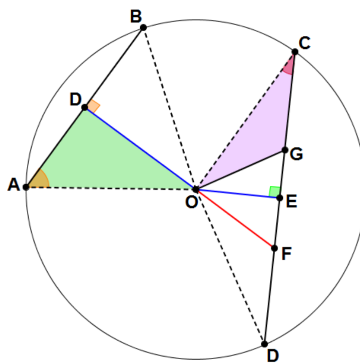
$$\left|\overline{AB}\right| < \left|\overline{CD}\right| \Leftrightarrow \left|\overline{DO}\right| > \left|\overline{OE}\right|$$



Supongamos que $|\overline{AB}|<|\overline{CD}|$. Existirá un punto F en el interior de $\overline{CD}$ tal que $\overline{AB}\cong\overline{CF}$.

En los triángulos ΔABO y ΔCFO tenemos $\overline{AB}\cong\overline{CF}$, $\overline{BO}\cong\overline{OC}$ y $\overline{OF}<\overline{OB}$ (pues F pertenece al interior de la circunferencia), luego $|\angle FCO|<|\angle BAO|$.

Sea G el punto medio de $\overline{CF}$. D es el punto medio de $\overline{AB}$ y E es el punto medio de $\overline{CD}$ (3.11.1).

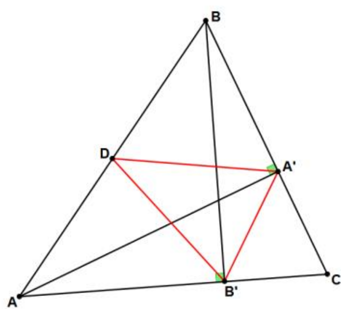


Consideremos los triángulos ΔADO y ΔCGO: $\overline{AO}\cong\overline{OC}$, $\overline{AD}\cong\overline{CG}$, $|\angle GCO|<|\angle DAO|$, luego $|\overline{OD}|>|\overline{OG}|$.

Por ser ΔOEG rectángulo en $\angle E$, $|\overline{OG}|>|\overline{OE}|$, y por transitividad, $|\overline{OD}|>|\overline{OG}|>|\overline{OE}|$, tal y como queríamos ver.

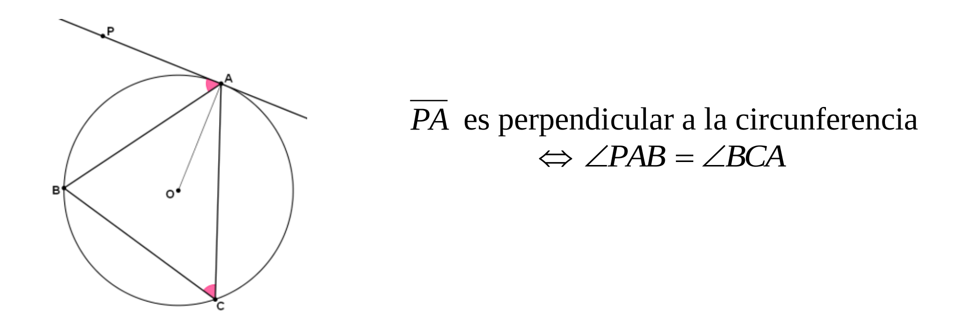
10.1.10 Ejercicio. Triángulo isósceles con alturas y punto medio.

En un triángulo ΔABC, sea D el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y sean $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ alturas. Demostrar que $\Delta DA'B'$ es isósceles.



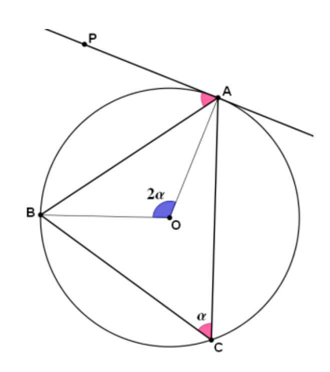
Solución. Ejercicio #1 de **[Prob2]**.

10.1.11 Proposición. Teorema de la tangente.
Sea un triángulo ΔABC inscrito en una circunferencia de centro O. Sea P un punto externo a la circunferencia. Entonces:



$\overline{PA}$ es perpendicular a la circunferencia
$\Leftrightarrow \angle PAB = \angle BCA$

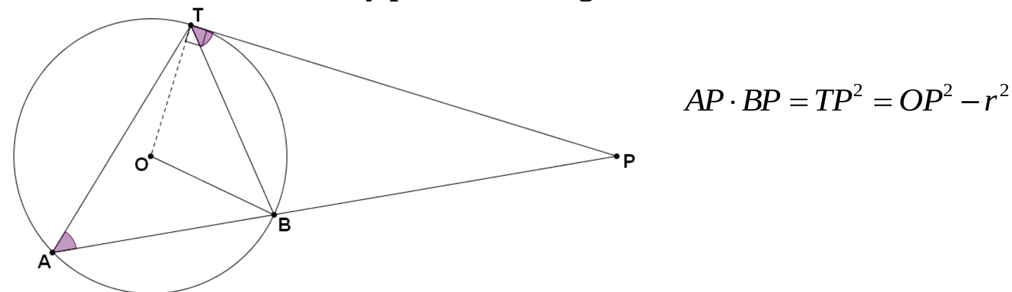
Demostración. $\Rightarrow$ Trazando el radio OB tenemos que $\angle BOA = 2\angle BCA$ por 10.1.1.



$OB = OA$, luego ΔBOA es isósceles, y por tanto $\angle ABO = \angle BAO = 90 - \alpha$.
Puesto que por hipótesis $90 = \angle PAO$, tenemos
$90 = \angle PAO = \angle PAB + \angle BAO = \angle PAB + 90 - \alpha \Rightarrow \angle PAB = \alpha$.
$\Leftarrow$ El razonamiento anterior es simétrico. Puesto que si $\alpha = \angle BCA$ entonces
$\angle BAO = 90 - \alpha$, entonces
$\angle PAO = \angle PAB + \angle BAO = \alpha + 90 - \alpha = 90º$
es decir, $PA \perp AO$, y por tanto PA es tangente a la circunferencia por 4.3.8.

Problema propuesto: Problemas #14 de **[Prob5]**.

10.1.12 Teorema. Potencia y punto con tangencia.



$AP \cdot BP = TP^2 = OP^2 - r^2$

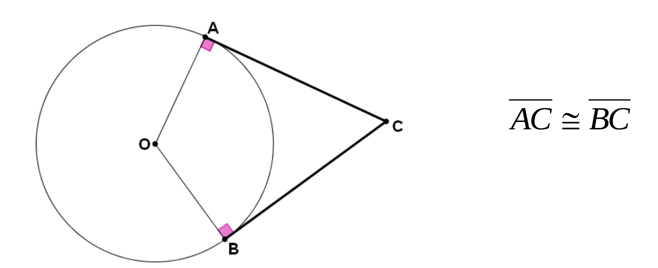
Demostración. Puesto que TP es tangente a la circunferencia, aplicamos la proposición anterior para deducir que $\angle BTP = \angle PAT$, luego $\Delta TAP \approx \Delta BTP$, y por tanto

$$\frac{AP}{TP} = \frac{TP}{BP} \Rightarrow AP \cdot BP = TP^2$$

La identidad $OP^2 - r^2$ es una simple aplicación del Teorema de Pitágoras.

Nota. En esta identidad se basan los conceptos de **eje radical** y **centro radical** que se estudiarán en el apartado 11.15.

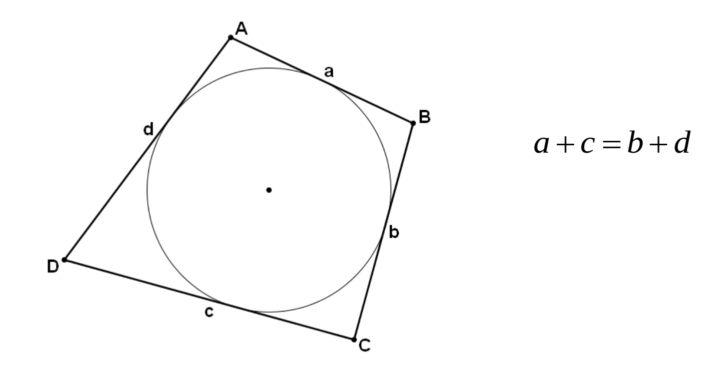
10.1.13 Proposición. Dos segmentos tangentes concurrentes son congruentes.



$$\overline{AC} \cong \overline{BC}$$

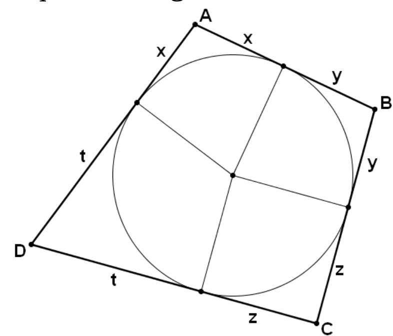
Demostración. Trazando el segmento OC encontramos dos triángulos rectángulos que comparten un cateto: $OA \cong OB$ y la hipotenusa común $\overline{OC}$. Luego, por el criterio HL (3.8.7) serán congruentes, y por tanto $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

10.1.14 Teorema. Caracterización de los cuadriláteros con circunferencia inscrita. Un cuadrilátero tiene una circunferencia inscrita si y sólo si coinciden las sumas de los lados opuestos:



$$a + c = b + d$$

Demostración. Para demostrar su necesidad basta aplicar la proposición anterior a los ocho segmentos involucrados, que serán iguales dos a dos:

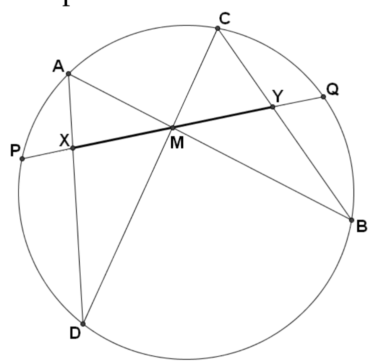


$$a + c = x + y + z + t = y + z + x + t = b + d$$

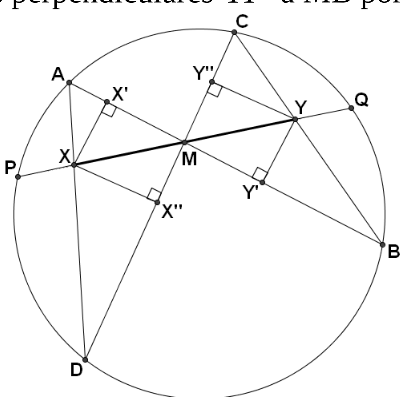
(queda por demostrar la suficiencia)

10.1.15 Teorema. El Teorema de la mariposa.

Sea M el punto medio de una cuerda $\overline{PQ}$ de una circunferencia. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ otras dos cuerdas que pasan por M. Sean X e Y los correspondientes puntos de corte de $\overline{PQ}$ con $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. Entonces M es el punto medio de $\overline{XY}$.



Demostración. Trazamos las perpendiculares XX' a AM por X y XX'' a DM por X. De la misma forma trazamos las perpendiculares YY' a MB por Y y YY'' a MC por Y.



$$\angle X'MX \cong \angle YMY' \Rightarrow \Delta MXX' \approx \Delta MYY' \Rightarrow \frac{MX}{MY} = \frac{XX'}{YY'}$$

$$\angle XMX'' \cong \angle Y''MY \Rightarrow \Delta MXX'' \approx \Delta MYY'' \Rightarrow \frac{MX}{MY} = \frac{XX''}{YY''}$$

Aplicando el teorema 10.1.2:

$$\angle XAX' \cong \angle Y''CY \Rightarrow \Delta AXX' \approx \Delta CYY'' \Rightarrow \frac{XX'}{YY''} = \frac{AX}{CY}$$

$$\angle XDX'' \cong \angle YBY' \Rightarrow \Delta XDX'' \approx \Delta YBY' \Rightarrow \frac{XX''}{YY'} = \frac{DX}{BY}$$

De lo que deducimos:

$$\left(\frac{MX}{MY}\right)^2 = \frac{MX}{MY} \cdot \frac{MX}{MY} = \frac{XX'}{YY'} \cdot \frac{XX''}{YY''} = \frac{XX'}{YY''} \cdot \frac{XX''}{YY'} = \frac{AX}{CY} \cdot \frac{DX}{BY}$$

Por otro lado, por 10.1.5, $AX \cdot DX = PX \cdot QX$ y $CY \cdot BY = PY \cdot QY$, con lo cual

$$\frac{AX}{CY} \cdot \frac{DX}{BY} = \frac{PX \cdot QX}{PY \cdot QY} = \frac{(PM - XM)(XM + MQ)}{(PM + MY)(QM - MY)}$$

Puesto que $PM = MQ$,

$$(PM - XM)(XM + MQ) = (PM - XM)(XM + PM) = PM^2 - XM^2$$
$$(PM + MY)(QM - MY) = (PM + MY)(PM - MY) = PM^2 - YM^2$$

Así pues, y utilizando la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c+a}{d+b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, llegamos a

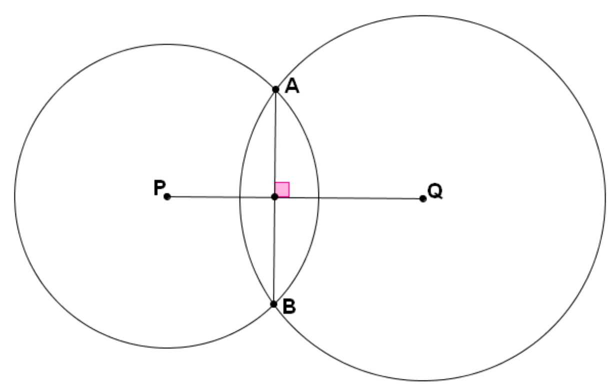
$$\frac{MX^2}{MY^2} = \left(\frac{MX}{MY}\right)^2 = \frac{PM^2 - XM^2}{PM^2 - YM^2} = \frac{PM^2}{PM^2} = 1 \Rightarrow XM^2 = YM^2 \Rightarrow XM = YM$$

Y por tanto M es el punto medio del segmento XY.

Observación 1. Esta demostración se debe a **Coxeter y Greitzer** (“Geometry Revisited”, 1967, pág. 46), y es la que aparece en la wikipedia.

Observación 2. En el apartado 12.2.6 se demostrará este teorema mediante técnicas proyectivas.

10.1.16 Ejercicio.
La cuerda común de dos circunferencias secantes es perpendicular al segmento que une sus centros.



Demostración. $APBQ$ es una cometa pues $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ y $\overline{AQ} \cong \overline{BQ}$, luego basta aplicar 3.13.2 para deducir que $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{PQ}$.

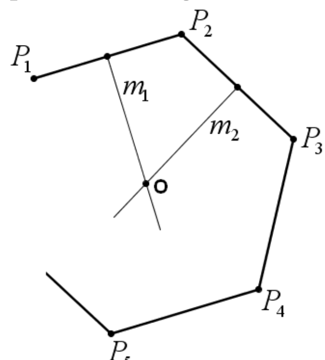
10.2 Polígonos regulares.

10.2.1 Definición. Polígono regular.
Diremos que un polígono es regular cuando todos sus ángulos y todos sus lados sean congruentes.

10.2.2 Definición. Polígono inscrito en una circunferencia.
Diremos que un polígono está inscrito en una circunferencia cuando todos sus vértices estén sobre la circunferencia; de la circunferencia diremos que está circunscrita al polígono.

10.2.3 Teorema.
Todo polígono regular de n lados se puede descomponer en n triángulos isósceles con ángulo central $360/n$ y ángulo lateral $90\left(1-\frac{2}{n}\right)$. Los ángulos internos de un polígono regular miden $180\left(1-\frac{2}{n}\right)$. Todo polígono regular se puede inscribir en una circunferencia.

Demostración. Sea un polígono regular $P_1\,P_1\,P_3\,P_4...P_n$.
Trazamos las mediatrices m_1 de $\overline{P_1P_2}$ y m_2 de $\overline{P_2P_3}$. No pueden ser paralelas pues son perpendiculares a dos rectas no paralelas, luego se cortarán en un punto O.



Por la caracterización de mediatrices (3.9.8), $\overline{P_1O} \cong \overline{P_2O}$, y $\overline{P_2O} \cong \overline{P_3O}$, luego los triángulos ΔP_1OP_2 y ΔP_2OP_3 son isósceles en O, y son congruentes por el criterio SSS.
Por lo tanto $\angle P_2P_1O \cong \angle P_1P_2O \cong \angle P_3P_2O \cong \angle P_2P_3O$.
Llamemos α al ángulo de los vértices del polígono:

$$\alpha = |\angle P_1P_2P_3| = |\angle P_2P_3P_4| = ... = |\angle P_nP_1P_2|$$

Entonces

$$|\angle OP_3P_4| = \alpha - |\angle OP_3P_2| = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = |\angle OP_2P_3|$$

Puesto que se cumple además $\overline{P_3P_4} \cong \overline{P_2P_3}$ y $\overline{P_2O} \cong \overline{P_3O}$, por el criterio SAS deducimos que $\Delta P_3OP_4 \cong \Delta P_2OP_3$, y por tanto $\overline{OP_3} \cong \overline{OP_4}$.
Este procedimiento lo podemos repetir una y otra vez hasta llegar al último vértice P_n, es decir, el punto O es el centro de la circunferencia circunscrita al polígono.

10.2.4 Corolario. Propiedad fundamental del hexágono.
El lado de un hexágono regular es igual al radio del círculo circunscrito.

Demostración. Un hexágono regular se puede descomponer en 6 triángulos rectángulos con ángulo central $360/6=60º$ y ángulos laterales $90\left(1-\frac{2}{6}\right)=60º$, luego son triángulos equiláteros (3.8.6), de lo que se deduce fácilmente el enunciado.

10.2.5 Definición. Apotema.
Se llama **apotema** de un polígono regular a la distancia del centro a los lados.
Esta definición está bien construida puesto que sabemos que todas las cuerdas congruentes son equidistantes al centro (10.1.8).

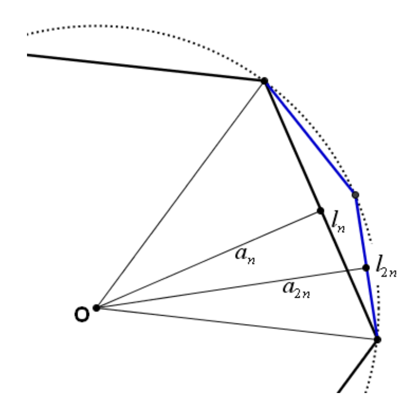
10.3 Área del círculo y longitud de la circunferencia. El número Pi.

10.3.1 Proposición. Sucesión de polígonos regulares inscritos en una circunferencia.

Sea un polígono regular de n lados $R_n = P_1 P_2 ... P_n$, inscrito en la circunferencia de centro O.
Denotaremos su lado por l_n, su perímetro por p_n y su apotema por a_n.
Claramente $p_n = n \cdot l_n$
En 10.2.3 ya vimos que todo polígono regular se puede descomponer en n triángulos isósceles $\Delta P_i O P_{i+1}$, todos ellos congruentes entre sí, luego

$$[R_n] = n \cdot [\Delta P_1 O P_2] = \frac{n \cdot l_n \cdot a_n}{2} = \frac{p_n \cdot a_n}{2}$$

Si duplicamos el número de lados del polígono $R_n \to R_{2n}$, observamos las siguientes relaciones:



i) $l_n > l_{2n}$ (pues el ángulo central decrece por 10.2.3 y aplicamos 3.7.9)
ii) $l_n > l_{2n} \Rightarrow a_n < a_{2n}$ (Proposición 10.1.9)
iii) $l_n < 2 l_{2n}$ (por la desigualdad triangular), y por tanto

$$p_n = n \cdot l_n < 2n \cdot l_{2n} = p_{2n}$$

iv) $[R_n] = \frac{p_n \cdot a_n}{2} < \frac{p_{2n} \cdot a_n}{2} < \frac{p_{2n} \cdot a_{2n}}{2} = [R_{2n}]$ (aplicando ii y iii).

Si realizamos este proceso una y otra vez, obtenemos una sucesión de polígonos regulares inscritos en la circunferencia

$$R_n \to R_{2n} \to R_{4n} \to R_{8n} \to ...$$

Con sucesiones de lados, apotemas, perímetros y áreas asociados cumpliendo

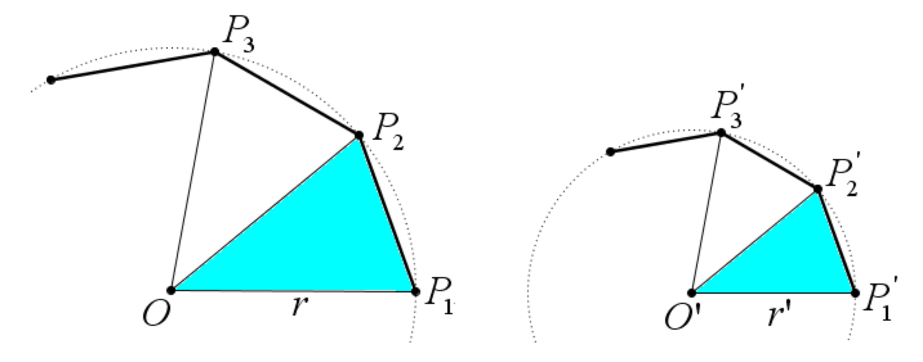
$$l_n > l_{2n} > l_{4n} > l_{8n} > ...$$
$$a_n < a_{2n} < a_{4n} < a_{8n} < ...$$
$$p_n < p_{2n} < p_{4n} < p_{8n} < ...$$
$$[R_n] < [R_{2n}] < [R_{4n}] < [R_{8n}] < ...$$

Las sucesiones de apotemas, perímetros y áreas son estrictamente crecientes. La sucesión de apotemas está acotada superiormente por el radio de la circunferencia, la sucesión de perímetros está acotada por el perímetro de cualquier polígono que contenga la circunferencia, y la sucesión de áreas está acotada por el área de cualquier polígono que contenga la circunferencia.
Ahora podemos aplicar uno de los teoremas más importantes del análisis real: Toda sucesión de números reales creciente y acotada superiormente tiende a su supremo.

Definiremos la **longitud de la circunferencia** por $L = \lim_{k\to\infty} p_k$, y definiremos el **área de la circunferencia** por $A = \lim_{k\to\infty}[R_k]$.

10.3.2 Proposición. El número Pi.
La razón entre la longitud de la circunferencia L y su diámetro es constante, es decir, es independiente de la circunferencia que tomemos. A dicha constante la denotaremos por la letra griega π.

Demostración. Supongamos que tenemos dos circunferencias de radios diferentes $c(O,r)$ y $c'(O',r')$.
Sea $R_n = P_1P_2...P_n$ el polígono regular de n lados inscrito en c, y sea $R_n' = P_1'P_2'...P_n'$ el polígono regular de n lados inscrito en c'.



Puesto que ambos polígonos son semejantes, $\Delta OP_1P_2 \cong \Delta O'P_1'P_2'$.
Luego sus lados son proporcionales, en particular

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{P_1'P_2'}}{\overline{OP_1'}} \text{ o equivalentemente, } \frac{l_n}{r} = \frac{l_n'}{r'} \Leftrightarrow \frac{n\,l_n}{2\,r} = \frac{n\,l_n'}{2\,r'} \Leftrightarrow \frac{p_n}{2\,r} = \frac{p_n'}{2\,r'}$$

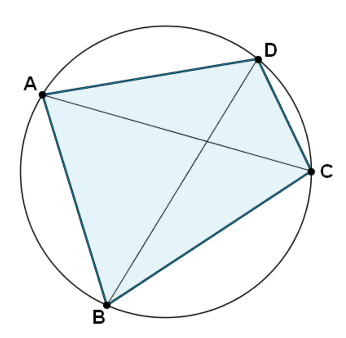
Tendiendo al límite,

$$\frac{L}{2r} = \lim_{k\to\infty} \frac{p_n}{2\,r} = \lim_{k\to\infty} \frac{p_n'}{2\,r'} = \frac{L'}{2r'}$$. La igualdad $\frac{L}{2r} = \frac{L'}{2r'}$ garantiza que dicha razón es la misma independientemente de la circunferencia que tomemos.

Fuente: "Elementos de Geometría", Jaime Escobar Acosta

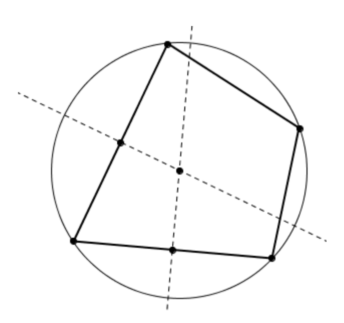
10.4 Cuadriláteros cíclicos. Puntos cocíclicos.

10.4.1 Definición. Cuadrilátero cíclico. Puntos cocíclicos.
Un cuadrilátero cíclico es aquel que se puede inscribir en una circunferencia.



Diremos que cuatro puntos A, B, C y D son **cocíclicos** cuando forman un cuadrilátero cíclico.

Si un cuadrilátero es cíclico su circunferencia circunscrita será la circunferencia circunscrita al triángulo formado por tres de sus vértices, luego el centro será la intersección de las mediatrices de dos lados cualesquiera del cuadrilátero.

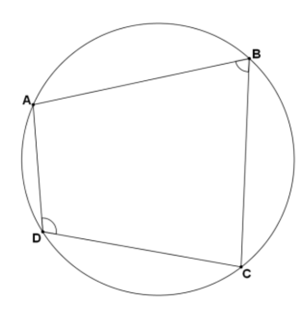


10.4.2 Proposición. Primera caracterización de los cuadriláteros cíclicos.
Un cuadrilátero es cíclico si y dos de sus ángulos opuestos son suplementarios, es decir, suman 180º:

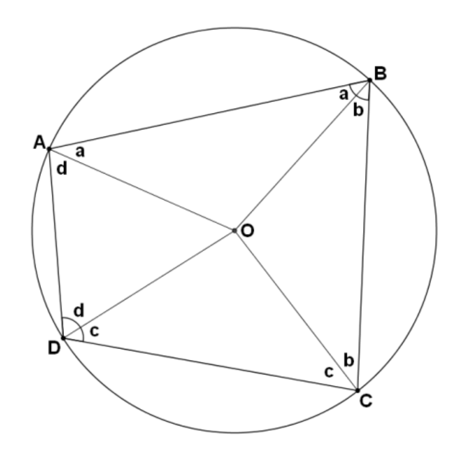
$$\angle ABC + \angle ADC = 180^{o}$$

En cuyo caso los otros dos ángulos opuestos también son suplementarios:

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^{o}$$



Demostración: Supongamos que $ABCD$ es cíclico. Entonces se puede descomponer en cuatro triángulos isósceles con vértice común en el centro de la circunferencia circunscrita, pues todos ellos tienen dos lados iguales al radio de dicha circunferencia.



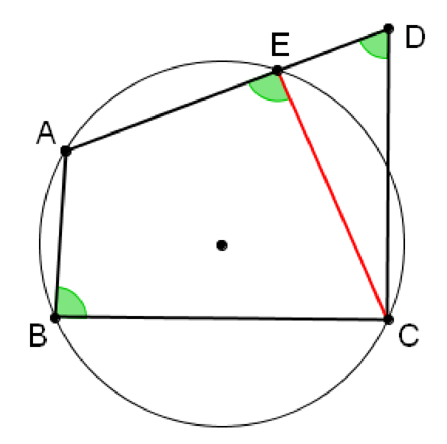
La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360º, luego:

$a+a+b+b+c+c+d+d=360º \Rightarrow 2a+2b+2c+2d=360º \Rightarrow$

$2(a+b+c+d)=360º \Rightarrow a+b+c+d=180º \Rightarrow a+d+c+b=180º \Rightarrow$

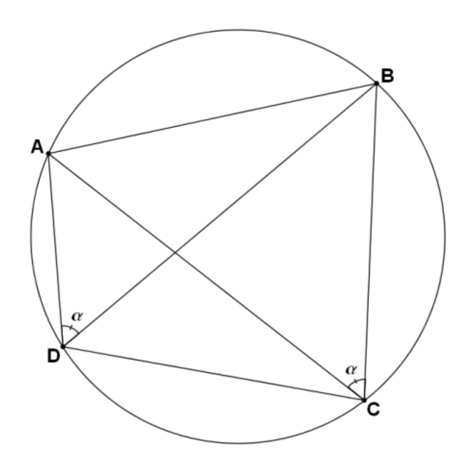
$\angle A+\angle C=180º$

Demostraremos el recíproco por reducción al absurdo. Supongamos que tenemos un cuadrilátero $ABCD$ en el que dos de sus ángulos opuestos son suplementarios: $\angle B+\angle D=180º$. Trazamos la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C. Supongamos que el cuadrilátero no es cíclico, es decir, que esta circunferencia no pasa por D. Sea E el punto de intersección de la circunferencia con la recta $\overleftrightarrow{AD}$.



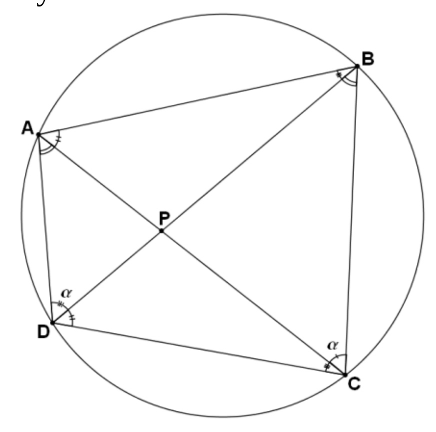
Entonces el cuadrilátero $ABCE$ será cíclico, luego, por la primera parte de esta demostración, cumplirá $\angle B+\angle E=180º$, por lo que $\angle E=\angle D$. Luego $\overleftrightarrow{EC} // \overleftrightarrow{DC}$, y como tienen un punto en común C, $\overleftrightarrow{EC}=\overleftrightarrow{DC}$, de lo que deducimos que E=D, es decir, el cuadrilátero es cíclico, llegando a contradicción.

10.4.3 Proposición. Segunda caracterización de los cuadriláteros cíclicos.
Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si el ángulo entre un lado y su diagonal es igual al ángulo entre el lado contrario y la otra diagonal:



Demostración. Si los cuatro puntos son cocíclicos entonces $\angle ADB = \angle ACB$ pues son ángulos que abarcan el mismo arco de circunferencia (10.1.2).

Veamos el recíproco. Sea P el punto de corte entre las dos diagonales.
Los triángulos ΔADP y ΔBCP son semejantes pues comparten dos ángulos iguales.
Luego $\dfrac{DP}{PA} = \dfrac{CP}{PB}$ y puesto que $\angle DPC = \angle APB$, los triángulos ΔDCP y ΔABP serán semejantes por el criterio SAS de semejanza.
Por lo tanto $\angle BAP = \angle PDC$ y $\angle ABP = \angle DCP$

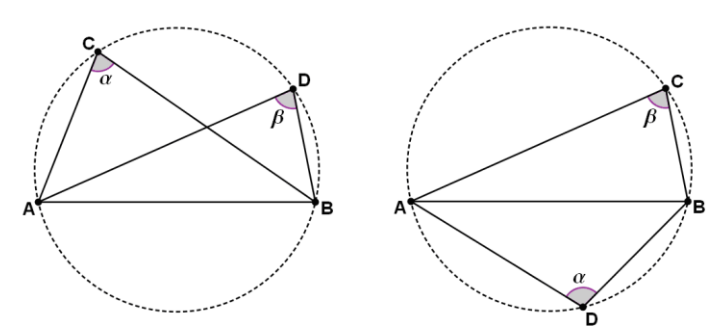


Luego $\angle D + \angle B = \angle A + \angle ABP + \angle PBC = \angle A + \angle PCD + \angle PAD = 180$, y de la misma manera $\angle A + \angle C = 180º$, con lo que podemos aplicar el criterio 10.4.2 para deducir que los cuatro puntos son cocíclicos.

10.4.4 Teorema. Caracterización de cuatro puntos no alineados cocíclicos.
Dados cuatro puntos A, B, C, D no colineales,

a) Si C y D son colaterales respecto de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\angle ACB = \angle ADB$ entonces ABCD es un cuadrilátero cíclico.

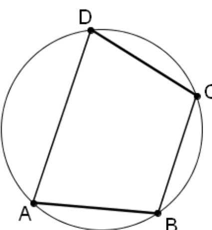
b) Si C y D están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\angle ACB + \angle ADB = 180$, entonces ABCD es un cuadrilátero cíclico.



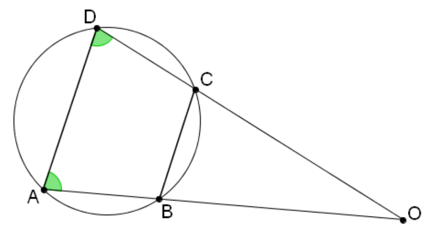
Nota: Este teorema se utilizará en 21.12 para demostrar una caracterización de los puntos cocíclicos mediante números complejos.

Demostración. Son las dos proposiciones anteriores.

10.4.5 Ejercicio.
Si un trapecio cíclico no es un rectángulo, sus lados no paralelos tienen la misma longitud.

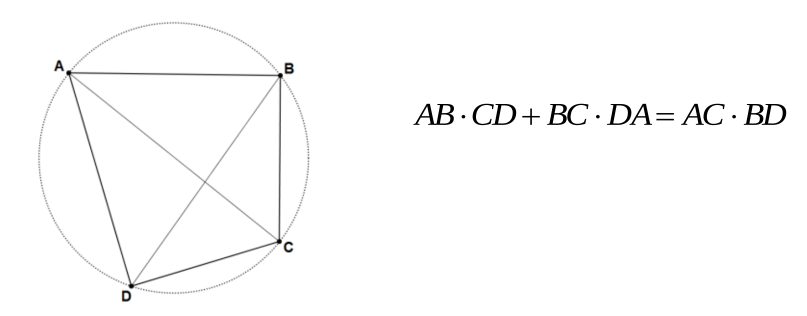


Demostración. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que $AD // BC$.
Si $AB // CD$ entonces es un paralelogramo, luego por 7.1.2d sus ángulos opuestos son congruentes, y puesto que son suplementarios porque el cuadrilátero es cíclico, serán rectos. Luego es un rectángulo, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto AB y CD no son paralelos. Sea O su punto de corte.



Puesto que $AD // BC$, tenemos que $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios. Pero por ser un cuadrilátero cíclico, $\angle B$ y $\angle D$ son suplementarios, luego por $\angle A \cong \angle D$.
Luego el triángulo ΔAOD es isósceles en O, y por tanto $\overline{AO} \cong \overline{DO}$.
Por estar los triángulos ΔAOD y ΔBOC en posición de Tales, $\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{DO} = 1$, y por tanto $AB = CD$.

10.4.7 Teorema. Teorema de Ptolomeo.
En un cuadrilátero cíclico $ABCD$, la suma de los productos de sus lados opuestos es igual al producto de sus diagonales.

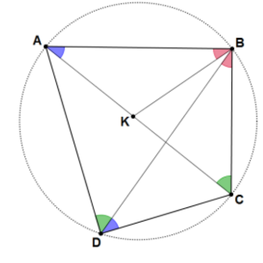


Observaciones. El recíproco de este teorema también es cierto: Todo cuadrilátero que cumple esta igualdad es cíclico.
Este teorema es una generalización del teorema de Pitágoras, que queda como un caso particular cuando el cuadrilátero es un rectángulo.
Este teorema se generaliza en la llamada "**Desigualdad de Ptolomeo"** (ver 13.2.7).
En el problema #42 de **[Prob4]** se demuestra este teorema mediante la inversión, una técnica que se introducirá en el Tema 13.

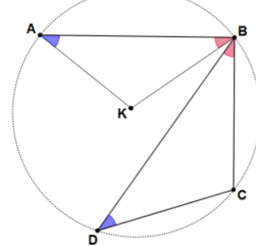
Ejercicio propuesto: El Problema #28 de **[Prob1]** es una lista de ejercicios para practicar el Teorema de Ptolomeo.

Nota histórica. Ptolomeo (Claudius Ptolemaeus) nació en Egipto en el año 90 DC y falleció en el 168. Fue un matemático, astrónomo, músico, químico y geógrafo griego. El teorema que lleva su nombre lo encontramos en un tratado suyo llamado **Almagest**.

Demostración. Sabemos que $\angle BAC = \angle BDC$ (10.1.2) y $\angle ADB = \angle ACB$ (10.4.2)
Sea K un punto del segmento $\overline{AC}$ tal que $\angle ABK = \angle DBC$.



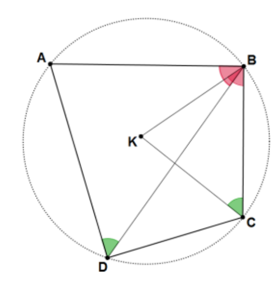
Los triángulos ΔABK y ΔDBC serán semejantes por el criterio AA (8.3.2):



Luego $\dfrac{|AK|}{|AB|} = \dfrac{|CD|}{|BD|} \Rightarrow |AK| \cdot |BD| = |CD| \cdot |AB|$ (1)

Los triángulos ΔKBC y ΔDBA son semejantes, por el criterio AA y teniendo en cuenta que

$$\angle ABK + \angle KBC = \angle ABC = \angle CBD + \angle DBA = \angle ABK + \angle DBA \Rightarrow$$
$$\angle ABK + \angle KBC = \angle ABK + \angle DBA \Rightarrow \angle KBC = \angle DBA$$

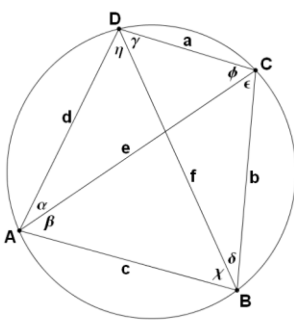


Luego $\dfrac{|KC|}{|BC|} = \dfrac{|AD|}{|BD|} \Rightarrow |KC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|$ (2)

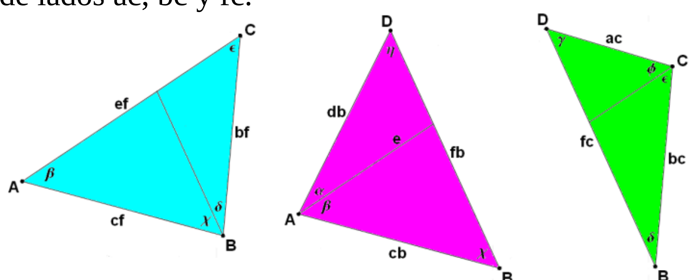
Sumando (1)+(2):

$$|AK| \cdot |BD| + |KC| \cdot |BD| = |CD| \cdot |AB| + |AD| \cdot |BC| \Rightarrow$$
$$(|AK| + |KC|) \cdot |BD| = |CD| \cdot |AB| + |AD| \cdot |BC| \Rightarrow$$
$$|AC| \cdot |BD| = |CD| \cdot |AB| + |AD| \cdot |BC|$$

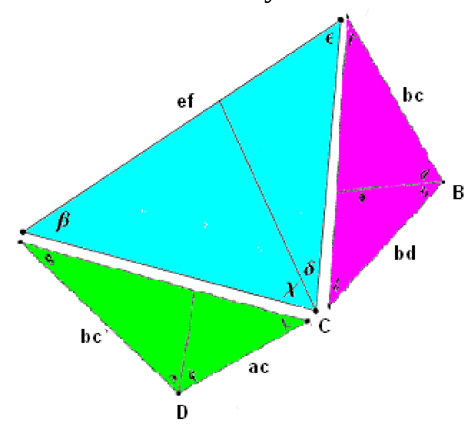
Una demostración alternativa muy interesante es la siguiente.
Partimos del cuadrilátero cíclico $ABCD$ en el que marcamos sus lados, diagonales y ángulos de la siguiente manera:



Consideramos el triángulo ΔACB y multiplicamos sus lados por f, obteniendo así un triángulo similar de lados bf, cf y ef.
Consideramos el triángulo ΔABD y multiplicamos sus lados por b, obteniendo un triángulo similar de lados db, cb y fb.
Consideramos el triángulo ΔBCD y multiplicamos sus lados por c, obteniendo así un triángulo similar de lados ac, bc y fc.



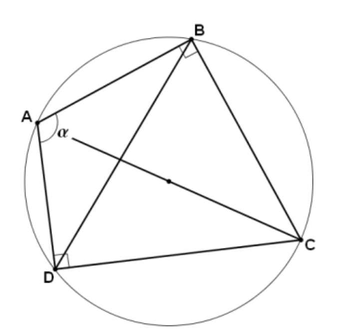
ΔACB tiene el lado bf en común con ΔABD y tiene el lado cf en común con ΔBCD



Y uniéndolos forman un cuadrilátero. En efecto, D, C y B están alineados puesto que
$\gamma+\chi+\delta+\eta=(\gamma+\delta)+(\chi+\eta)=180^{\circ}$
ya que los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico son suplementarios (10.4.2).
Los lados opuestos son congruentes, pues ambos son bc, y son paralelos, pues
$(\beta+\delta)+(\varepsilon+\chi)=(\beta+\alpha)+(\varepsilon+\phi)=180^{\circ}$ nuevamente por 10.4.2.
Aquí hemos utilizado que $\delta=\alpha$ y $\chi=\phi$ por abarcar los mismos arcos.
Luego $\beta+\delta$ y $\varepsilon+\chi$ son suplementarios, y por tanto los lados opuestos bc son paralelos. Se trata de un paralelogramo, pues tiene dos lados opuestos iguales y paralelos (7.1.3), luego los otros dos lados opuestos son congruentes, es decir, $ef=ac+bd$, tal y como queríamos ver.

Fuente : web “dmat csc”

10.4.8 Corolario.
En un cuadrilátero cíclico $ABCD$ en el que la diagonal AC pasa por el centro de la circunferencia circunscrita (es decir $\angle D=\angle B=90^{\circ}$), se cumple:

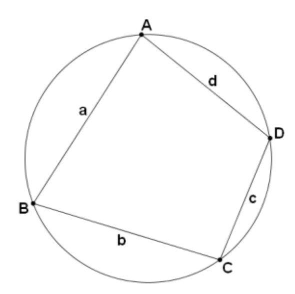


$$\sin A=\frac{BD}{AC}$$

Demostración. Aplicamos la fórmula 9.3.1a:
$\sin A=\sin(\angle DAC+\angle CAB)=$
$\sin(\angle DAC)\cos(\angle CAB)+\cos(\angle DAC)\sin(\angle CAB)=$
$$=\frac{DC}{AC}\frac{AB}{AC}+\frac{AD}{AC}\frac{BC}{AC}=\frac{CD\cdot AB+AD\cdot BC}{AC^2}=\frac{AC\cdot BD}{AC^2}=\frac{BD}{AC}$$

En donde hemos aplicado 10.4.7.

10.4.9 Teorema. La fórmula de Brahmagupta.
Sea un cuadrilátero cíclico convexo $ABCD$. Definimos $a=\left|\overline{AB}\right|$, $b=\left|\overline{BC}\right|$, $c=\left|\overline{CD}\right|$, $d=\left|\overline{DA}\right|$ y $s=(a+b+c+d)/2$. Entonces:



$$[ABCD]=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Demostración. Trazamos la diagonal $\overline{AC}$. Sea $\angle B=\angle ABC$ y $\angle D=\angle ADC$.
Aplicamos el Teorema del Coseno a los triángulos ΔABC y ΔACD:
$a^2+b^2-2ab\cos\angle B=AC^2=d^2+c^2-2cd\cos\angle D$
Puesto que es un cuadrilátero cíclico, sus ángulos opuestos serán suplementarios:
$\angle B+\angle D=180^o$, luego $\cos\angle B=-\cos\angle D$, y por tanto
$a^2+b^2-2ab\cos\angle B=AC^2=d^2+c^2+2cd\cos\angle B\Leftrightarrow$

$$a^2+b^2-c^2-d^2=2\cos\angle B(ab+cd)\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}=\cos\angle B$$

Luego

$$\sin^2\angle B=1-\cos^2\angle B=(1-\cos\angle B)(1+\cos\angle B)$$

$$=\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)$$

$$=\frac{2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)}{2(ab+cd)}\cdot\frac{2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)}{2(ab+cd)}$$

$$=\frac{\left(2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\right)\left(2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)\right)}{4(ab+cd)^2}$$

$$=\frac{\left(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2\right)\left(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2\right)}{4(ab+cd)^2}=$$

$$=\frac{\left((c+d)^2-(a-b)^2\right)\left((a+b)^2-(c-d)^2\right)}{4(ab+cd)^2}=(1)$$

Por otro lado
$(a+b)^2-(c-d)^2=(a+b+c-d)(a+b+d-c)=4(s-d)(s-c)$
$(c+d)^2-(a-b)^2=4(s-a)(s-b)$

Luego

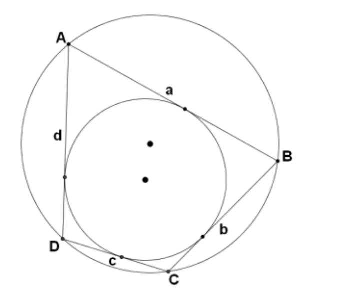
$$(1)=\frac{4(s-a)(s-b)4(s-d)(s-c)}{4(ab+cd)^2}=\frac{4(s-a)(s-b)(s-d)(s-c)}{(ab+cd)^2}$$

Y por tanto, teniendo en cuenta que $0 < \angle B, \angle D < 180 \Rightarrow \sin \angle B > 0$,

$$\sin \angle B = \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-d)(s-c)}}{ab+cd} \Leftrightarrow$$
$$\frac{(ab+cd)\sin \angle B}{2} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-d)(s-c)} \Leftrightarrow$$
$$\frac{ab\sin \angle B}{2} + \frac{cd\sin \angle B}{2} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-d)(s-c)} \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC] + [\Delta ACD] = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-d)(s-c)} \Leftrightarrow$$
$$[\lozenge ABCD] = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-d)(s-c)}$$

donde hemos utilizado que $\sin \angle B = \sin \angle D$ pues son ángulos suplementarios.

10.4.10 Corolario. Área de cuadriláteros cíclicos con circunferencia inscrita.
Si el cuadrilátero es convexo, cíclico y además contiene una circunferencia inscrita, la fórmula de Brahmagupta se reduce a



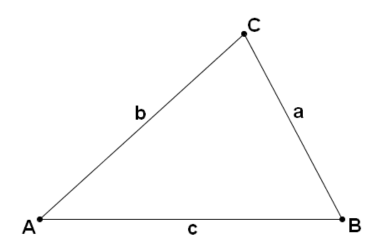
$$[ABCD] = \sqrt{abcd}$$

Demostración. Si existe una circunferencia inscrita en el cuadrilátero se tiene que $a+c=b+d$ (10.1.14), y por tanto

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{2(a+b)}{2} = a+b$$
$$a-s = a-(a+b) = -b,\ b-s = b-(b+d) = -d$$
$$c-s = c-(a+c) = -a,\ d-s = d-(b+d) = -b$$

Luego $[ABCD] = \sqrt{(a-s)(b-s)(c-s)(d-s)} = \sqrt{(-b)(-d)(-a)(-b)} = \sqrt{abcd}$

10.4.11 Teorema. Fórmula de Heron.
El área de un triángulo ΔABC es



$$[\Delta ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde s es el semiperímetro: $s = (a+b+c)/2$

Demostración. Puesto que todo triángulo es inscribible (se demostrará en 11.5.2), podemos considerar la fórmula de Heron como un caso particular de la fórmula de Brahmagupta cuando C=D, es decir, d=0.

Nota histórica. Brahmagupta (598 - 670) fue el matemático indio más famoso de su tiempo. Escribió dos importantes tratados en astronomía y matemáticas: **Brahmasphutasiddhanta** y **Khandakhadyaka**.

10.4.12 Teorema. La fórmula de Bretschneider.
La fórmula de Bretschneider extiende la fórmula de Brahmagupta a cualquier tipo de cuadrilátero, no necesariamente cíclico:

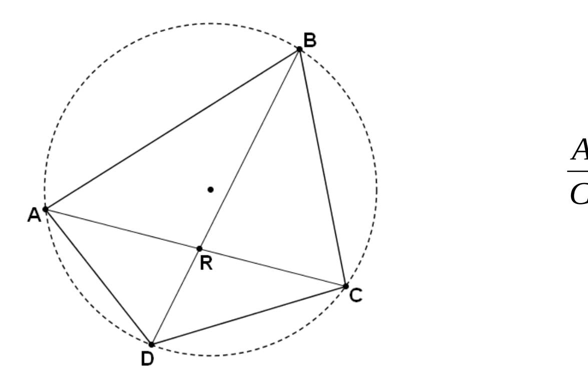
$$A=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

donde a, b, c y d son los lados del cuadrilátero, s su semiperímetro y α y β son dos ángulos opuestos del mismo.

Nota histórica: El matemático alemán **Carl Anton Bretschneider** descubrió esta fórmula en el año 1842. Esta misma fórmula fue descubierta ese mismo año por otro matemático alemán, **Karl Georg Christian von Staudt**.

10.4.13 Corolario.
La fórmula de Bretschneider tiene un interesante corolario: Los cuadriláteros cíclicos son aquellos que tienen un área maximal entre todos aquellos cuadriláteros con la misma secuencia de longitudes en los lados, en particular, entre aquellos con el mismo perímetro.

10.4.14 Proposición.
Sea un cuadrilátero ABCD cíclico, y $R=AC\cap BD$ el punto de intersección de sus diagonales. Entonces se cumple



$$\frac{AR}{CR}=\frac{AB\cdot AD}{BC\cdot CD}$$

Demostración. $\Delta ARB\approx\Delta DRC$ y $\Delta ARD\approx\Delta BRC$. Luego

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AR}{RD}=\frac{BR}{RC}\quad\text{y}\quad\frac{BC}{AD}=\frac{RC}{RD}=\frac{BR}{RA}$$

Y por tanto $\dfrac{AR}{CR}=\dfrac{AR}{RD}\cdot\dfrac{RD}{CR}=\dfrac{AB}{CD}\cdot\dfrac{AD}{BC}$

10.5 La razón áurea.

A LA DIVINA PROPORCIÓN

A tí, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.
A tí, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el universo armónico origina.
A tí, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco flores regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A tí, divina proporción de oro.

Rafael Alberti

10.5.1 Definición. Razón áurea. (Elementos Definición 6.3)
La definición 3 del Libro Sexto de los Elementos de Euclides afirma lo siguiente:
"Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor". Es decir, un segmento quedará dividido en razón áurea cuando

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b} \quad \text{con } a>b$$

a b

10.5.2 Definición. El número de oro.
Diremos que dos números a,b, $a>b$, están en razón áurea cuando

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$$

Definiendo $\phi=\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$, nos queda $\phi=\frac{a+b}{a}=\frac{a}{a}+\frac{b}{a}=1+\frac{b}{a}=1+\frac{1}{\phi}$,
Y multiplicando por ϕ llegamos a la ecuación $\phi^2=\phi+1$, que tiene por soluciones

$$\phi=\frac{1\pm\sqrt{1-4(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

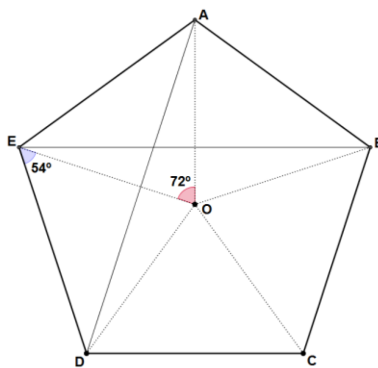
Tomamos como definición del **número de oro** a la solución positiva de la ecuación, es decir, el número

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1.6180339887498948...$$

El número áureo aparece con frecuencia en la naturaleza y está ligado con la sucesión de Fibonacci, ya que $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi$, donde F_n es el n-ésimo término de la sucesión.

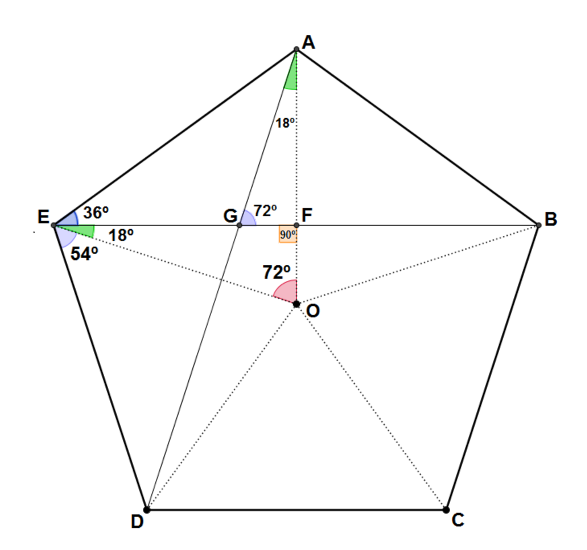
10.5.3 Teorema.
La diagonal y el lado de un pentágono regular están en la razón áurea.

Demostración. Podemos descomponer un pentágono regular en cinco triángulos isósceles de ángulo central 72º y ángulos laterales de 54º. Trazados dos de sus diagonales, $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$:



Los triángulos ΔEAB y ΔDEA son congruentes aplicando el criterio SAS, luego $EB \cong DA$, es decir, todas las diagonales del triángulo son congruentes dos a dos.

Sea F el punto de intersección entre EB y AO y G el punto de corte de las dos diagonales. El cuadrilátero $ABOE$ es una cometa, luego sus dos diagonales EB y AO se cortan en ángulo recto (3.13.2). Es decir, $\angle EFD = 90^o$. Luego
$\angle FEO = 180 - 72 - 90 = 18^o$, $\angle AEF = \angle AED - 108 - 54 - 18 = 36^o$
Por simetría $\angle GAF = \angle FEO = 18^o$, y por último, $\angle FGA = 180 - 90 - 18 = 72^o$



Sea $x = AE = AB = ...$ y sea $y = EB$.
Aplicamos el Teorema del coseno al triángulo ΔEAB:
$$x^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(36^o) \Rightarrow 2xy\cos(36^o) = y^2 \Rightarrow 2x\cos(36^o) = y \Rightarrow$$
$$2\cos(36^o) = \frac{y}{x} \Rightarrow 2\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{y}{x} \Rightarrow \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{y}{x}$$

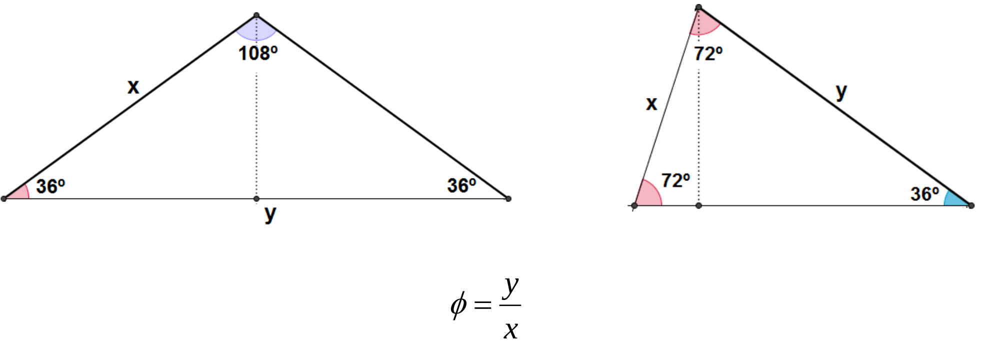
Si no queremos utilizar la igualdad $\cos(36^\circ) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, (porque su demostración ciertamente es equivalente a nuestro teorema), se puede argumentar alternativamente de la siguiente manera:
El cuadrilátero $EBCD$ es cíclico, puesto que lo es el pentágono del que forma parte, luego aplicamos el Teorema de Ptolomeo (10.4.9) para deducir la igualdad

$$x^2 + xy = y^2 \Rightarrow x^2 + xy - y^2 = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2} + \frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = 0$$

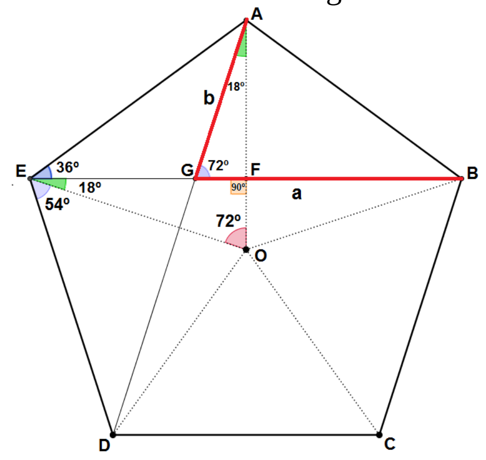
Denominando $z = \frac{y}{x}$ nos queda la ecuación $1 + z + z^2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

10.5.4 Proposición. Triángulos áuricos.
Los triángulos 36-108-36 y 72-36-72 se denominan triángulos áuricos puesto que sus lados están en razón áurea.



$$\phi = \frac{y}{x}$$

Demostración. El caso del triángulo 36-108-36 se ha visto en el teorema anterior. Apoyándonos en este resultado demostramos el segundo:



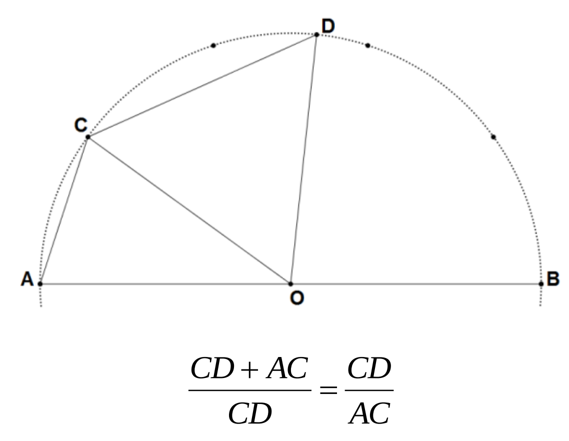
Sean $y = EB = AD$, $a = BG = GD$, $b = GA = GE$.

$$\frac{y}{a} = \phi \Rightarrow y = \phi a$$

$$\frac{a}{b} = \frac{y-b}{b} = \frac{\phi a - b}{b} = \frac{\phi a}{b} - \frac{b}{b} = \phi\frac{a}{b} - 1 \Rightarrow \frac{a}{b} - \phi\frac{a}{b} = -1 \Rightarrow \frac{a}{b}(1-\phi) = -1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{\phi - 1} = \phi$$

La última igualdad se basa en la propiedad fundamental del número áureo: $\phi^2 = \phi + 1$.

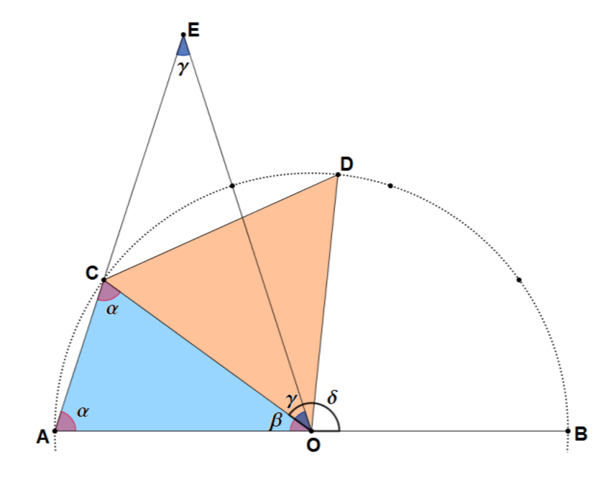
10.5.5 Teorema. Elementos 13.9.
El lado de un hexágono y de un decágono inscritos en el mismo círculo están en la razón áurea.



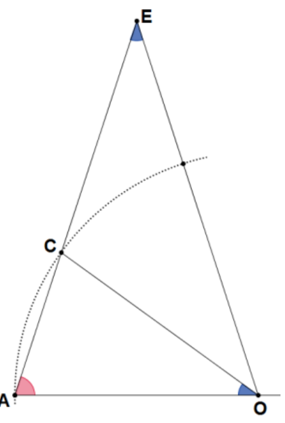
$$\frac{CD + AC}{CD} = \frac{CD}{AC}$$

Encontramos este teorema en la Proposición 9 del Libro 13 de Los Elementos: “Si se unen el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y su segmento mayor es el lado del hexágono”.

Demostración. Inscribimos el decágono regular dentro de una circunferencia de centro O y diámetro AB. Sea AC uno de los lados del decágono. Sea D un punto de la circunferencia de forma que CD sea un lado del hexágono. Sabemos (10.2.4) que el lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia, luego $CD = CO$.
Prolongamos la semirrecta $\overrightarrow{AC}$ hasta un punto E tal que $CE = CO = CD$.



Sea $\beta = \angle AOC$ y δ su suplementario. Puesto que tratamos con un decágono, $\delta = 4\beta$.
Sea $\gamma = \angle COE$. Por ser ΔCOE isósceles, $\gamma = \angle CEO$.
Sea $\alpha = \angle ACO = \angle CAO$.
Por el teorema del ángulo exterior, $\alpha = 2\gamma$ y $\delta = 2\alpha$, luego $\delta = 4\gamma$.
De $\delta = 4\gamma$ y $\delta = 4\beta$ deducimos que $\delta = \beta$.
Los triángulos ΔAOC y ΔAEO son semejantes por el criterio AA:

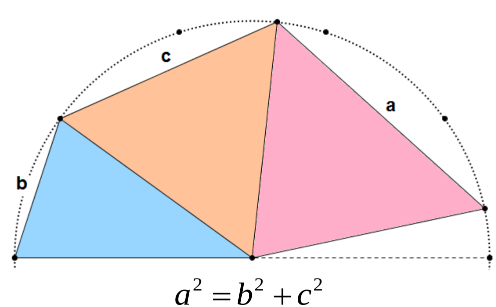


Luego $\frac{AE}{AO} = \frac{AO}{AC}$. Pero $AE = AC + CE = AC + CO = AC + CD$ y $AO = CD$, por lo tanto

$$\frac{AC + CD}{CD} = \frac{CD}{AC}$$

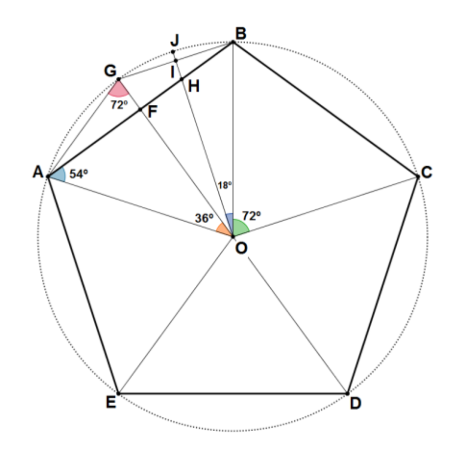
tal y como queríamos ver.

10.5.6 Teorema.
Dado un pentágono regular inscrito en un círculo, el cuadrado de su lado es igual a la suma de los cuadrados de los lados de un hexágono y un decágono inscritos en el mismo círculo.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

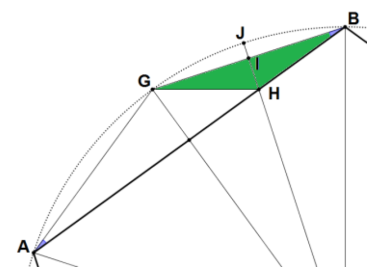
Demostración. Sea ABCDE un pentágono regular inscrito en una circunferencia de centro O.
Ya hemos visto que este pentágono se desmonta en cinco triángulos isósceles congruentes de ángulos 54º-72º-54º.
Para determinar el decágono regular trazamos la mediatriz del lado AB por su punto medio F, y sea G su punto de corte con la circunferencia. Por las propiedades de los triángulos isósceles, $AG = GB$ será el lado del decágono, formado por diez triángulos isósceles de ángulos 72º-36º-72º.
Trazamos ahora la mediatriz de GB por su punto medio I. Sea J su punto de corte con la circunferencia y sea H su punto de corte con el lado AB del pentágono.



$\angle GOJ = \angle GOB = 18º \Rightarrow \angle AOJ = \angle AOG + \angle GOJ = 36º + 18º = 54º$, luego el triángulo ΔAOH es un triángulo isósceles 54º-72º-54º y por tanto es semejante al triángulo ΔABO.

Luego $\frac{AB}{AO} = \frac{AO}{AH} \Rightarrow AO^2 = AB \cdot AH$ (1)

Los triángulos ΔAGB y ΔGHB son semejantes, puesto que $\angle GBA = \angle GAB = \angle GAO - \angle BAO = 72º - 54º = 18º$ y ΔGHB es un triángulo isósceles con los mismos ángulos en la base.



Luego $\frac{AB}{AG} = \frac{GB}{GH}$, y puesto que $AG = GB$, tenemos

$\frac{AB}{AG} = \frac{AG}{GH} \Rightarrow AG^2 = AB \cdot GH$ (2)

De (1) y (2):

$$\left.\begin{matrix} AO^2 = AB \cdot AH \\ AG^2 = AB \cdot GH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \cdot AH + AB \cdot GH = AO^2 + AG^2 \Rightarrow$$

$$AB \cdot (AH + GH) = AO^2 + AG^2 \Rightarrow$$

$$AB^2 = AO^2 + AG^2$$

(En la última igualdad hemos utilizado $GH = HB \Rightarrow AH + GH = AH + HB = AB$)

Donde AB es el lado del heptágono, AO es el radio y por tanto el lado del hexágono, y AG es el lado del decágono, tal y como queríamos ver.

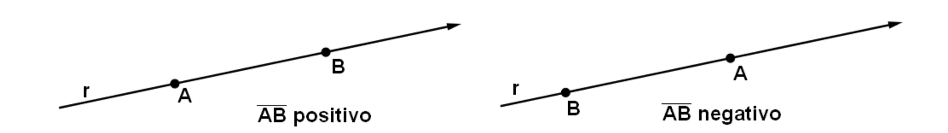
11 Geometría del triángulo.

11.1 Longitudes y razones con signo.

Las rectas no tienen orientación, es decir, dados dos puntos de una recta, no tiene sentido hablar de puntos "a la derecha de " o "a la izquierda de". Ahora vamos a suponer que las rectas están orientadas, es decir, que tiene sentido decir que "A está a la izquierda de B" o "A está antes que B". Los Teoremas de Ceva y Menelao que se presentan en esta unidad utilizan longitudes con signo de segmentos.

11.1.1 Definición. Longitudes con signo.
Dados dos puntos A, B de una recta r *orientada*, definimos la **longitud con signo** del segmento $\overline{AB}$ (que denotaremos igualmente por $\overline{AB}$) de la siguiente manera:

$$\overline{AB} = \begin{cases} \left|\overline{AB}\right| & \text{(positivo) si A está antes que B en r} \\ 0 & \text{si A = B} \\ -\left|\overline{AB}\right| & \text{(negativo) si B está antes que A en r} \end{cases}$$



La siguiente propiedad fundamental de la longitud con signo se deduce directamente de la propia definición:

$$\overline{AB} = -\overline{BA}$$

11.1.2 Proposición. Propiedades de las longitudes con signo.
Dados tres puntos A, B, C de una recta r orientada, se cumple:

a) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

b) $\overline{AB} = \overline{AC} \Rightarrow B = C$

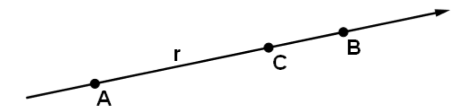
Observación. Estas dos propiedades no se cumplen con la longitud convencional sin signo.

11.1.3 Definición. Razones con signo.
Una vez hemos definido las longitudes con signo tiene sentido definir las razones con signo

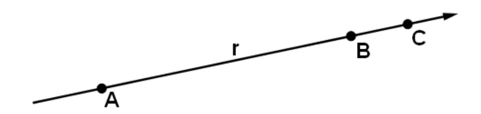
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

11.1.4 Proposición. Propiedad fundamental de las razones con signo.
Dados tres puntos A, B, C de una recta r orientada, se cumple:

$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|}$ (positivo) si C pertenece al interior del segmento $\overline{AB}$



$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|}$ (negativo) si C no pertenece al segmento $\overline{AB}$.



11.1.5 Proposición.
Dados cuatro puntos A, B, X, Y de una recta r orientada, se cumple:

a) $\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{YB}} \Rightarrow X = Y$

b) $\frac{\overline{AX}}{\overline{AY}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{BY}} \Rightarrow X = Y$

Demostración.
a)

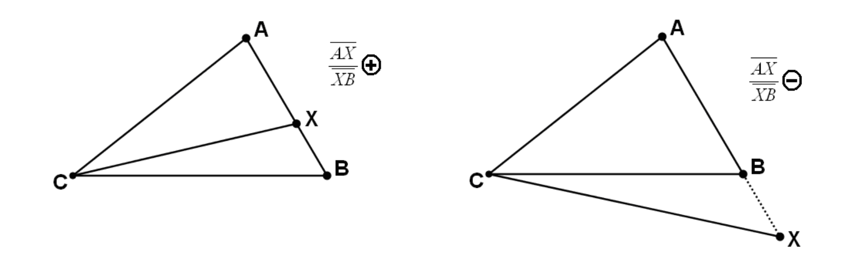
b) Es una reescritura del apartado a:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AY}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{BY}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{BY}} \Leftrightarrow -\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = -\frac{\overline{AY}}{\overline{YB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{YB}}$$

11.1.6 Lema.
Dado un triángulo ΔABC y una ceviana CX (ver definición de ceviana en 3.6.8), se cumple:

a) $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \dfrac{\left|\overline{AX}\right|}{\left|\overline{XB}\right|}$ (positivo) si X divide $\overleftrightarrow{AB}$ internamente

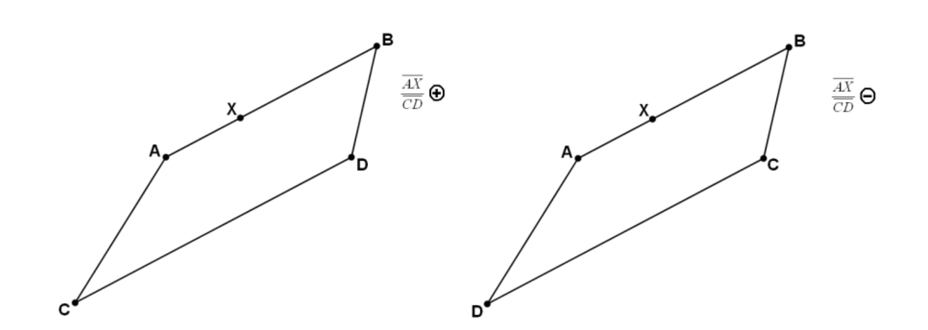
b) $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = -\dfrac{\left|\overline{AX}\right|}{\left|\overline{XB}\right|}$ (negativo) si X divide $\overleftrightarrow{AB}$ externamente



11.1.7 Lema.
Supongamos que $AB // CD$. Entonces:

a) $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{CD}} = \dfrac{\left|\overline{AX}\right|}{\left|\overline{CD}\right|}$ (positivo) si $\lozenge ABDC$ es convexo.

b) $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{CD}} = -\dfrac{\left|\overline{AX}\right|}{\left|\overline{CD}\right|}$ (negativo) si $\lozenge ABDC$ no es convexo

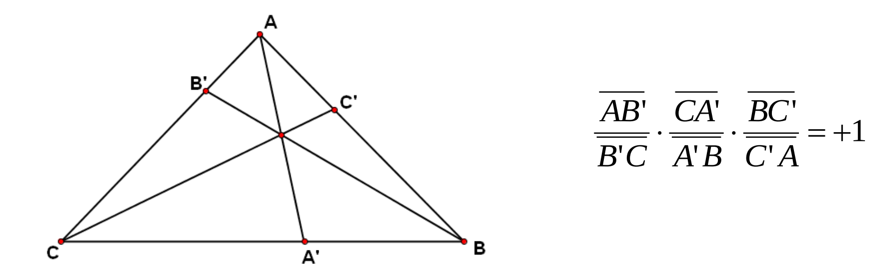


11.1.8 Proposición.
Dos cevianas que pasan por el interior de un triángulo nunca son paralelas.

Demostración.

11.2 Teoremas de Ceva y de Menelao.

11.2.1 Teorema. Teorema de Ceva.
Dado un triángulo ABC y tres cevianas AA’, BB’ y CC’, serán concurrentes en un punto si y sólo si

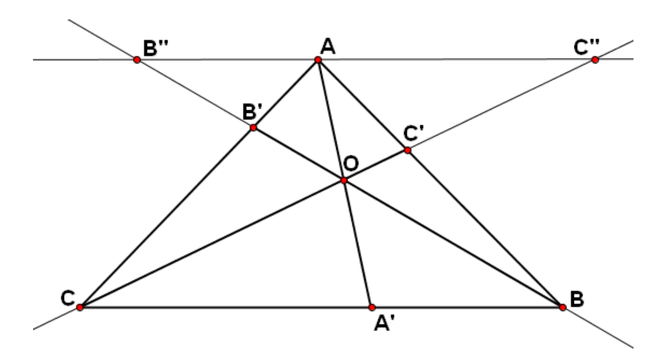


$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}}\cdot\frac{\overline{CA'}}{\overline{A'B}}\cdot\frac{\overline{BC'}}{\overline{C'A}}=+1$$

En donde estamos utilizando longitudes de segmento con signo.

Observación: En 9.1.7 fue demostrado este teorema añadiendo, además, una caracterización trigonométrica.

Demostración. Primera versión, mediante triángulos proporcionales:
Supongamos que las tres cevianas son concurrentes en un punto O. Trazamos por A una paralela a CB. Sea C’’ el punto de intersección entre esta paralela y CC’. Sea B’’ el punto de intersección entre esta paralela y BB’.



Nos aparecen cuatro triángulos proporcionales:

$$OCA' \equiv OAC'' \Rightarrow \frac{CA'}{A'O}=\frac{AC''}{OA} \qquad OA'B \equiv OAB'' \Rightarrow \frac{A'O}{AO}=\frac{A'B}{AB''}$$

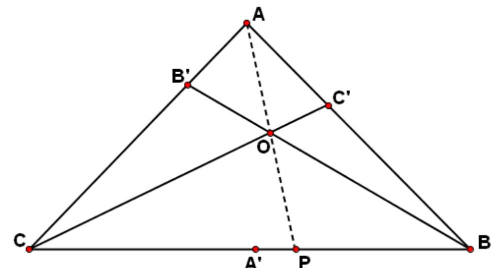
$$OBC' \equiv AC'C'' \Rightarrow \frac{BC'}{AC'}=\frac{CB}{AC''} \qquad CBB' \equiv AB'B'' \Rightarrow \frac{AB'}{B'C}=\frac{AB''}{BC}$$

Multiplicando todas las igualdades de la derecha, cancelando términos y pasando todos los elementos restantes a la izquierda llegamos a la igualdad deseada:

$$\frac{CA'}{A'O}\cdot\frac{A'O}{AO}\cdot\frac{BC'}{AC'}\cdot\frac{AB'}{B'C}=\frac{AC''}{OA}\cdot\frac{A'B}{AB''}\cdot\frac{CB}{AC''}\cdot\frac{AB''}{BC}\Rightarrow$$

$$\frac{CA'}{AO}\cdot\frac{BC'}{AC'}\cdot\frac{AB'}{B'C}=\frac{A'B}{OA}\Rightarrow\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{AC'}\cdot\frac{AB'}{B'C}=1$$

Supongamos por el contrario que la igualdad anterior se satisface para el triángulo ABC y los tres puntos A', B' y C' de los lados BC, AC y AB respectivamente. Sea O el punto de intersección de las rectas CC' y BB'. Sea P el punto de intersección entre AO y BC. Vamos a ver que P=A'.



Al triángulo anterior podemos aplicar el resultado anterior y por lo tanto

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1$$

pero por hipótesis tenemos que también se cumple $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1$

Luego $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BC'}{C'A}=\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}$

De donde deducimos que $\frac{CP}{PB}=\frac{CA'}{A'B}$

De donde se deduce que $P=A'$.

Fuente de la demostración: http://sistemas.fciencias.unam.mx/~mglgm/NotasGM_cap4.pdf

Segunda versión, mediante áreas:
Recordemos que las áreas de los triángulos con igual altura son proporcionales a las bases.

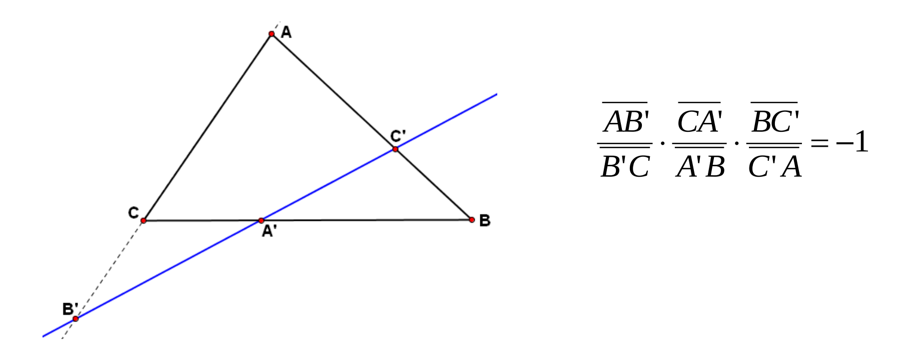
$$\frac{CA'}{A'B}=\frac{[\Delta ACA']}{[\Delta AA'B]}=\frac{[\Delta OCA']}{[\Delta OA'B]}=\frac{[\Delta ACA']-[\Delta OCA']}{[\Delta AA'B]-[\Delta OA'B]}=\frac{[\Delta ACO]}{[\Delta BAO]}$$

De la misma manera: $\frac{BC'}{C'A}=\frac{[\Delta CBO]}{[\Delta ACO]}$ y $\frac{AB'}{B'C}=\frac{[\Delta ABO]}{[\Delta CBO]}$

Por lo tanto: $\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}=\frac{[\Delta ACO]}{[\Delta BAO]}\frac{[\Delta CBO]}{[\Delta ACO]}\frac{[\Delta ABO]}{[\Delta CBO]}=1$

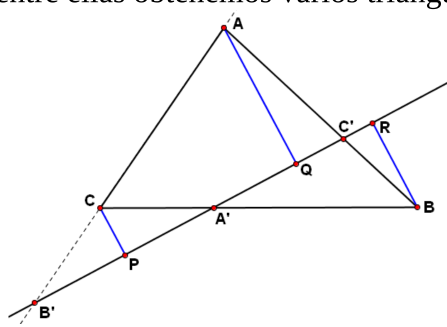
Fuente de la demostración: Coxeter.

11.2.2 Teorema. Teorema de Menelao.
Sea ABC un triángulo y A', B' y C' tres puntos sobre las rectas BC, AC y AB respectivamente. Los tres puntos A', B' y C' estarán alineados si y sólo si



$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{BC'}}{\overline{C'A}} = -1$$

Demostración. Sean P, Q y R los puntos de intersección entre la recta y las perpendiculares a ésta que pasan por C, A y B respectivamente. Al ser estas perpendiculares paralelas entre ellas obtenemos varios triángulos proporcionales



$\frac{AB'}{B'C} = \frac{AQ}{PC}$ porque los triángulos AQB' y CPB' son proporcionales.

$\frac{CA'}{A'B} = \frac{CP}{RB}$ porque los triángulos PCA' y $A'BR$ son proporcionales.

$\frac{BC'}{C'A} = \frac{BR}{QA}$ porque los triángulos BRC' y AQC' son proporcionales.

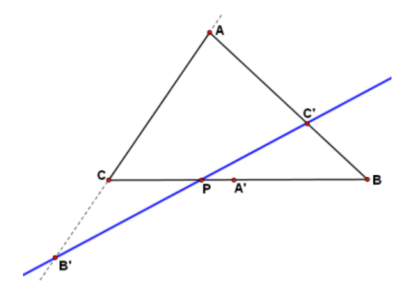
Luego $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = (-1)(-1)(-1) = -1$

En esta igualdad utilizamos la convención de las longitudes de segmento con signo: $PC = -CP$, $RB = -BR$ y $AQ = -QA$.

Supongamos recíprocamente que A', B' y C' dos tres puntos en las rectas BC, AC y AB respectivamente cumpliendo la propiedad

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = -1$$

Sea P el punto de intersección entre la recta B’C’ y BC. Vamos a ver que $P = A'$:



El triángulo ABC con los tres puntos alineados B’, P y C’ cumple la condición de la primera parte de esta demostración, luego

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BC'}{C'A} = -1$$

Por lo tanto $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = (-1)(-1) = 1$ pero simplificando llegamos a

$\frac{CP}{PB} \cdot \frac{CA'}{A'B} = 1 \Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{A'B}{CA'}$, y por tanto $P = A'$.

Fuente de la demostración: http://sistemas.fciencias.unam.mx/~mglgm/NotasGM_cap4.pdf

Nota histórica. Este teorema se atribuye a **Menelao de Alejandría** (alrededor del 100 AC). En 1678, un matemático italiano, **Giovanni Ceva**, publicó el Teorema de Menelao y un segundo teorema relacionado con éste.

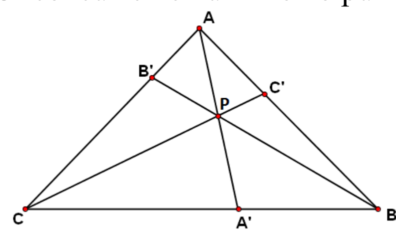
Ejercicios propuestos.

Ejercicio #29 de **[Prob1]**.

Ejercicio #14 de **[Prob2]**.

11.2.3 Proposición.
El teorema de Ceva y el teorema de Menelao son equivalentes.

Demostración.
Primera parte: Ceva suponiendo Menelao. Sea ABC un triángulo y supongamos que tres cevianas AA', BB' y CC' concurren en un mismo punto P.



Aplicando el teorema de Menelao al triángulo ACA' y la recta B'P, tenemos que

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CB}{BA'}\cdot\frac{A'P}{PA}=-1$$

Aplicando el teorema de Menelao al triángulo AA'B y la recta PC', tenemos que

$$\frac{BC'}{C'A}\cdot\frac{AP}{PA'}\cdot\frac{A'C}{CB}=-1$$

Multiplicamos estas dos igualdades:

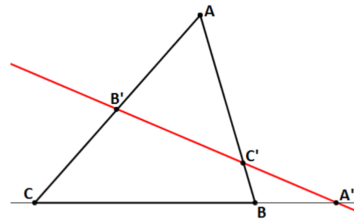
$$1=(-1)(-1)=\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CB}{BA'}\cdot\frac{A'P}{PA}\cdot\frac{BC'}{C'A}\cdot\frac{AP}{PA'}\cdot\frac{A'C}{CB}=\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{A'C}{BA'}\cdot\frac{BC'}{C'A}$$

Donde hemos utilizado $\frac{A'P}{PA}\cdot\frac{AP}{PA'}=1$ y $\frac{CB}{CB}=1$

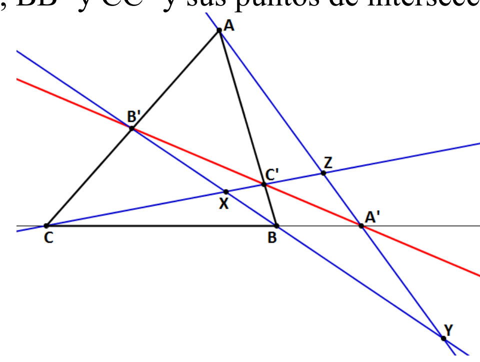
Luego $1=\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{A'C}{BA'}\cdot\frac{BC'}{C'A}\Rightarrow 1=\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}$

El recíproco se demuestra por contradicción.

Segunda parte: Menelao suponiendo Ceva. Sea un triángulo ABC y A', B' y C' tres puntos alineados en sus lados:

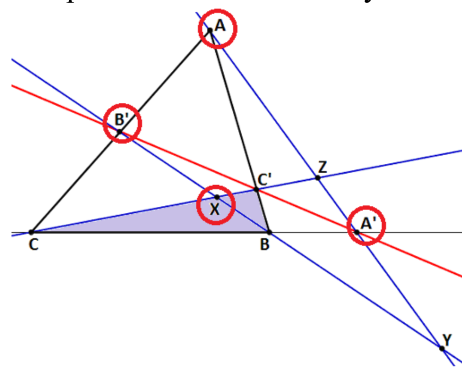


Trazamos las rectas AA', BB' y CC' y sus puntos de intersección:



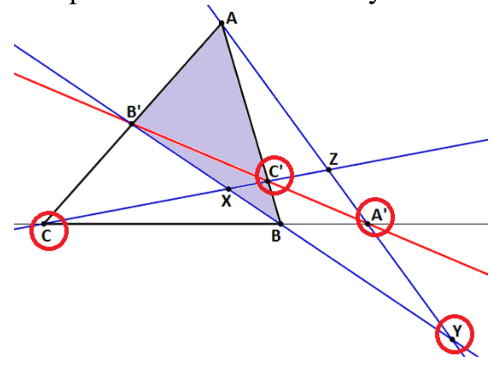
$$X=BB'\cap CC',\ Y=AA'\cap BB'\ \text{y}\ Z=AA'\cap CC'$$

1. Aplicando Ceva a CBC’ y las cevianas CA, BX, C’A’ (concurrentes en B’):



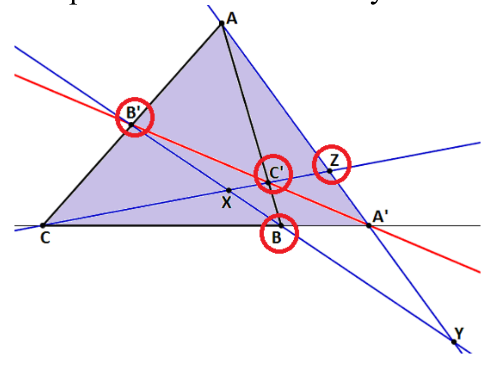
$$\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BA}{AC'}\cdot\frac{C'X}{XC}=-1$$

2. Aplicando Ceva a BAB’ y las cevianas BC, AY, B’C’ (concurrentes en A’):



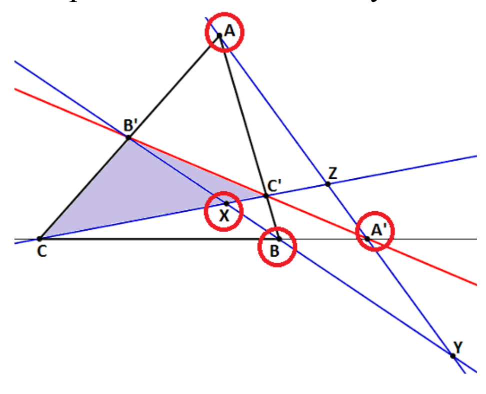
$$\frac{AC}{CB'}\cdot\frac{B'Y}{YB}\cdot\frac{BC'}{C'A}=-1$$

3. Aplicando Ceva a AA’C y las cevianas AB, A’B’, CZ (concurrentes en C’):



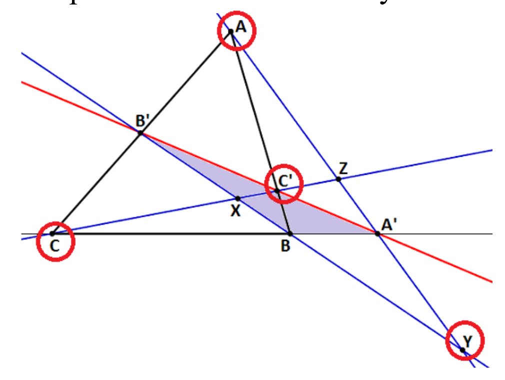
$$\frac{CB}{BA'}\cdot\frac{A'Z}{ZA}\cdot\frac{AB'}{B'C}=-1$$

4. Aplicando Ceva a AA’C y las cevianas AB, A’B’, CZ (concurrentes en C’):



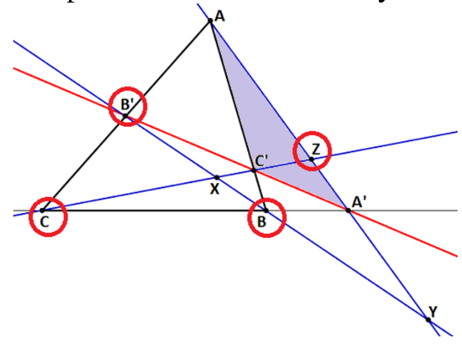
$$\frac{C'A'}{A'B'}\cdot\frac{B'A}{AC}\cdot\frac{CX}{XC'}=-1$$

5. Aplicando Ceva a B’BA’ y las cevianas B’Y, BC’, A’Y (concurrentes en A):



$$\frac{A'C}{CB}\cdot\frac{BY}{YB'}\cdot\frac{B'C'}{C'A'}=-1$$

6. Aplicando Ceva a AA’C’ y las cevianas AB’, A’B, C’Z (concurrentes en C):



$$\frac{A'B'}{B'C'}\cdot\frac{C'B}{BA}\cdot\frac{AZ}{ZA'}=-1$$

Multiplicamos estas seis igualdades:

$$1=(-1)^6=\frac{CA'}{A'B}\frac{BA}{AC'}\frac{C'X}{XC}\frac{AC}{CB'}\frac{B'Y}{YB}\frac{BC'}{C'A}\frac{CB}{BA'}\frac{A'Z}{ZA}\frac{AB'}{B'C}\cdot$$

$$\cdot\frac{C'A'}{A'B'}\frac{B'A}{AC}\frac{CX}{XC'}\frac{A'C}{CB}\frac{BY}{YB'}\frac{B'C'}{C'A'}\frac{A'B'}{B'C'}\frac{C'B}{BA}\frac{AZ}{ZA'}=$$

$$=\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{AC'}\frac{AB'}{CB'}\frac{B'A}{C'A}\frac{A'C}{BA'}\frac{C'B}{B'C}=\frac{CA'}{A'B}\frac{A'C}{BA'}\frac{BC'}{C'A}\frac{C'B}{AC'}\frac{AB'}{B'C}\frac{B'A}{CB'}$$

$$=\frac{CA'}{A'B}\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}\frac{AB'}{B'C}$$

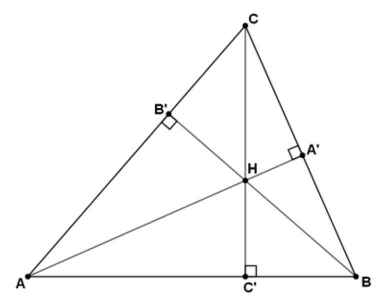
$$=\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}=\left(\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}\right)^2\Rightarrow\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}=\pm1$$

Pero $\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}\neq-1$, pues en caso contrario, aplicando Ceva, las rectas AA’, BB’ y CC’ serían concurrentes. Por lo tanto, $\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}=1$

Nota. Esta demostración se debe a **John R.Silvester**.

11.3 Alturas y ortocentro.

11.3.1 Proposición. Ortocentro.
Las tres alturas de un triángulo se cortan en un único punto llamado **ortocentro**, que denotaremos con la letra H.



Nota. El triángulo $\Delta A'B'C'$ formado por los pies de las alturas en BC, AC y AB respectivamente se denomina **triángulo órtico** y sus propiedades se estudiarán en el apartado 11.8.

Demostración:

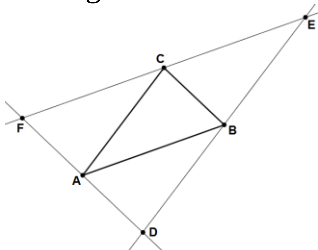
$$\left.\begin{array}{l} \cos B = \dfrac{BC'}{BC} \Rightarrow BC' = BC\cos B \\ \cos A = \dfrac{AC'}{AC} \Rightarrow AC' = AC\cos A \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BC'}{C'A} = \frac{BC\cos B}{AC\cos A}$$

De la misma manera $\dfrac{CA'}{A'B} = \dfrac{AC\cos C}{AB\cos B}$ y $\dfrac{AB'}{B'C} = \dfrac{AB\cos A}{BC\cos C}$

Y aplicamos el teorema de Ceva: $\dfrac{AB'}{B'C}\cdot\dfrac{CA'}{A'B}\cdot\dfrac{BC'}{C'A} = \dfrac{AB\cos A}{BC\cos C}\cdot\dfrac{AC\cos C}{AB\cos B}\cdot\dfrac{BC\cos B}{AC\cos A} = 1$

Nota. En una demostración más rigurosa tendríamos que analizar el signo del coseno para posibles ángulos obtusos, y comprobar que el razonamiento es igualmente válido. Si el triángulo es rectángulo las alturas se cortan en el vértice cuyo ángulo es recto.

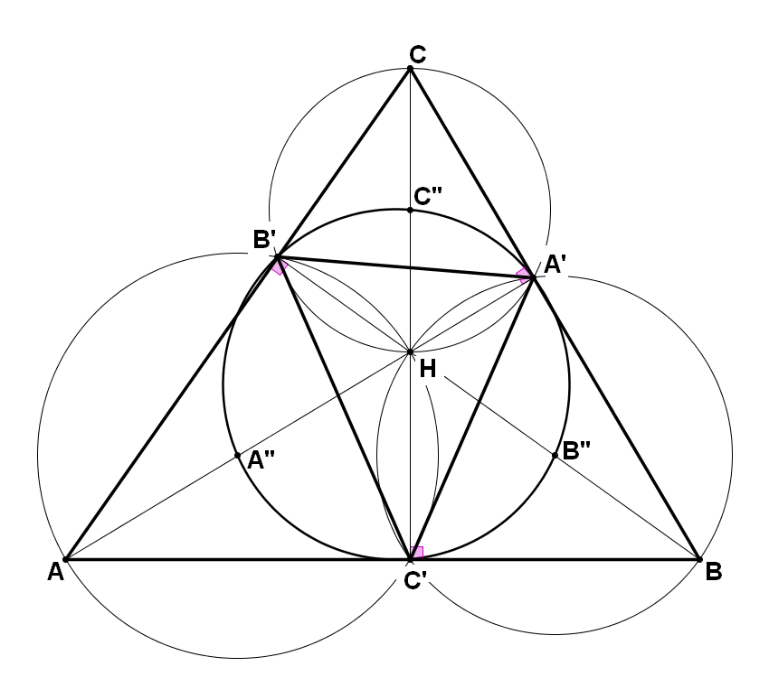
Una demostración alternativa interesante es la siguiente:
Sea un triángulo ΔABC. Trazamos las paralelas a cada lado y su vértice opuesto correspondiente para construir el triángulo ΔDEF.



Los cuatro triángulos ΔFAC, ΔCAB, ΔCBE y ΔDAB serán congruentes. Por ejemplo, aplicando 7.1.2b, $\Delta FAC \cong \Delta BCA$ por ser $\lozenge FABC$ un paralelogramo.
Tenemos que, en particular, $\Delta FAC \cong \Delta ABD \Rightarrow \overline{FA} \cong \overline{AD}$ y por tanto A es el punto medio de $\overline{FD}$. De la misma forma se demuestra que C es el punto medio de $\overline{FE}$ y que

B es el punto medio de $\overline{DE}$. Luego las alturas del triángulo ΔABC son las medianas del triángulo ΔDEF, que son concurrentes como se verá en 11.5.2.

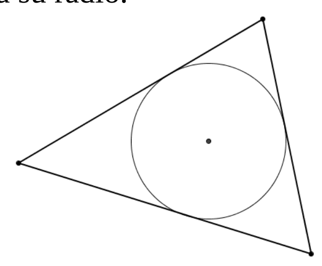
Nota. En el Problema #7 de **[Prob4]** se demostrará que, además, los puntos medios A'', B'' y C'' respectivamente de los segmentos AH, BH y CH pertenecen a la circunferencia circunscrita del triángulo pedal $\Delta A'B'C'$, también llamada "circunferencia de los nueve puntos" (ver 18.9.7).



11.4 Bisectrices, incírculo e incentro.

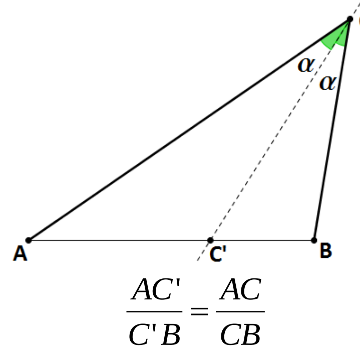
El concepto de bisectriz de un ángulo fue introducido y estudiado en el apartado 3.10. Ahora vamos a estudiar sus implicaciones y propiedades en el triángulo.

11.4.1 Definición. Circunferencia inscrita en un triángulo.
Diremos que una circunferencia está inscrita en un triángulo cuando esté contenida en su interior y sus tres lados sean tangentes (4.3.3) a la circunferencia. Llamaremos **incentro** a su centro e **inradio** a su radio.



En 3.10.4 vimos que, incluso en el contexto de un plano de Hilbert, las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un mismo punto llamado incentro. Este punto está caracterizado por equidistar de los tres lados, y por tanto, trazando perpendiculares desde este punto a cada lado, estas tres perpendiculares serán congruentes. Luego es el centro de la circunferencia inscrita (Ver 11.4.5). Así pues, en un plano de Hilbert siempre podemos inscribir una circunferencia dentro de un triángulo.

11.4.2 Proposición. Teorema de la bisectriz interior. (Elementos 6.3)
Si CC' es la bisectriz interior al vértice C de un triángulo ΔABC , se cumple



$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC}{CB}$$

Es decir, una bisectriz de un triángulo divide a su lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes. Además esta propiedad caracteriza la bisectriz interior del vértice C.

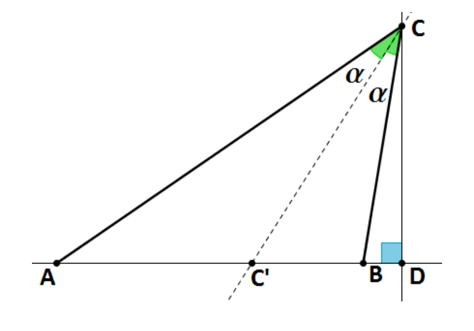
Demostración. Esta proposición se demostró en 8.2.9, veamos aquí una demostración utilizando trigonometría:
Por 9.2.1 sabemos que

$$[\Delta ACC']=AC\cdot CC'\cdot\sin(\alpha)/2 \text{ y } [\Delta C'CB]=BC\cdot CC'\cdot\sin(\alpha)/2$$

Luego

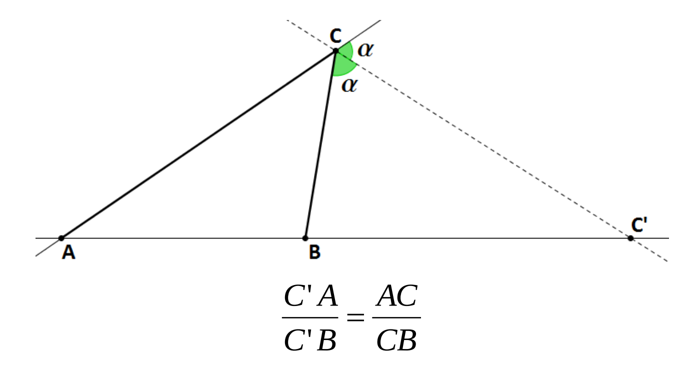
$$\frac{[\Delta ACC']}{[\Delta C'CB]}=\frac{AC\cdot CC'\cdot\sin(\alpha)/2}{BC\cdot CC'\cdot\sin(\alpha)/2}=\frac{AC}{BC}$$

Ahora trazamos la altura CD correspondiente al vértice C del triángulo.



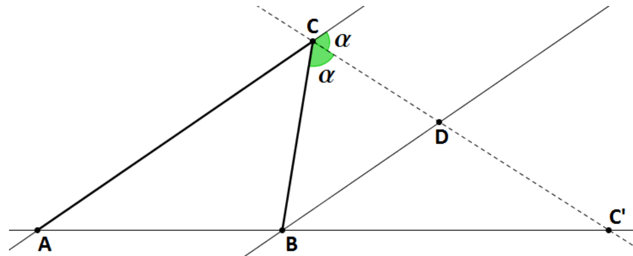
$$\frac{[\Delta ACC']}{[\Delta C'CB]} = \frac{AC' \cdot CD/2}{C'B \cdot CD/2} = \frac{AC'}{C'B}$$, luego $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC}{BC}$

11.4.3 Proposición. Teorema de la bisectriz exterior.
La proposición anterior también es válida para la bisectriz exterior de un vértice:



$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{AC}{CB}$$

Demostración. Trazamos la recta paralela a AC por B. Sea D su punto de intersección con CC’



$AC // BD \Rightarrow \angle CDB = \alpha$ por el Recíproco del teorema de los ángulos internos alternos (6.3.5).
Luego ΔBCD es isósceles en C: $\alpha = \angle CDB = \angle BCD$, y por consiguiente $BC = BD$.

Por otro lado, $AC // BD \Rightarrow \angle BAC = \angle C'BD, \angle ACC' = \angle BDC$, de lo que deducimos que los triángulos $\Delta AC'C$ y $\Delta BC'D$ son semejantes, pues tienen los mismos ángulos.

Por lo tanto tendrán lados proporcionales: $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AC}{BD} = \frac{AC}{BC}$

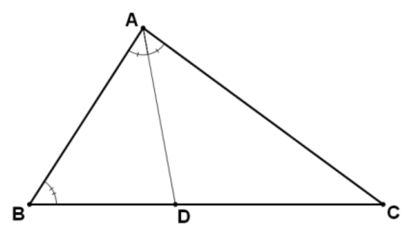
11.4.4 Proposición. Longitud de la bisectriz.
Sea un triángulo ΔABC y D el punto de corte entre la bisectriz de $\angle A$ y el lado opuesto $\overline{BC}$. Si $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$, tenemos:

a) $BD = \dfrac{ac}{b+c}$, $CD = \dfrac{ab}{b+c}$

b) $AD^2 = bc - BD \cdot DC$

c) $AD^2 = \dfrac{bc}{(b+c)^2}\left((b+c)^2 - a^2\right)$

d) $AD = \dfrac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$, donde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro del triángulo.

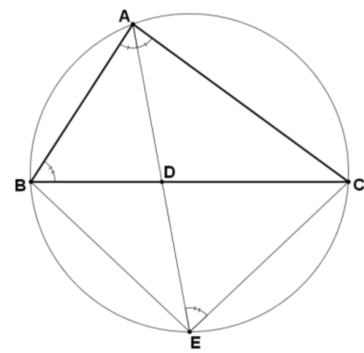


Demostración.
a) Por el Teorema de la bisectriz (11.4.2),

$$\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BD}{CD} + 1 = \frac{c}{b} + 1 \Rightarrow \frac{BD+CD}{CD} = \frac{b+c}{b} \Rightarrow \frac{a}{CD} = \frac{b+c}{b} \Rightarrow \frac{ab}{b+c} = CD$$

Y de forma similar se demuestra que $BD = \dfrac{ac}{b+c}$.

b) Prolongamos la recta AD hasta cortar en E la circunferencia circunscrita al triángulo.



$\angle AEC = \angle ABC$ por ser ángulos que abarcan un mismo arco y claramente $\angle EAC = \angle BAD$, luego ΔAEC y ΔABD son triángulos semejantes, y por tanto

$$\frac{c}{AD} = \frac{AE}{b} = \frac{AD+DE}{b}$$

Por otro lado, por 10.1.5, $BD \cdot CD = AD \cdot DE \Rightarrow DE = \dfrac{BD \cdot CD}{AD}$ y por tanto

$$\frac{c}{AD} = \frac{AD+DE}{b} = \frac{AD + \frac{BD \cdot CD}{AD}}{b} \Rightarrow bc = AD\left(AD + \frac{BD \cdot CD}{AD}\right) = AD^2 + BD \cdot CD$$

De donde se deduce $AD^2 = bc - BD \cdot CD$.

c) Sustituimos en la expresión anterior las igualdades del apartado a:

$$AD^2 = bc - BD \cdot CD = AD^2 = bc - \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} =$$

$$= bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) = bc\left(\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}\right) = \frac{bc}{(b+c)^2}\left((b+c)^2 - a^2\right)$$

d) $(b+c)^2 - a^2 = (a+b+c)(b+c-a) = 2s(2s-2a)$, luego

$$AD^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}\left((b+c)^2 - a^2\right) = \frac{bc2s(2s-2a)}{(b+c)^2} = \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2} \Rightarrow AD = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$$

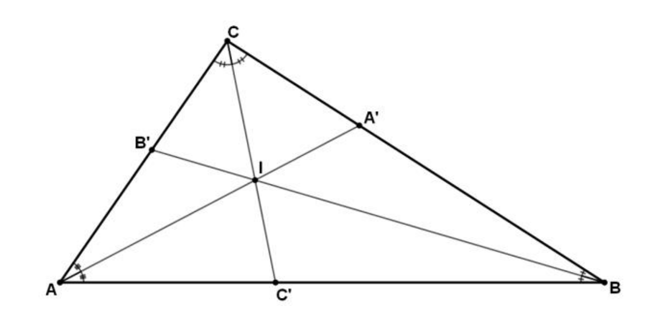
Observación. Otras fórmulas para las longitudes de las bisectrices.
Denotando por l_a, l_b y l_c las bisectrices por los vértices A, B y C respectivamente, se cumple:

a) $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ $\qquad l_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}$ $\qquad l_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$

b) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ $\qquad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$ $\qquad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

Ejercicio propuesto: Ejercicio #33 de **[Prob1]**.

11.4.5 Proposición. Incentro de un triángulo.
Las bisectrices de un triángulo se encuentran en un único punto llamado **incentro**.



Observación: Este mismo resultado se demostró en 3.10.4.

Demostración. Por 11.4.2 sabemos que

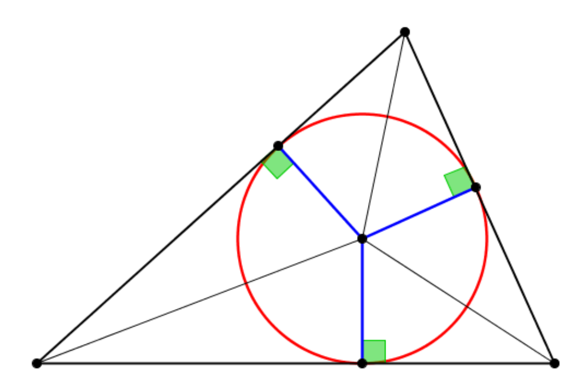
$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC}{CB}, \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{BA}{AC}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{CB}{BA}$$

luego

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = \frac{B'A}{CB'} \cdot \frac{A'C}{BA'} \cdot \frac{C'B}{AC'} = \frac{BA}{CB} \cdot \frac{AC}{BA} \cdot \frac{CB}{AC} = 1$$

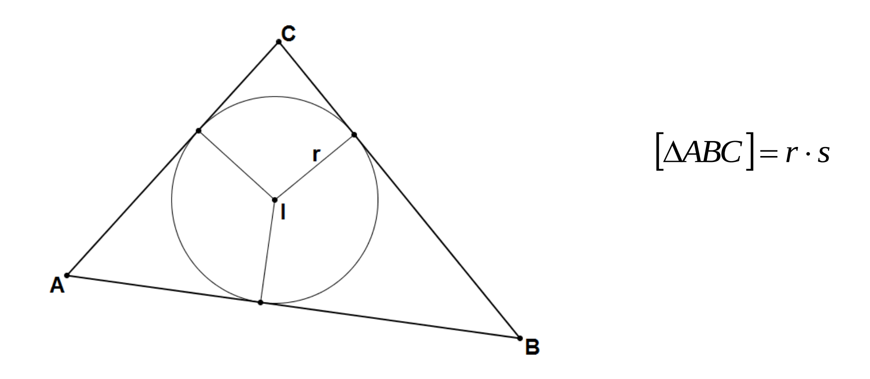
y basta aplicar el teorema de Ceva (11.2.1).

11.4.6 Proposición. Circunferencia inscrita e inradio de un triángulo.
Si trazamos las rectas perpendiculares a cada lado por el incentro, estos tres segmentos serán congruentes, y por tanto serán radios de una misma circunferencia tangente a los tres lados del triángulo. Esta circunferencia se llama **circunferencia inscrita**, su centro será el **incentro**, y llamaremos **inradio** a su radio.



La circunferencia inscrita no es la única circunferencia tangente a los tres lados que podemos trazar. En el apartado 11.11 veremos que existen otras tres con esta misma propiedad.

11.4.7 Proposición.
Dado un triángulo ΔABC con inradio r y semiperímetro s, se cumple



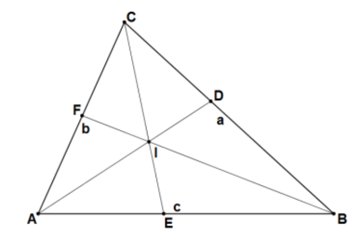
$$[\Delta ABC] = r \cdot s$$

Demostración. Basta dividir el triángulo en tres triángulos ΔACI , ΔBCI y ΔABI . Los tres tienen como altura el inradio r, luego

$$[\Delta ABC] = [\Delta ABI] + [\Delta ACI] + [\Delta BCI] = \frac{AB \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot r}{2} + \frac{AC \cdot r}{2} = r\frac{AB + BC + AC}{2}$$

Ejercicios propuestos: Ejercicio #34 de **[Prob1]** y Ejercicio #21 de **[Prob2]**.

11.4.8 Proposición.
Sea un triángulo ΔABC, AD, BE y CF las respectivas bisectrices por A, B y C, y sea I el incentro. Si $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$, y s es el semiperímetro, entonces:



a) $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$, $\frac{BI}{IE} = \frac{a+c}{b}$, $\frac{CI}{IF} = \frac{a+b}{c}$

b) $AI = \sqrt{\frac{bc(s-a)}{s}}$, $BI = \sqrt{\frac{ac(s-b)}{s}}$, $CI = \sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}}$

Demostración.
a) Considerando el triángulo ΔABD, con bisectriz BI, por 11.4.2 tenemos $\frac{c}{BD} = \frac{AI}{ID}$.

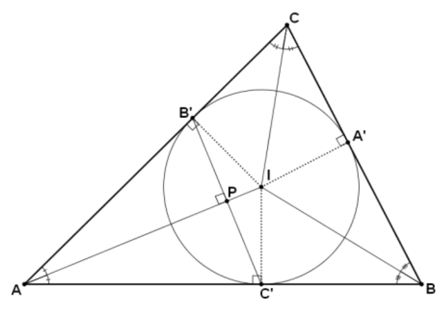
Considerando el triángulo ΔADC, con bisectriz CI, por 11.4.2 tenemos $\frac{b}{CD} = \frac{AI}{ID}$

Luego $\frac{c}{BD} = \frac{b}{CD} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{CD}{BD} + 1 = \frac{b}{c} + 1 \Rightarrow \frac{CD+BD}{BD} = \frac{b+c}{c} \Rightarrow \frac{a}{BD} = \frac{b+c}{c}$

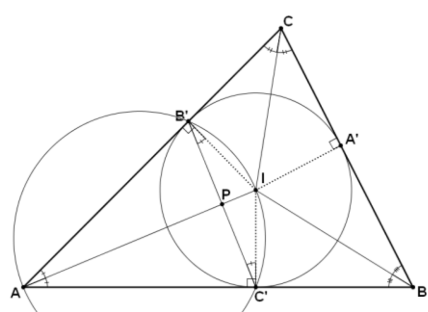
Luego $\frac{AI}{ID} = \frac{c}{BD} = \frac{b+c}{a}$

Las otras dos igualdades se demuestran con un razonamiento similar.

11.4.9 Proposición. Los puntos de tangencia de un triángulo y su incírculo.
En un triángulo ΔABC, sean A', B' y C' los puntos de contacto entre la circunferencia inscrita y los lados BC, AC y AB.
a) Entonces $AC' = AB'$, $AI \perp B'C'$ y si P es el punto de corte entre AI y $B'C'$, se cumple $C'P = PB'$.
b) $AB' = AC' = s - a$, $BC' = BA' = s - b$ y $CB' = CA' = s - c$, donde s es el semiperímetro del triángulo.



Demostración.
a) Puesto que $B'I \perp AC$ y $C'I \perp AB$, los puntos B' y C' pertenecen a la circunferencia de diámetro AI.



Luego $\angle B'C'I = \angle IAB' = \angle IAC' = \angle C'B'I = \angle A/2$

Y por tanto $\angle AB'C' = \angle AB'I - \angle C'B'I = 90 - \angle B'C'I = \angle AC'I - \angle B'C'I = \angle AC'B'$
Luego $\Delta AB'C'$ es isósceles en A y por tanto $AC' = AB'$. Los triángulos $\Delta AC'P$ y $\Delta AB'P$ son congruentes por el criterio ASA, y por tanto $\angle APB' \cong \angle APC'$, ángulos suplementarios congruentes luego ángulos rectos.
En todo triángulo isósceles la bisectriz por un ángulo coincide con la mediana, luego $C'P = B'P$.
b)

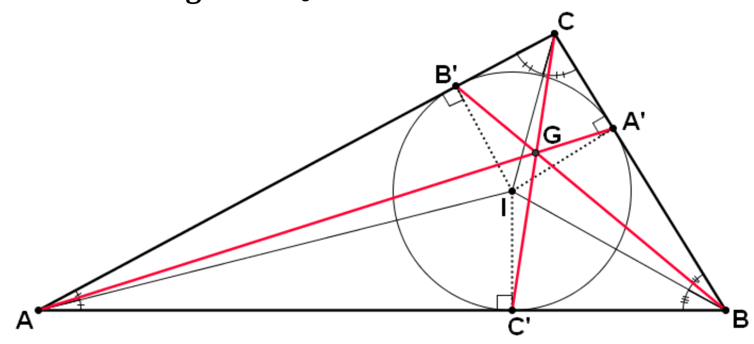
$$2s - a = AB + AC + BC - BC = AB + AC =$$

$$= AC' + C'B + AB' + B'C = AC' + BA' + AC' + CA' = 2AC' + (BA' + CA') = 2AC' + a$$

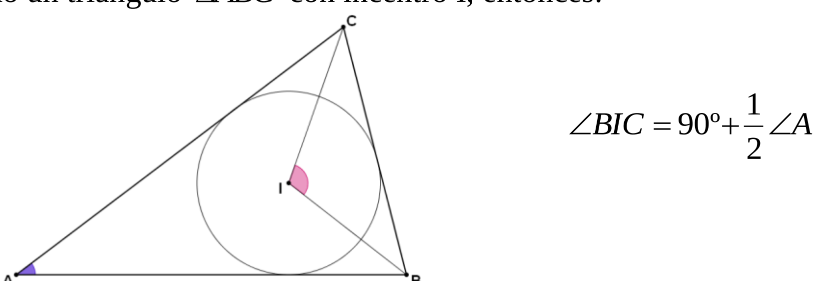
$$\Rightarrow 2s - a = 2AC' + a \Rightarrow 2s - 2a = 2AC' \Rightarrow s - a = AC'$$

Las otras dos identidades se demuestran de la misma manera.

Nota. En el problema #11 de **[Prob3]** se demuestra que A', B' y C' son las trazas de un punto llamado **Punto de Gergonne G_e.**

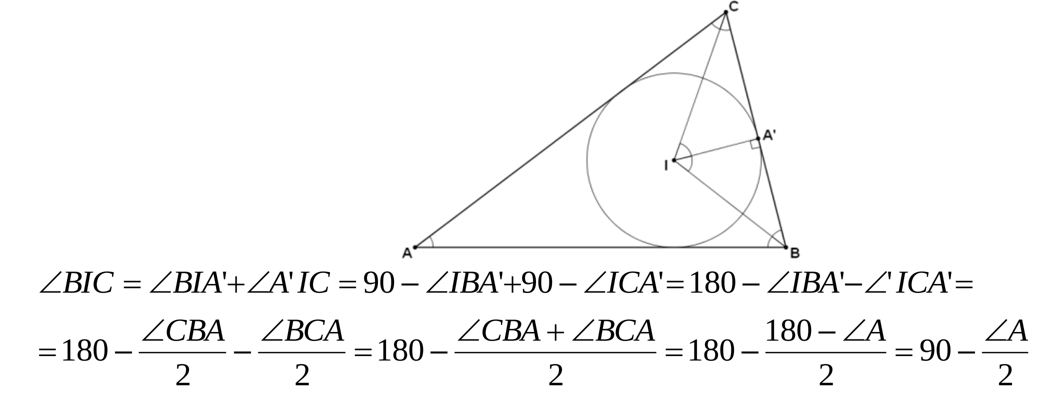


11.4.10 Proposición. Ángulo determinado por el incentro.
Dado un triángulo ΔABC con incentro I, entonces:



$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$$

Demostración. Trazamos la perpendicular por I al lado BC y sea A' su punto de corte con dicho lado.



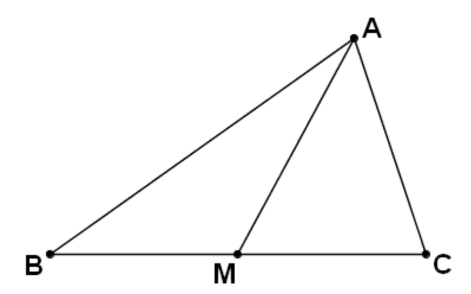
$$\angle BIC = \angle BIA' + \angle A'IC = 90 - \angle IBA' + 90 - \angle ICA' = 180 - \angle IBA' - \angle ICA' =$$

$$= 180 - \frac{\angle CBA}{2} - \frac{\angle BCA}{2} = 180 - \frac{\angle CBA + \angle BCA}{2} = 180 - \frac{180 - \angle A}{2} = 90 - \frac{\angle A}{2}$$

Problema propuesto: Problemas #26 de **[Prob5]**.

11.5 Medianas y baricentro.

11.5.1. Proposición.
Sea ΔABC un triángulo, y M el punto medio de BC.
a) La mediana AM divide el triángulo en dos triángulos con áreas iguales.
b) $AB \cdot \sin(\angle BAM) = AC \cdot \sin(\angle MAC)$.
c) $AM < \frac{AB + AC}{2}$



Demostración. a) ΔABM y ΔAMC son dos triángulos con la misma base y misma altura, luego tienen el mismo área.
b) Puesto que $[\Delta ABM] = [\Delta AMC]$, aplicando 9.2.1,
$\frac{AB \cdot AM \cdot \sin(\angle BAM)}{2} = \frac{AM \cdot AC \cdot \sin(\angle MAC)}{2} \Rightarrow AB \cdot \sin(\angle BAM) = AC \cdot \sin(\angle MAC)$
c) Prolongamos la mediana AM hasta un punto A' tal que $AM \cong MA'$. El cuadrilátero resultante $BACA'$ será un paralelogramo por 7.1.2e, luego $AC \cong BA'$ por 7.1.2c.
Aplicando la desigualdad triangular a $\Delta ABA'$, tenemos que

$$2AM = AA' < AB + BA' = AB + AC \Rightarrow AM < \frac{AB + AC}{2}$$

Problema propuesto: Problemas #16 de **[Prob5]**.

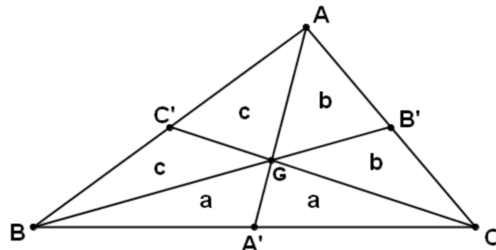
11.5.2 Proposición.
Las medianas de un triángulo se encuentran en un punto único llamado **baricentro**.

Demostración. $\frac{AB'}{B'C} = \frac{CA'}{A'B} = \frac{BC'}{C'A} = 1$ luego claramente $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$, y basta aplicar el teorema de Ceva.

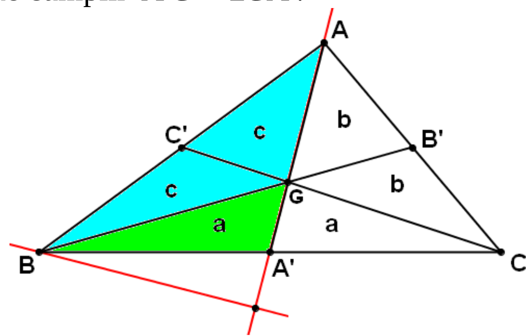
Problema propuesto. Problema #6 de **[Prob5]**.

11.5.3 Proposición.
a) Las medianas de un triángulo determinan seis triángulos internos de la misma área.
b) Las medianas de un triángulo se cortan en razón 2:1.

Demostración. Sea un triángulo ΔABC y sus medianas AA', BB' y CC'. Sea G su baricentro. Los triángulos marcados con la misma letra tienen áreas iguales, pues tienen la misma base y comparten una altura común.



Pero por el mismo motivo $[\Delta BCC'] = [\Delta ACC']$, luego $2a + c = 2b + c$.
De la misma manera, $[\Delta BAA'] = [\Delta CAA']$, y por tanto $2c + a = 2b + a$, así pues $a = b = c$, es decir, los seis triángulos tienen la misma área.
Ahora tenemos que $[\Delta ABG] = 2[\Delta GBA']$, y como ambos triángulos comparten una altura, por 8.2.6 se ha de cumplir $A'G = 2GA'$.

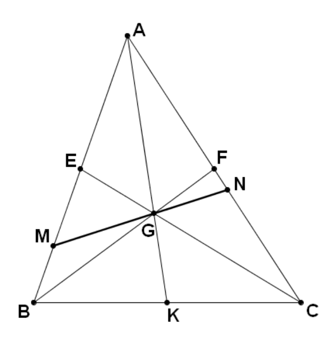


11.5.4 Proposición. Caracterización del baricentro.
Sea G el baricentro de un triángulo ΔABC, con medianas AK, BF y CE.
Sea M en AB y N en AC de forma que la recta MN pase por G.
Entonces se cumple

$$AM \cdot NC + AN \cdot MB = AM \cdot AN$$

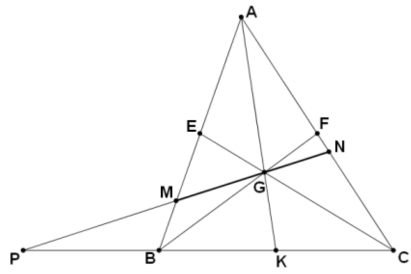
o equivalentemente

$$1 = \frac{NC}{AN} + \frac{MB}{AM}$$



Nota. Esta propiedad caracteriza el baricentro de un triángulo.

Demostración. Prolongamos la recta MN hasta encontrarse con BC en P.



Aplicando el teorema de Menelao al triángulo ΔAKC y la recta MN:

$$\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CP}{PK}\cdot\frac{KG}{GA}=-1$$

Pero $\frac{KG}{GA}=\frac{1}{2}$ por 11.5.3b, luego

$$\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CP}{PK}\cdot\frac{1}{2}=-1\Leftrightarrow\frac{AN}{NC}=\frac{-2PK}{CP}=\frac{2PK}{PC}\Leftrightarrow\frac{NC}{AN}=\frac{PC}{2PK}$$

Aplicando el teorema de Menelao al triángulo ΔAKB y la recta MN:

$$\frac{AG}{GK}\cdot\frac{KP}{PB}\cdot\frac{BM}{MA}=-1$$

Pero $\frac{AG}{GK}=\frac{2}{1}$ por 11.5.3b, luego

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{KP}{PB}\cdot\frac{BM}{MA}=-1\Leftrightarrow\frac{BM}{MA}=-\frac{PB}{2KP}=\frac{PB}{2PK}$$

Sumando las dos igualdades anteriores:

$$\frac{NC}{AN}+\frac{BM}{MA}=\frac{PC}{2PK}+\frac{PB}{2PK}=\frac{PC+PB}{2PK}=\frac{2PK}{2PK}=1$$

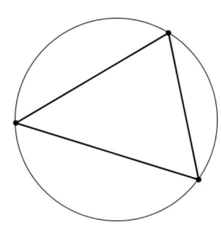
Teniendo en cuenta que

$$PC=PB+BC=PB+2BK\Rightarrow$$

$$PC+PB=PB+2BK+PB=2PB+2BK=2(PB+BK)=2PK$$

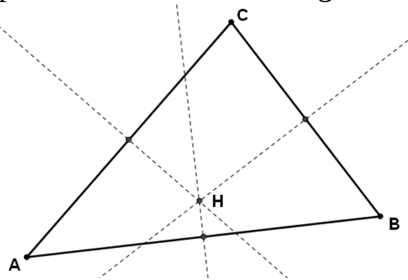
11.6 Mediatrices, circuncírculo y circuncentro.

11.6.1 Definición. Triángulos circunscribibles.
Diremos que un triángulo es **circunscribible** cuando exista una circunferencia que pase por sus tres vértices. Llamaremos a esta circunferencia **circunferencia circunscrita o circuncírculo,** llamaremos **circuncentro** a su centro (que denotaremos con la letra O) y **circunradio** a su radio.



Notación: Escribiremos (ABC) para referirnos a la circunferencia circunscrita al triángulo ΔABC.

11.6.2 Proposición.
En un plano euclídeo, las tres mediatrices de un triángulo (3.9.7) se encuentran en un único punto llamado **circuncentro**. Este punto es el centro de la circunferencia circunscrita, es decir, en un plano euclídeo todo triángulo es circunscribible.

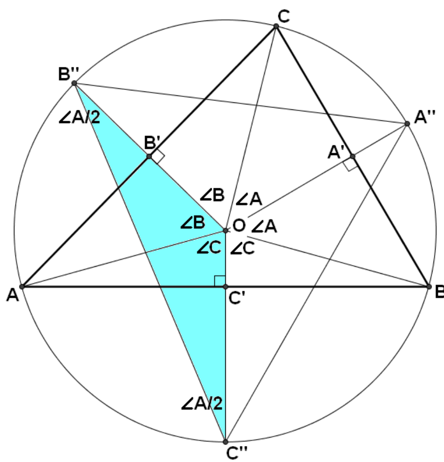


Recíprocamente, si un triángulo es circunscribible, las tres mediatrices se encuentran en un mismo punto.

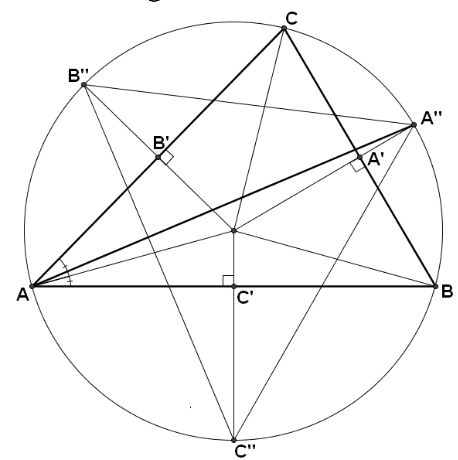
Demostración. Sea un triángulo ΔABC. Trazamos la mediatriz del lado $\overline{AB}$ y del lado $\overline{AC}$. Estas dos rectas no pueden ser paralelas por 6.6.2. Sea O su punto de corte.
Para demostrar que O también pertenece a la mediatriz asociada al lado $\overline{BC}$, utilizaremos repetidamente la caracterización de 3.9.8:
$\left|\overline{BO}\right| = \left|\overline{OA}\right|$ por estar O en la mediatriz del lado $\overline{AB}$.
$\left|\overline{CO}\right| = \left|\overline{OA}\right|$ por estar O en la mediatriz del lado $\overline{AC}$.
Luego $\left|\overline{BO}\right| = \left|\overline{OA}\right| = \left|\overline{CO}\right| \Rightarrow \left|\overline{BO}\right| = \left|\overline{CO}\right|$ y por tanto O pertenece a la mediatriz asociada al lado $\overline{BC}$. Claramente, la circunferencia de centro O y radio $r = \overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$ pasa por los tres vértices.
Supongamos ahora que el triángulo ΔABC es circunscribible por una circunferencia de centro P. Entonces claramente $PA \cong PB \cong PC$ y por la caracterización 3.9.8 dicho punto P pertenecerá a las tres mediatrices del triángulo, es decir, las tres mediatrices se cortarán en P.

Ejercicio. Ejercicio #31 de **[Prob1].**

11.6.3 Proposición. Bisectriz e incentro vs. circunferencia circunscrita.
Sea ΔABC un triángulo y O su circuncentro. Sean A', B' y C' los puntos medios de los lados BC, AC y AB respectivos, y sean A", B" y C" los puntos de corte entre las rectas OA", OB" y OC" con los arcos BC, AB y AC respectivos de la circunferencia circunscrita.
a) El triángulo $\Delta B''HC''$ es un triángulo isósceles en O cuyos ángulos son $\angle A/2$, $\angle A/2$ y $\angle B+\angle C$.



b) La recta AA'' es la bisectriz del ángulo $\angle A$.



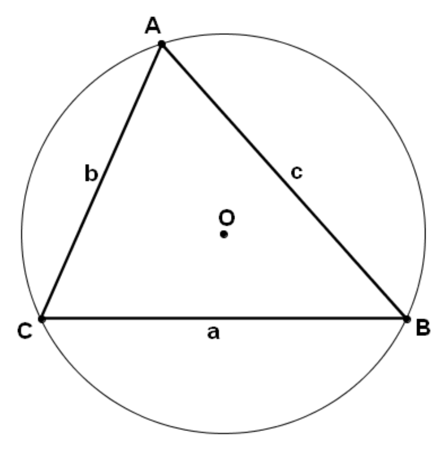
Observación. En 11.13 se estudiarán otras propiedades interesantes del punto A''.

Demostración.
a) En primer lugar, $\angle AOB = 2\angle C$ por ser un ángulo central que abarca su mismo arco.
Puesto que AH=HB, ΔAHB es isósceles y por tanto $\angle AOC' = \angle AOB/2 = \angle C$
De la misma forma se demuestra que $\angle AOB'' = \angle B$. Por ser $\Delta B''OC''$ isósceles,

$$\angle B''C''O = \frac{180-\angle B''OC''}{2} = \frac{180-(\angle B+\angle C)}{2} = \frac{\angle A}{2}$$

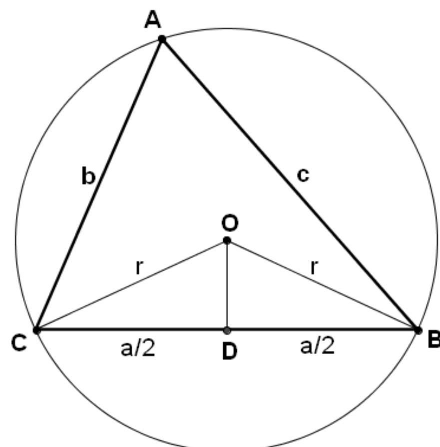
b) $\angle CAA'' = \angle COA''/2 = \angle A/2$ Por el Teorema del ángulo central, y de la misma manera $\angle BAA'' = \angle BOA''/2 = \angle A/2$, es decir, AA'' es la bisectriz del ángulo $\angle A$.

11.6.4 Teorema. El teorema del seno.
Sea ABC un triángulo y O el centro de su circunferencia circunscrita. Sea R el radio de esta circunferencia.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

Demostración. Trazamos los segmentos CO y OB. Sea D el punto medio del segmento CB. La perpendicular a CB que pasa por D es una mediatriz del triángulo por lo tanto pasa por el centro O.



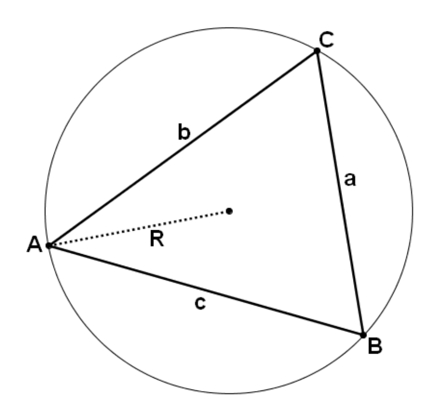
Por 10.5.3, $\angle A = \angle DOB$, pero por definición del seno de un ángulo tenemos $\sin(\angle DOB) = \frac{a/2}{R}$, por lo tanto

$$\sin A = \frac{a/2}{R} \Leftrightarrow \sin A = \frac{a}{2R} \Leftrightarrow 2R\sin A = a \Leftrightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$$

De la misma forma se demuestran las igualdades con los ángulos B y C.
De forma similar se demuestra este teorema cuando el circuncentro cae fuera del triángulo.

11.6.5 Corolario. Área del triángulo con el radio de la circunferencia circunscrita.
Sea ΔABC un triángulo de lados a, b y c. Sea R el radio de la circunferencia circunscrita. Entonces

$$[\Delta ABC] = \frac{a\,b\,c}{4R}$$

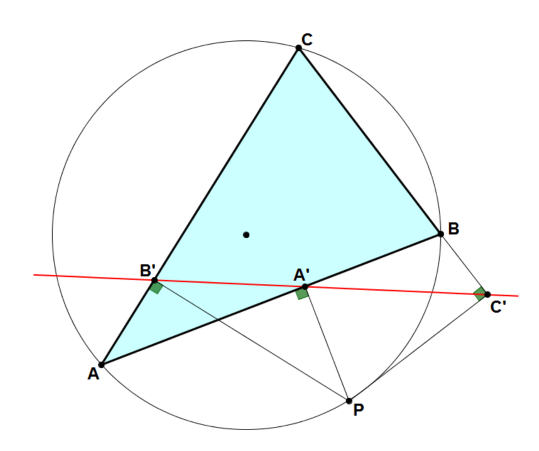


Demostración. Por 11.6.4 sabemos que $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \dfrac{a}{2R}$

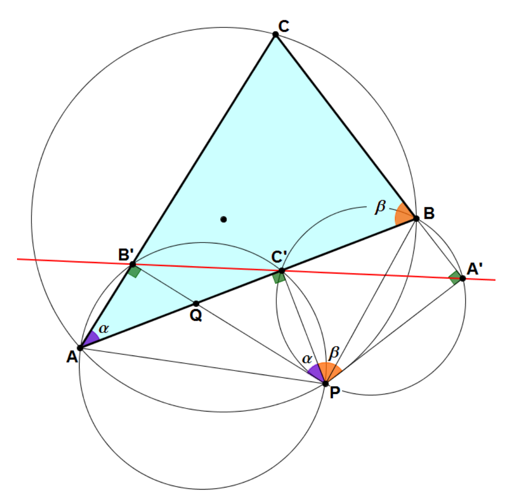
Por 9.2.1 sabemos que $[\Delta ABC] = \dfrac{1}{2} b\,c \sin A$

Luego $[\Delta ABC] = \dfrac{1}{2} b\,c \sin A = \dfrac{1}{2} b\,c \dfrac{a}{2R} = \dfrac{a\,b\,c}{4R}$

11.6.6 Teorema. La recta de Simson.
Dado un triángulo ΔABC y P un punto de su circunferencia circunscrita, los puntos de corte entre cada lado y sus perpendiculares respectivas por P están alineados. La recta que los contiene se llama **recta de Simson**.



Demostración. Sea A’, B’ y C’ los puntos de corte entre cada lado y sus respectivas perpendiculares por P.



Sea $\alpha = \angle CAB$. Veamos que $\alpha = \angle B'PC'$, y por tanto el cuadrilátero $APC'B'$ es cíclico (1).
Sea $\beta = \angle CBA$. Tenemos que $\beta = \angle C'PA'$, y por tanto el cuadrilátero $C'PA'B$ es también cíclico (2).
Sea $x = \angle B'C'A$ y $y = \angle BC'A'$. Queremos demostrar que $x = y$.
$x = \angle APB'$, $y = \angle BPA'$ (ángulos que abarcan el mismo arco de circunferencia).
$\angle C'PA' = \beta \Rightarrow \angle C'PB = \beta - y \Rightarrow \angle APB = x + \alpha + \beta - y$.
$180 = \angle ACB + \angle APB = \angle ACB + x + \alpha + \beta - y$ por ser $\lozenge APBC$ cíclico, pero por otro lado $180 = \alpha + \beta + \angle ACB$, y por tanto $0 = x - y \Rightarrow x = y$.

Demostración de (1): Sea Q el punto de corte entre AB y PB'. Los triángulos rectángulos $\Delta AB'Q$ y $\Delta PA'Q$ son semejantes pues $\angle AQB' = \angle PQA'$. Luego $\alpha = \angle CAB = B'PA'$. Y por lo tanto el cuadrilátero $APA'B'$ es cíclico.

Demostración de (2): Sea $\delta = \angle ACP$. $\delta = \angle ABP$ por ser ángulos que abarcan un mismo arco de circunferencia.
$\angle PBA' = 180 - \delta - \beta \Rightarrow \angle BPA' = \delta + \beta - 90$.
Pero por otro lado $\angle C'PB = 90 - \delta$, luego
$\angle C'PA' = \angle C'PB + \angle BPA' = 90 - \delta + \delta + \beta - 90 = \beta$.

Nota histórica. Aunque esta recta se atribuye a **Robert Simson** (1687-1768), fue descubierta por **William Wallace** en 1797.

11.6.7 Teorema. Recíproco del teorema de Simson.

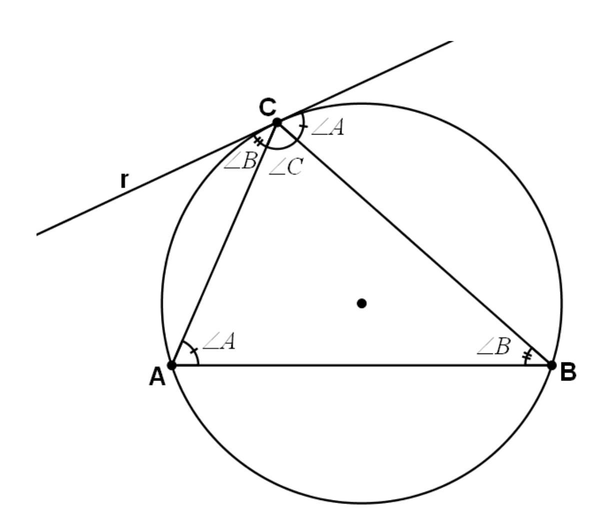
Dado un triángulo ΔABC y un punto P cualquiera, si los puntos de corte entre cada lado y sus perpendiculares respectivas por P están alineados entonces P pertenece a la circunferencia circunscrita del triángulo.

Demostración. En el Ejercicio #18 de **[Prob3]** se demuestra mediante coordenadas baricéntricas.

Ejercicio propuesto: Ejercicio #32 de **[Prob1]**.

11.6.8 Proposición. Ángulos de la tangente a la circunferencia circunscrita por un vértice.

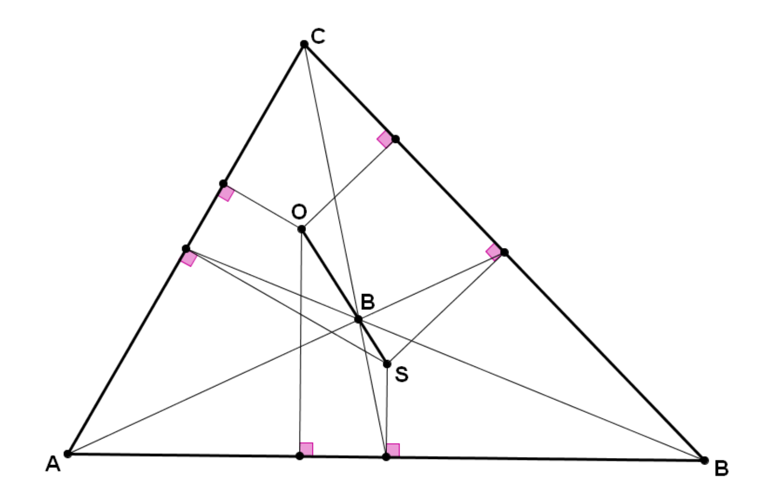
Sea ΔABC un triángulo y ϖ su circunferencia circunscrita. Sea r la recta tangente a ϖ por C. Entonces $\angle(r, AC) = \angle B$ y $\angle(r, BC) = \angle A$.



Demostración. Es una consecuencia directa de 10.1.11.

11.7 La recta de Euler.

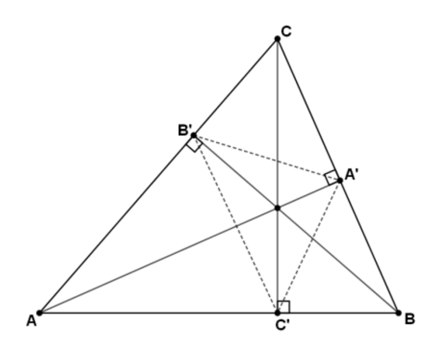
11.7.1 Teorema. La recta de Euler.
El baricentro B, el circuncentro S y el ortocentro O de un triángulo están alineados. La recta que pasa por estos tres puntos se denomina **Recta de Euler**.



Demostración. Se demostrará en 20.3.10 mediante coordenadas baricéntricas.

11.8 El triángulo órtico.

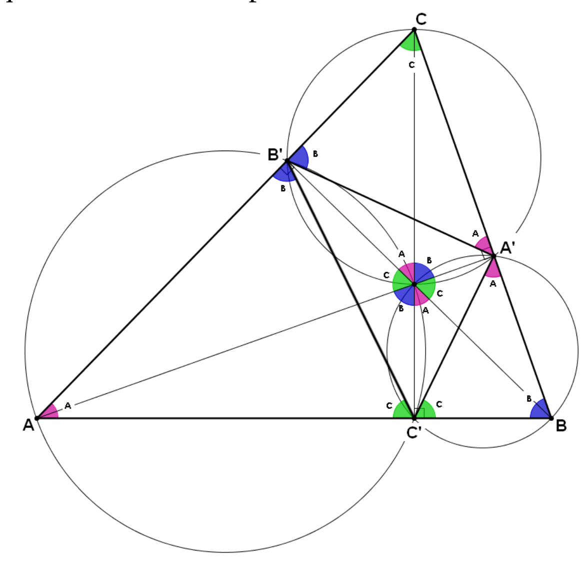
11.8.1 Definición. Triángulo órtico.
El triángulo órtico es el triángulo determinado por los pies de las alturas del triángulo.



11.8.2 Proposición. Propiedades del triángulo órtico.
Dado un triángulo ΔABC , sean H su ortocentro y A' , B' y C' los pies de las alturas de A, B y C respectivamente, es decir, $\Delta A'B'C'$ es el triángulo órtico asociado a ΔABC .
a) Existen seis cuadriláteros cíclicos, en particular:

A' y B' pertenecen a la circunferencia de diámetro CH,
A' y C' pertenecen a la circunferencia de diámetro BH,
B' y C' pertenecen a la circunferencia de diámetro AH.

Y de esto, aplicando las propiedades de los cuadriláteros cíclicos, se deducen fácilmente los ángulos internos que determinan los pies de las alturas:



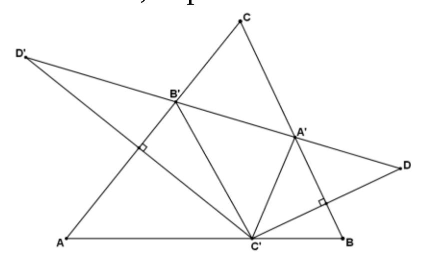
b) Las alturas del triángulo son las bisectrices del triángulo órtico, y por tanto el ortocentro del triángulo es el incentro del triángulo órtico.

Demostración. a) Basta aplicar 10.4.1 repetidamente.
b) $\angle C'B'H = 90 - \angle AB'C' = 90 - \angle AB'C' = 90 - \angle CB'A' = \angle HB'A'$, luego B'H es bisectriz del ángulo $\angle C'B'A'$. Con las otras dos bisectrices el razonamiento es idéntico.

Problema propuesto: Problema #17 de **[Prob4].**

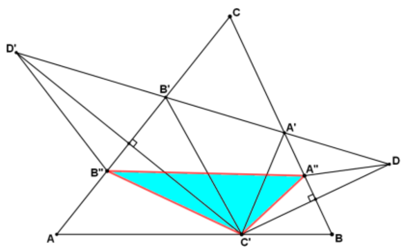
11.8.3 Teorema.
El triángulo órtico es el de menor perímetro que es posible inscribir en un triángulo acutángulo.

Demostración. Dado un triángulo ΔABC, y fijado un punto $C' \in \overline{AB}$, sean D y D' los puntos simétricos de C' respecto a los lados BC y AC del triángulo respectivamente. Sean A' y B' los puntos de corte de DD' con los lados BC y AC respectivamente.
Puesto que $\overline{B'C'} = \overline{D'B'}$ y $\overline{A'C'} = \overline{A'D}$, el perímetro de $\Delta A'B'C'$ será igual a $\overline{DD'}$:

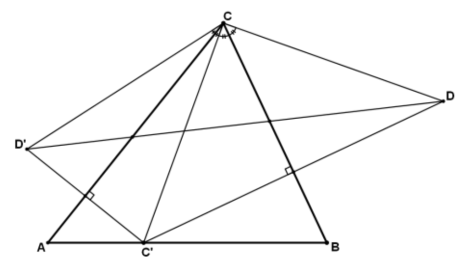


Y además es el triángulo inscrito en ΔABC con vértice C' de perímetro menor, pues para cualquier otro triángulo inscrito $\Delta A''B''C'$, con $A'' \in \overline{BC}$ y $B'' \in \overline{AC}$, tenemos $C'A'' = A''D$ y $C'B'' = B''D'$, y por tanto

$$C'B'' + C'A'' + A''B'' = B''D' + A''D + A''B'' \geq DD'$$



Vamos ahora a determinar el punto $C' \in \overline{AB}$ para el cual el segmento $\overline{DD'}$ tiene la mínima longitud. Trazamos el segmento $\overline{CC'}$.
$\angle BCD = \angle C'CB$ y $\angle ACD' = \angle C'CA$, luego $\angle D'CD = 2\angle C$ constante.
$D'C = CC' = CD$, luego los triángulos $\Delta D'CD$ son todos isósceles y semejantes entre ellos, y por tanto la base DD' será mínima cuando lo sea el lado $CD = CD' = CC'$



Y el segmento CC' es mínimo cuando sea perpendicular a AB, es decir, cuando C' sea el pie de la altura por C.
Este mismo razonamiento lo podemos aplicar a los otros dos vértices A' y B' para deducir que el triángulo inscrito de perímetro mínimo es el triángulo órtico.

Nota. Esta propiedad del triángulo órtico se atribuye a **Giovanni Fagnano**, pero esta demostración se debe a **L. Féjer**. (Fuente: Página web "Guirnalda matemática")

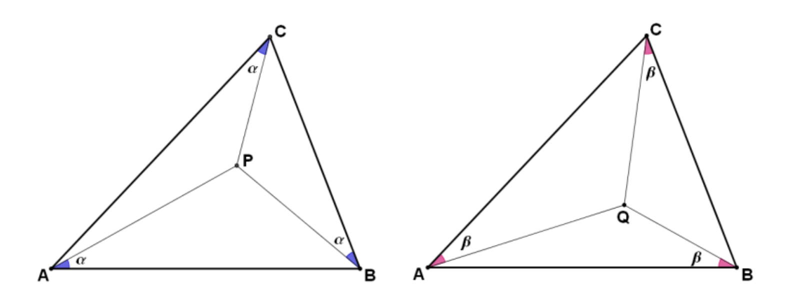
11.9 Los puntos de Brocard.

11.9.1 Teorema. Los puntos de Brocard.
Dado un triángulo ΔABC, existirá un único punto P tal que

$$\alpha = \angle PAB \cong \angle PCA \cong \angle PBC$$

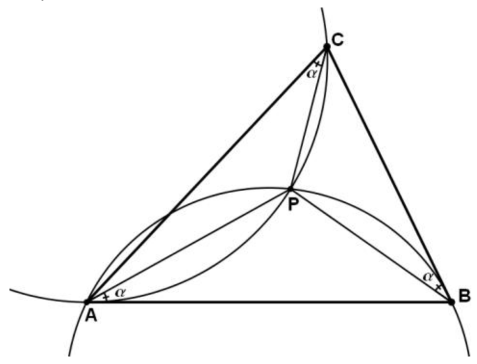
A dicho punto le llamaremos **Primer punto de Brocard,** en honor al matemático Henri Brocard (1845-1922). El **Segundo punto de Brocard** es aquel que satisface la misma propiedad pero tomando los ángulos en sentido contrario:

$$\beta = \angle QAC \cong \angle QCB \cong \angle QBA$$

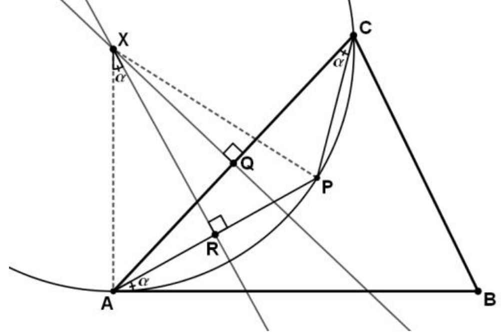


Nota. En 20.14 se determinarán las coordenadas baricéntricas de los puntos de Brocard.

Demostración. Sea P el primer punto de Brocard. Este punto se puede determinar como el segundo punto de intersección entre las circunferencias circunscritas a ΔAPC y ΔABP (el otro es el vértice A) puesto que estas circunferencias quedan determinadas sin necesidad de conocer P.



En efecto, determinemos la circunferencia circunscrita a ΔAPC:
El centro X de esta circunferencia es la intersección de las mediatrices de ΔAPC, en particular de la mediatriz de AC (que pasa por el punto medio Q de AC) y la mediatriz de AP (que pasa por el punto medio R de AP).



Pero $\angle AXP = 2\angle ACP$ pues es el ángulo central que abarca el mismo arco de circunferencia (10.1.2).
El triángulo ΔAXP es isósceles en X, luego su mediatriz XR es bisectriz, y por tanto $\angle AXR = \angle AXP / 2 = \angle ACP = \alpha$
Luego $\angle RAX = 180 - \angle ARX - \angle AXR = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$
Y por último $\angle BAX = \angle BAR + \angle RAX = \alpha + 90 - \alpha = 90$
Es decir, podemos determinar el centro de esta circunferencia como la intersección de la mediatriz de AC y la perpendicular a AB por A.

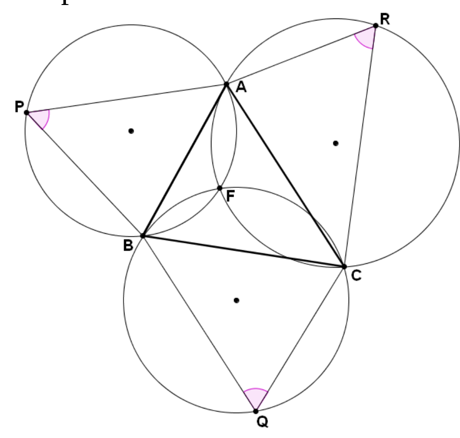
Observación. Se conoce como **circunferencias adjuntas** las que pasan por dos de los vértices de un triángulo ABC y son tangentes a uno de los lados adyacentes. Hemos obtenido los puntos de Brocard como intersección de estas circunferencias.

Nota biográfica. Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard (12 de mayo de 1845 - 16 de enero de 1922) fue un meteorólogo y matemático francés, en particular un geómetra. Su descubrimiento mejor conocido es la invención y hallazgo de las propiedades de los puntos de Brocard, el Círculo de Brocard y el Triángulo de Brocard, todos los cuales llevan su nombre. El matemático contemporáneo Nathan Court escribió que él, junto con Émile Lemoine y Joseph Neuberg, fue uno del tres co-fundadores de la geometría triangular moderna. Está nombrado como Emérito en la Academia Internacional de Ciencias, fue galardonado con la Orden de las Palmas Académicas, y fue un agente de la Legión de Honor. Pasó la mayor parte de su vida estudiando meteorología como un agente en la marina francesa, pero no parece haber hecho ninguna contribución original notable al tema.

Fuente: Wikipedia.

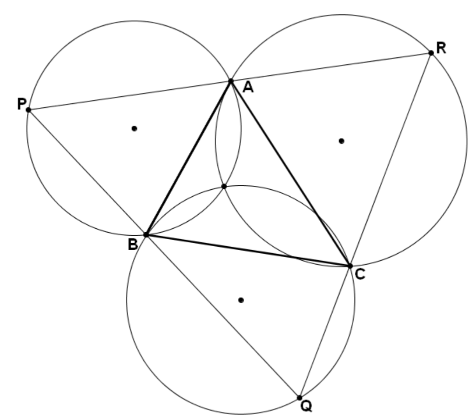
11.10 Triángulos de Napoleón.

11.10.1 Teorema.
Si trazamos externamente en los lados de un triángulo cualquiera ΔABC los triángulos ΔPAB, ΔQBC y ΔRAC, de forma que los ángulos "remotos" $\angle P = \angle APB$, $\angle Q = \angle BQC$ y $\angle R = \angle ARC$ sumen 180º, entonces las circunferencias circunscritas de estos tres triángulos tienen un punto en común.



Demostración. Las circunferencias circunscritas a ΔRAC y ΔQBC se cortarán en C y en otro punto al que llamaremos F.
Luego $\angle BFC = 180 - \angle Q$ y $\angle AFC = 180 - \angle R$ por ser $ARCF$ y $BFCQ$ cuadriláteros cíclicos.
Y por tanto
$\angle AFB = 360 - \angle AFC - \angle BFC = 360 - (180 - \angle R) - (180 - \angle Q) =$
$360 - 180 + \angle R - 180 + \angle Q = \angle R + \angle Q = 180 - \angle P$
Así pues, F también pertenecerá a la circunferencia circunscrita de ΔPAB.

11.10.2 Corolario.
Si los tres vértices de un triángulo ΔABC están cada uno de ellos en los lados de otro triángulo ΔPQR, entonces las circunferencias circunscritas de ΔPAB, ΔQBC y ΔRAC tienen un punto en común.

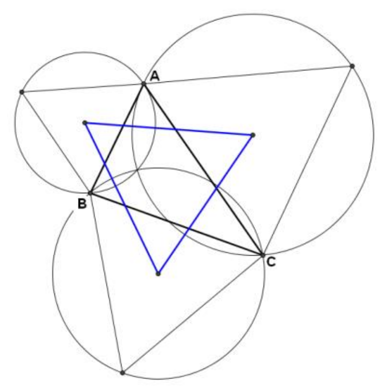


Demostración. Claramente se cumplen las condiciones del teorema anterior.

11.10.3 Corolario.
Sean dos triángulos ΔABC y ΔDEF. Trazamos externamente por cada lado del triángulo ΔABC tres triángulos ΔPAB, ΔQBC y ΔRAC, los tres semejantes a ΔDEF, de forma que $\angle P \cong \angle D$, $\angle Q \cong \angle E$ y $\angle R \cong \angle F$.
Entonces los circuncentros de los tres triángulos forman un triángulo que también es semejante a ΔDEF.

Demostración. En primer lugar, se cumplen las condiciones del teorema anterior, luego las tres circunferencias circunscritas se cortarán en un punto común F. Sean A', B' y C' los circuncentros de los triángulos ΔQBC, ΔRAC y ΔPAB respectivamente.
Por 10.1.16 sabemos que $AF \perp B'C'$, $FB \perp A'C'$ y $FC \perp A'B'$. Luego $\angle A'$ es suplementario de $\angle BFC$ (basta ver que se forma un cuadrilátero cíclico con A', F y los puntos de corte de las cuerdas BF y CF), y por tanto $\angle A' = \angle Q$ (el cuadrilátero $FCQB$ es cíclico). De la misma manera se deduce que $\angle B' = \angle R$ y $\angle C' = \angle P$, es decir, el triángulo resultante es semejante a ΔDEF.

11.10.4 Corolario. Teorema de Napoleón.
Dado un triángulo cualquiera ΔABC, si trazamos externamente por cada uno de sus lados tres triángulos equiláteros, los respectivos circuncentros formarán un triángulo equilátero.



Demostración. Claramente estamos ante un caso particular del anterior corolario 11.10.3.

Nota. El problema #33 de **[Prob4]** es una demostración de este teorema utilizando números complejos, que se estudiarán en el Tema 21.

Nota histórica. Este teorema lleva el nombre del general y emperador francés **Napoleón Bonaparte** (1769-1821). Aunque es muy dudoso que tuviera los conocimientos matemáticos para descubrir y demostrar dicho teorema, es indudable es que Napoleón tenía una sólida formación matemática.
Fue el mejor alumno en matemáticas en su etapa escolar en Brienne, donde estudió álgebra, trigonometría y cónicas, pero sobre todo geometría. El famoso matemático **Pierre Simon Laplace** (1749-1827) le entrevistó para su ingreso en la Escuela Militar de París. Durante su campaña en Egipto estuvo acompañado de eminentes matemáticos como **Gaspard Monge** (1746-1818) y **Joseph Fourier** (1768-1830), y a su regreso, después de realizar el golpe de Estado que le convirtió en Emperador de Francia, otorgó a la formación matemática un papel prioritario en la educación de los ciudadanos dentro de su modelo de Estado, el Estado moderno. Suya es la famosa cita «El avance y perfección de las matemáticas está íntimamente ligado a la prosperidad del Estado». Por poner un ejemplo, fue la influencia napoleónica la que impuso el sistema métrico decimal en España que sustituyó la amalgama de sistemas métricos regionales y locales que existía hasta aquel momento.

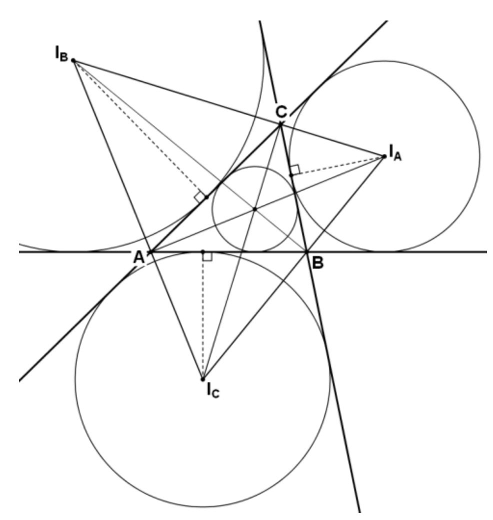
11.11 Circunferencias excritas. El punto de Nagel.

11.11.1 Proposición. Las circunferencias excritas.
Cada vértice de un triángulo determina un ángulo interior. Sus dos ángulos adyacentes son opuestos por el vértice, luego iguales y comparten la bisectriz. Llamaremos ángulos exteriores a los ángulos adyacentes por cada vértice, y llamaremos bisectrices exteriores a las bisectrices de los ángulos exteriores.

Dado un triángulo ΔABC, las bisectrices exteriores por B y por C no pueden ser paralelas, luego se cortarán en un punto al que llamaremos **A-excentro** y denotaremos por I_A. Este punto equidistará de los tres lados del triángulo, luego pasará por la bisectriz interior por A. La distancia de I_A a los tres lados será el A-exradio. La circunferencia determinada por el A-excentro y el A-exradio es tangente al lado BC y a las prolongaciones de los lados AC y AC, y se denominará circunferencia A-excrita del triángulo.

De la misma forma se define la circunferencia B-excrita y la circunferencia C-excrita, con sus correspondientes B-radio, C-radio, B-centro y C-centro.

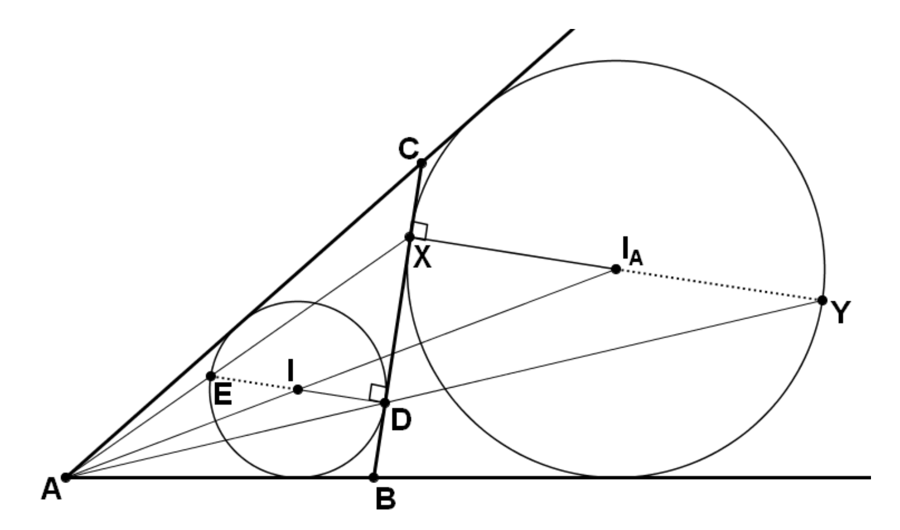
11.11.2 Proposición. Dualidad de ortocentros y excentros.
El triángulo ΔABC es el triángulo órtico (ver 11.8.1) del triángulo $\Delta I_A I_B I_C$ de sus excentros. Las alturas del triángulo $\Delta I_A I_B I_C$ son las bisectrices del triángulo ΔABC, y por tanto, el ortocentro del triángulo $\Delta I_A I_B I_C$ es el incentro del triángulo ΔABC.



Demostración. $AI_A \perp I_B I_C$ por la propiedad 3.10.6, luego AI_A es altura del triángulo $\Delta I_A I_B I_C$. De la misma manera BI_B y CI_C son las otras dos alturas, es decir, las alturas del triángulo $\Delta I_A I_B I_C$ son las bisectrices del triángulo ΔABC.

11.11.3 Teorema. Diámetro de las circunferencias inscrita y excrita.

Sea un triángulo ΔABC con incentro I y A-excentro I_A.
Sea D el punto de tangencia entre el lado BC y el incírculo.
Sea X el punto de tangencia entre el lado BC y el A-excírculo.
Sea E el punto de corte entre AX y el incírculo más cercano a A.
Sea Y el punto de corte entre AD y el A-excírculo más lejano de A.
Entonces ED es un diámetro del incírculo y XY es un diámetro del A-excírculo.



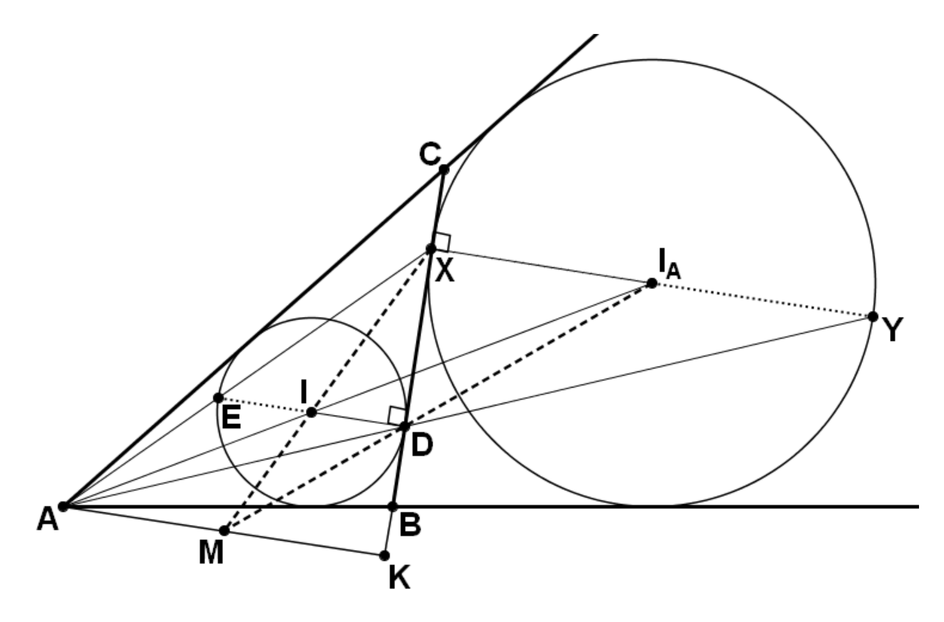
Demostración. En primer lugar vamos a demostar que E, I, D están alineados. Sea h la homotecia centrada en A que pasa el A-excírculo al incírculo.
Vamos a demostrar que $h(X)=E$:
Puesto que X pertenece al A-excírculo, $h(X)$ pertenecerá al incírculo.
Por otro lado, $h(X)\in AX$, y puesto que X es el punto de corte entre AX y el A-excírculo más cercano a A, $h(X)$ será el punto de corte entre el incírculo y AX más cercano a A, luego $h(X)=E$.

Puesto que la recta BXC es tangente al A-excírculo en X, la recta $h(B)E\,h(C)$ será tangente al incírculo en E. Así pues, $IE\perp h(B)h(C)$. Pero $BC\,//\,h(B)h(C)$, luego $IE\perp BC$, y puesto que $ID\perp BC$, deducimos que I, E y D están alineados.

Con un razonamiento similar demostramos que X, I_A, Y están alineados, considerando la homotecia h' que envía el incírculo al A-excírculo, y observando que $h'(D)=Y$.

Problema propuesto: Problema #3 de **[Prob5]**.

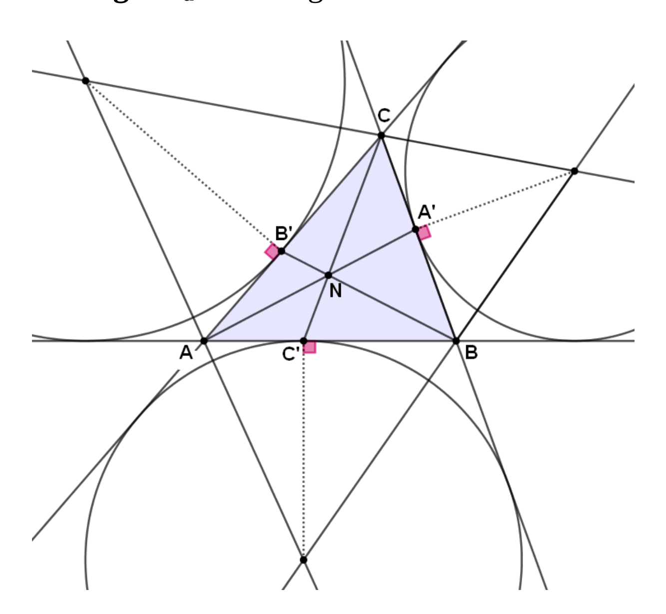
11.11.4 Teorema. Incentro, excentro y punto medio de la altura.
Siguiendo con la notación del teorema anterior, las rectas XI y DI_A se cortan en M, el punto medio de la altura AK del triángulo ΔABC.



Demostración.
Observamos que $ED // AK$, luego consideremos la homotecia h centrada en X que envía ED en AK. El incentro I es el punto medio de ED, luego $h(I)$ será el punto medio de AK, que es M. Así pues, X, I, M están alineados. De la misma forma podemos ver que I_A, D, M están alineados, considerando la homotecia centrada en D que envía XY en KA. El punto de corte de las dos rectas anteriores es el punto M.

Fuente de los dos teoremas anteriores:
https://artofproblemsolving.com/community/c473124h1565787s3_diameter_of_incircle_and_midpoints_of_altitudes

Observación: En el problema #9 de **[Prob3]** se demuestra que los tres puntos de tangencia del triángulo con las circunferencias excritas son las trazas de un punto que se conoce como **Punto de Nagel N_a** del triángulo.



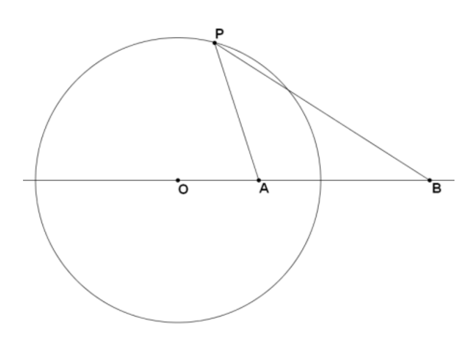
11.12 La circunferencia de Apolonio.

11.12.1 Proposición. La circunferencia de Apolonio asociada a dos puntos.
Dados dos puntos A y B, El lugar geométrico de los puntos P del plano tales que

$$\frac{PA}{PB} = \lambda > 0$$

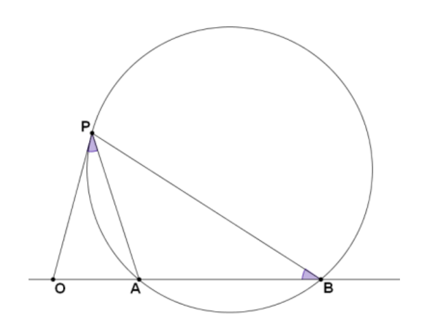
para un cierto $\lambda > 0$ fijo determina una circunferencia, llamada **circunferencia de Apolonio** de los dos puntos. Su centro está en la recta AB y su radio satisface

$$r^2 = OA \cdot OB$$



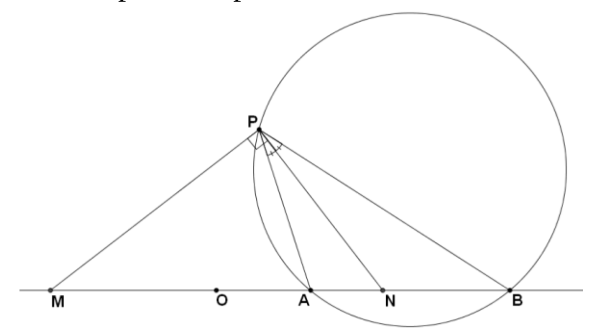
Demostración. Dados los puntos A y B, y un número $\lambda > 0$ fijo, sea P un punto satisfaciendo $\frac{PA}{PB} = \lambda$.
a) Mediante circunferencia inscrita y tangente. Trazamos la circunferencia circunscrita al triángulo ΔAPB y la recta tangente a dicha circunferencia por P. Sea O el punto su punto de corte con la recta AB.

Por 11.6.8 sabemos que $\angle OPA = \angle B$, luego los triángulos ΔOAP y ΔOPB son semejantes, y por tanto $\lambda = \frac{PA}{PB} = \frac{OP}{OB} = \frac{OA}{OP}$.



De esta última igualdad se deduce que $\frac{AO}{OB} = \frac{AO}{OP} \cdot \frac{OP}{OB} = \lambda^2$, es decir, el punto O es un punto fijo de la la recta AB.
Además se cumple $OB \cdot OA = OP^2 = r^2$, es decir, la distancia OP es fija.
De todo esto deducimos que P pertenece a la circunferencia de centro O y radio $\sqrt{OA \cdot OB}$.

b) Mediante bisectrices. Trazamos las bisectrices interiores y exteriores del ángulo $\angle APB$, y sean N y M sus respectivos puntos de corte con la recta AB.



Por el Teorema de la bisectriz interior (11.4.2) sabemos que $\frac{AM}{AN} = \frac{AP}{BP} = \lambda$, luego el punto M es independiente de P.

De la misma manera, aplicando el Teorema de la bisectriz exterior (11.4.3) deducimos que el punto M es independiente de P.

Además, por 3.10.5, $\angle MPN = 90^{\circ}$, y por tanto concluimos que el punto P pertenece a la circunferencia de diámetro $\overline{MN}$.

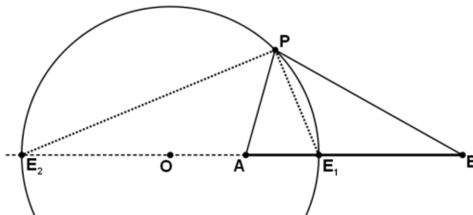
Recíprocamente, se comprueba que todo punto la circunferencia de centro O y radio $\sqrt{OA \cdot OB}$ satisface $\frac{PA}{PB} = \lambda$.

Observación 1. La igualdad $r^2 = OA \cdot OB$ será estudiada con detalle en el tema 13, cuando introduzcamos el concepto de inversión y puntos inversos.

Observación 2. Si $\lambda = 1$ la circunferencia de Apolonio degenera en la recta mediatriz del segmento AB.

Nota histórica. Se atribuye al matemático griego **Apolonio de Perga** (circa 262AC-190AC), esta caracterización alternativa de una circunferencia. Mediante ella, la circunferencia deja de estar determinada como "los puntos equidistantes a un centro dado", y para pasar a estar determinada como el lugar geométrico de aquellos puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos (llamados "focos") es constante.

11.12.2 Proposición.
Sean E_1 y E_2 los dos puntos de corte entre la recta AB y la circunferencia de Apolonio asociada a los puntos A y B. Supongamos que E_1 está en el interior del segmento $\overline{AB}$ y E_2 está en su exterior. Entonces E_1P es la bisectriz interior del ángulo $\angle A$ y E_2P es la su bisectriz exterior.
Luego $\angle E_1PE_2 = 90^{\circ}$ y por tanto E_1E_2 es un diámetro de la circunferencia de Apolonio.



Demostración. Puesto que E_1 pertenece a la circunferencia de Apolonio asociada a los puntos A y B se cumplirá $\frac{AE_1}{E_1B} = \frac{AP}{PB}$, que es precisamente la caracterización del Teorema de la bisectriz interior (11.4.2).

11.12.3 Definición. Las circunferencias de Apolonio asociadas a un triángulo.
Dado un ΔABC, se define la **A-circunferencia de Apolonio** asociada al triángulo como el lugar geométrico de los puntos P tales que

$$\frac{PB}{PC} = \frac{c}{b}$$

Y de la misma forma, la **B-circunferencia de Apolonio** asociada al triángulo como el lugar geométrico de los puntos P tales que

$$\frac{PA}{PC} = \frac{c}{a}$$

Y la **C-circunferencia de Apolonio** asociada al triángulo como el lugar geométrico de los puntos P tales que

$$\frac{PA}{PB} = \frac{b}{a}$$

donde $a = \left|\overline{BC}\right|$, $b = \left|\overline{AC}\right|$ y $c = \left|\overline{AB}\right|$ son los tres lados del triángulo. Son casos particulares de 11.12.1 y por tanto son circunferencias.

Observación. Está claro que el vértice A pertenece a la A-circunferencia, el vértice B pertenece a la B-circunferencia y el vértice C pertenece a la C-circunferencia de Apolonio.

11.12.4 Proposición.
La A-circunferencia de Apolonio del triángulo pasa por los puntos E_1 y E_2 intersección del lado BC con las bisectrices interna y externa del ángulo $\angle A$. De hecho, puesto que $\angle E_1AE_2$ es recto, el centro es el punto medio entre E_1 y E_2.
Demostración. Aplicar 11.12.2.

11.12.5 Proposición. Los puntos isodinámicos de un triángulo.
Las tres circunferencias de Apolonio asociadas a un triángulo se cortan en dos puntos del plano llamados puntos isodinámicos del triángulo.

Demostración. Sean I_1 e I_2 los dos puntos de corte entre la A-circunferencia y la B-circunferencia de Apolonio. (Queda por demostrar que efectivamente se cortan en dos puntos).
Tenemos que $\frac{I_1B}{I_1C}=\frac{c}{b}$, $\frac{I_2B}{I_2C}=\frac{c}{b}$, $\frac{I_1A}{I_1C}=\frac{c}{a}$, $\frac{I_2A}{I_2C}=\frac{c}{a}$, y por tanto

$$\frac{I_1A}{I_1B}=\frac{I_1A}{I_1C}\cdot\frac{I_1C}{I_1B}=\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{c}=\frac{b}{a} \text{ y } \frac{I_2A}{I_2B}=\frac{I_2A}{I_2C}\cdot\frac{I_2C}{I_2B}=\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{c}=\frac{b}{a}$$

Luego I_1 e I_2 también pertenecen a la C-circunferencia de Apolonio, es decir, las tres circunferencias de Apolonio asociadas a un triángulo pasan por los dos puntos del plano I_1 e I_2, que se denominan "puntos isodinámicos" del triángulo ΔABC. O dicho de otra manera, las tres circunferencias de Apolonio son coaxiales.

Observación. Los puntos I_1 e I_2 están catalogados como X_{15} y X_{16} en la ETC (ver capítulo 18). Sus coordenadas baricéntricas son:

$$X_{15}=\left(a\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right):b\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right):c\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$X_{16}=\left(a\sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right):b\sin\left(B-\frac{\pi}{3}\right):c\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

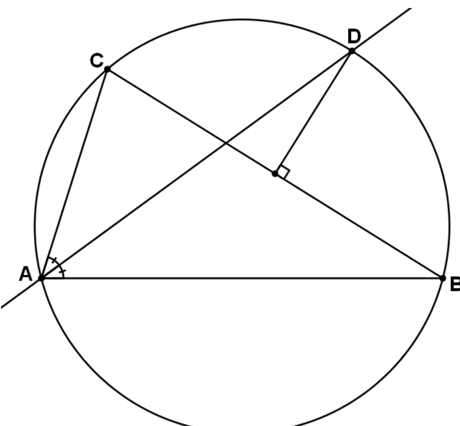
Fuente: Ercole Suppa en el documento "Trianguloscabri557_suppa.pdf"

Observación. X_{16} no está definido si ΔABC es un triángulo.

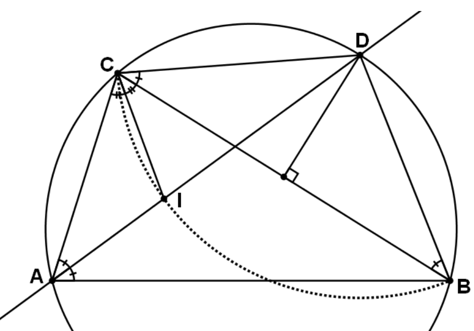
Ejercicio Propuesto: Ejercicio #26 de **[Prob3]**.

11.13 Teorema del Tridente y Teorema del Incentro-Excentro.

11.13.1 Teorema. El teorema del Tridente.
Sea un triángulo ΔABC y sea ϖ su circunferencia circunscrita.
a) El punto de corte D entre la bisectriz de $\angle A$ y ϖ ($D \neq A$) pasa por la mediatriz del lado opuesto $\overline{BC}$.



b) Sea I el incentro del triángulo ΔABC. El punto D equidista de I, C y B: $DI = DC = DB$, y recíprocamente, si el punto I' cumple $DI' = CD = BD$, entonces I' es el incentro.



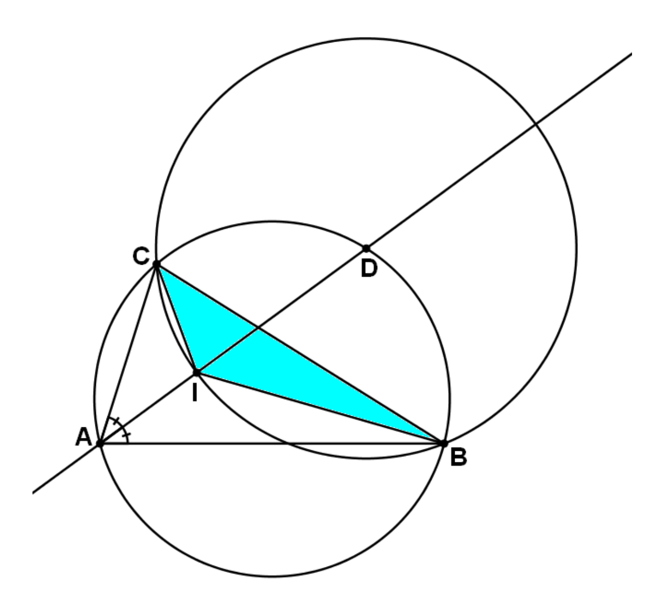
Demostración.
a) Por ser ángulos que abarcan un mismo arco, $\angle CBD = \angle CAD = \angle A/2$, y $\angle BCD = \angle BAD = \angle A/2$, luego ΔCDB es isósceles en D.
Por ser isósceles en D, la altura de este triángulo por D coincide con la mediatriz de $\overline{BC}$, es decir, que el punto D pertenece a la mediatriz de $\overline{BC}$.
b)
$\angle DIC = 180 - \angle AIC = 180 - (180 - \angle CAI - \angle ACI) =$

$\angle CAI + \angle ACI = \angle A/2 + \angle ICB = \angle BCD + \angle ICB = \angle ICD$
Luego ΔCDI también es isósceles en D y por tanto $DI = CD = BD$.
Para demostrar el recíproco tenemos que $\angle CDI' = \angle CDA = \angle CBA = \angle B$ por ser ángulos que abarcan el mismo arco.
$CD = DI' \Rightarrow \angle I'CD = \angle CI'D \Rightarrow 2\angle I'CD + \angle B = 180 \Rightarrow 2(\angle I'CB + \angle A/2) + \angle B = 180 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(\angle I'CB + \angle A/2) + \angle B = 180 \Rightarrow 2\angle I'CB + \angle A + \angle B = 180$

$\Rightarrow 2\angle I'CB = 180 - \angle A - \angle B \Rightarrow 2\angle I'CB = \angle C \Rightarrow \angle I'CB = \angle C/2$
Y por lo tanto I' es el punto de corte de dos bisectrices, es decir, es el incentro del triángulo.

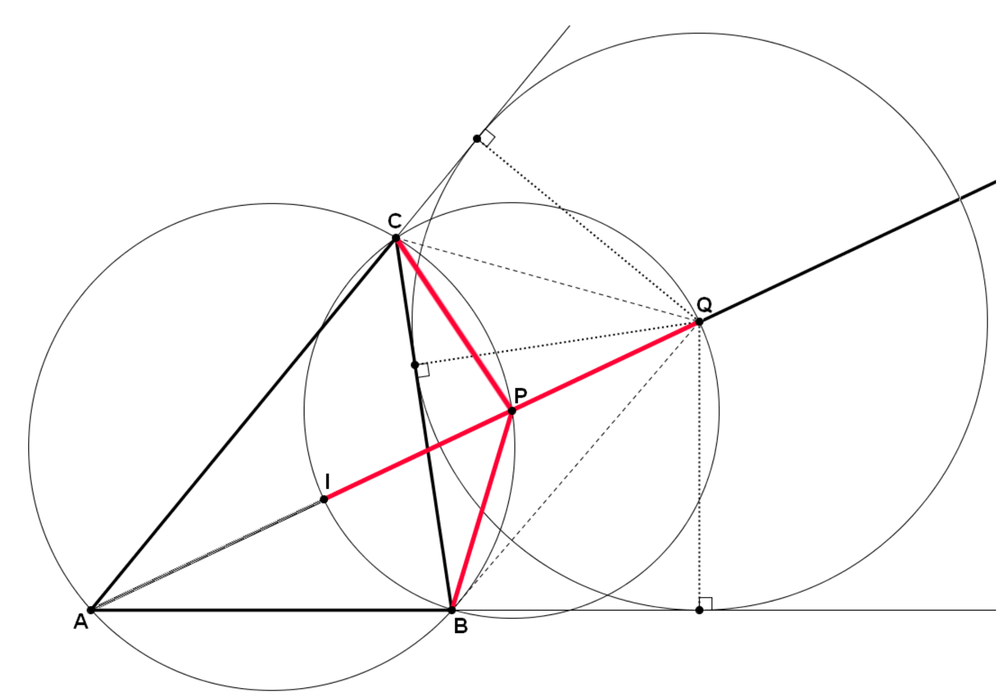
11.13.2 Corolario.
Sea un triángulo ΔABC y I su incentro. El punto D de corte entre AI y la circunferencia circunscrita ($D \neq A$) es el circuncentro del triángulo ΔBIC.



Demostración. Puesto que ΔCDI es isósceles en D, la mediatriz de CI pasa por D, y por el mismo motivo la mediatriz de BI también pasa por D. Luego D es el punto de corte de las mediatrices de CI y BI, que es, por definición, el circuncentro del triángulo ΔBIC.

11.13.3 Teorema. El Teorema del Incentro-Excentro.
Dado un triángulo ΔABC, sea I su incentro, y P el punto de corte la bisectriz AI y la circunferencia circunscrita ($P \neq A$). En 11.13.2 hemos visto que P es el circuncentro de la circunferencia circunscrita de ΔBCI. Además, el excentro Q de la circunferencia A-excrita también pertenece a la bisectriz AI, y cumple $IP = PQ$, es decir,

$$PC = PI = PB = PQ$$



Demostración. En 11.13.1 y 11.13.2 hemos visto la primera parte.
El excentro Q de la circunferencia A-excrita es la intersección de las dos bisectrices externas por C y por B. Sabemos que estas dos bisectrices son perpendiculares a las bisectrices internas del triángulo CI y BI, respectivamente (3.10.5).
También está visto (Observación 1 de 11.11.1) que el punto Q pertenece a la bisectriz interna AI.

$\angle ICQ = 90$, $\angle ICB = \angle C/2$, $\angle BCP = \angle PAB = \angle A/2$, luego

$$\angle PCQ = \angle ICQ - \angle ICB - \angle BCP = 90 - \angle C/2 - \angle A/2 = \frac{180 - \angle C - \angle A}{2} = \frac{\angle B}{2}$$

Pero por otro lado, $\angle CQP = \angle CQI = \angle IBC = \dfrac{\angle B}{2}$

Es decir, el triángulo ΔCPQ es isósceles en P, y por tanto $CP = PQ$.
Con un razonamiento similar llegamos a $PQ = PB$, y puesto que $CP = BP$, tenemos que $PI = PC = PB = PQ$

Nota. Los problemas #6 al #15 de [Prob4] están todos ellos dedicados a aplicar los resultados presentados en esta sección.

11.14 Relaciones entre centros.

11.14.1 Proposición. Relación entre inradio y circunradio.
Dado un triángulo ΔABC , sea r su inradio, R su circunradio y s su semiperímetro. Se cumple:

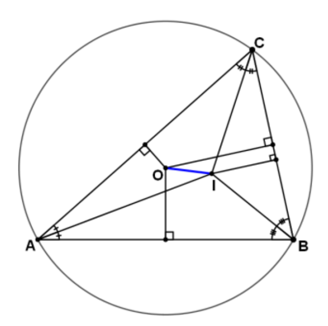
$$4r\,R\,s = abc$$

Demostración. Por 11.4.7 sabemos que $[\Delta ABC] = r \cdot s$, y por 11.6.4 sabemos que $[\Delta ABC] = \frac{abc}{4R}$, luego $r \cdot s = \frac{abc}{4R}$

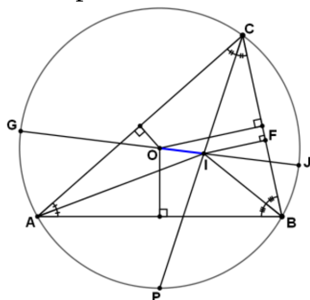
11.14.2 Proposición. Fórmula de Euler para triángulos.
Dado un triángulo ΔABC , sea O el circuncentro, I el incentro, r el inradio y R el circunradio. Se cumple:

$$OI^2 = R(R - 2r)$$

Y como corolario evidente tenemos que $R \geq 2r$



Demostración. Sea P el otro punto de corte entre la recta CI y el circuncírculo.
Extendemos el segmento OI hasta cortar el circuncírculo en los puntos G y J.
Sea F el pie de la perpendicular a BC por I.



Tenemos que $OG = OJ = R$ y $IF = r$. Por 10.1.5, $GI \cdot IJ = IP \cdot IC$.
Por 11.13.1 se cumple $IP = PB$
Aplicando el Teorema del Seno en ΔCBP , $\frac{PB}{\sin(\angle C/2)} = 2R \Rightarrow PB = 2R\sin(\angle C/2)$
Por otro lado, $\sin(\angle C/2) = \frac{IF}{IC} \Rightarrow IF = IC\sin(\angle C/2)$, por lo tanto
Luego $GI \cdot IJ = IP \cdot IC = PB \cdot IC = 2R \cdot IC \cdot \sin(\angle C/2) = 2R \cdot IF = 2Rr$
Por otro lado, se cumple $GI = GO + OI = R + OI$,
luego $GI \cdot IJ = (R + OI)(R - OI) = R^2 - OI^2$
Finalmente, $R^2 - OI^2 = 2Rr \Rightarrow R^2 - 2Rr = OI^2$

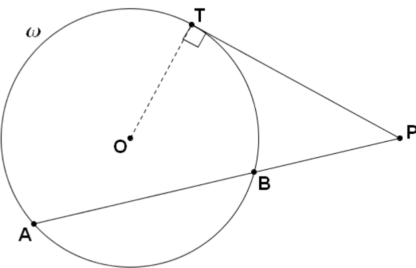
11.15 Potencia de un punto, eje radical y centro radical.

11.15.1 Definición. Potencia de un punto respecto a una circunferencia.
Se define la potencia de un punto P respecto a una circunferencia ϖ de radio r como

$$p(P,\varpi) = PO^2 - r^2$$

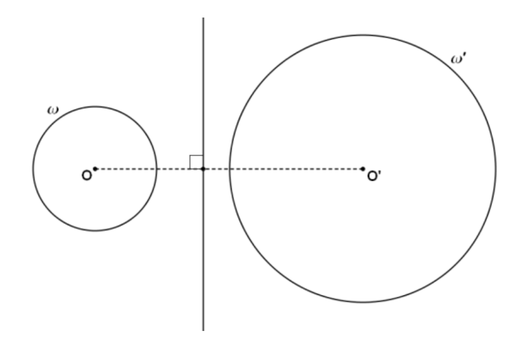
Por lo tanto, la potencia será positiva si el punto P es externo a la circunferencia, negativa si es un punto interno y cero si se encuentra en la propia circunferencia.

11.15.2 Proposición.
a) $|p(P,\varpi)| = PA \cdot PB$ donde A y B son los puntos de corte de cualquier secante a la circunferencia ϖ que pase por P.
b) Si P es externo a la circunferencia, $p(P,\varpi) = PT^2$ donde T es el punto de corte entre ϖ y su tangente por P.



Demostración. Es una relectura del teorema 10.1.12.

11.15.3 Proposición. Eje radical de dos circunferencias.
Dadas dos circunferencias, definimos su **eje radical** como el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto a ambas. El eje radical de dos circunferencias no concéntricas es una recta perpendicular a la recta que une los dos centros.



Demostración. Sean O y O' los centros de dos circunferencias ϖ y ϖ' no concéntricas, y sean r y r' sus respectivos radios. En primer lugar, supongamos que un punto P pertenece a la recta OO' y que tiene igual potencia respecto a ambas circunferencias.

$$p(P,\varpi) = p(P,\varpi') \Leftrightarrow PO^2 - r^2 = PO'^2 - r'^2 \Leftrightarrow (OO' - PO')^2 - r^2 = PO'^2 - r'^2 \Leftrightarrow$$

$$OO'^2 - 2OO' \cdot PO' + PO'^2 - r^2 = PO'^2 - r'^2 \Leftrightarrow OO'^2 - 2OO' \cdot PO' - r^2 = -r'^2 \Leftrightarrow$$

$$OO'^2 + r'^2 - r^2 = 2PO' \Leftrightarrow PO' = \frac{OO'^2 + r'^2 - r^2}{2OO'}$$

Esto demuestra que hay un único punto P en la recta OO' con igual potencia respecto a ambas circunferencias. Sea r la recta perpendicular a OO' por P.
Si A es cualquier punto de r, aplicando Pitágoras tenemos

$$\left.\begin{array}{l} AO^2 - PO^2 = AP^2 \\ AO'^2 - PO'^2 = AP^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AO^2 - PO^2 = AO'^2 - PO'^2 \Rightarrow AO^2 - AO'^2 = PO^2 - PO'^2$$

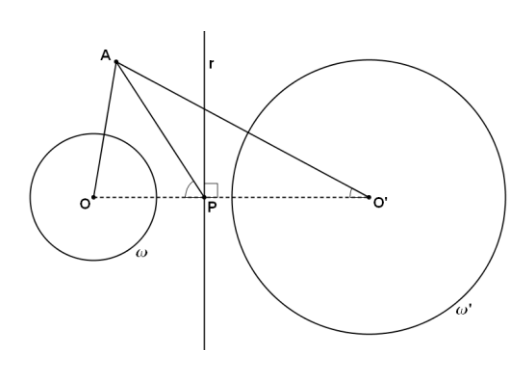
Pero por ser la potencia de P la misma con respecto a ambas circunferencias tenemos que $PO^2 - r^2 = PO'^2 - r'^2 \Rightarrow PO^2 - PO'^2 = r^2 - r'^2$

Y por lo tanto $AO^2 - AO'^2 = PO^2 - PO'^2 = r^2 - r'^2 \Rightarrow AO^2 - r^2 = AO'^2 - r'^2$

Lo cual significa que la potencia del punto A con respecto a ambas circunferencias es la misma.

Supongamos ahora que el punto A no está en la recta r, y supongamos que su potencia con respecto a ambas circunferencias es la misma.

Si por ejemplo A está del mismo lado de r que O, por ser $\angle OPA$ agudo y $\angle O'PA$ obtuso se cumplen las siguientes desigualdades:
$PO^2 + PA^2 > OA^2$ y $AO'^2 > AP^2 + PO'^2$



Luego

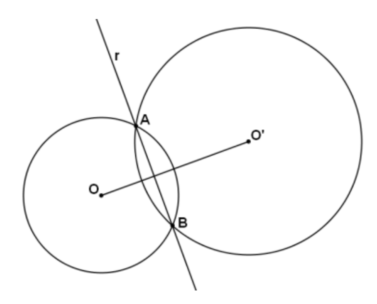
$$PO^2 + PA^2 + AO'^2 > OA^2 + AP^2 + PO'^2 \Rightarrow PO^2 + AO'^2 > OA^2 + PO'^2 \Rightarrow$$
$$PO^2 - PO'^2 > OA^2 - AO'^2$$

Pero como suponemos que P y A tienen la misma potencia respecto a ambas circunferencias,

$$\left.\begin{array}{l} p(A,\varpi) = p(A,\varpi') \Leftrightarrow AO^2 - r^2 = AO'^2 - r'^2 \Leftrightarrow AO^2 - AO'^2 = r^2 - r'^2 \\ p(P,\varpi) = p(P,\varpi') \Leftrightarrow PO^2 - r^2 = PO'^2 - r'^2 \Leftrightarrow PO^2 - PO'^2 = r^2 - r'^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$AO^2 - AO'^2 = PO^2 - PO'^2$$

Llegando a contradicción. Luego los puntos que no pertenecen a r no pueden tener la misma potencia respecto a ambas circunferencias.

11.15.4 Proposición. Eje radical de dos circunferencias secantes.
Si dos circunferencias se cortan en dos puntos, los puntos de corte pertenecen a su eje radical, y por tanto el eje radical es la recta que pasa por dichos puntos de corte.

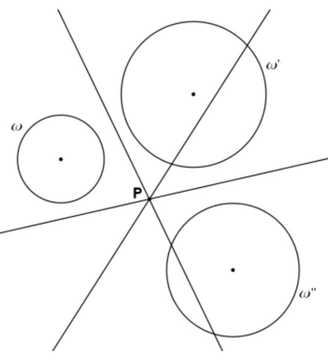


Demostración.

$$\left.\begin{array}{l} A \in \varpi \Rightarrow p(A,\varpi) = 0 \\ A \in \varpi' \Rightarrow p(A,\varpi') = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p(A,\varpi) = p(A,\varpi')$$

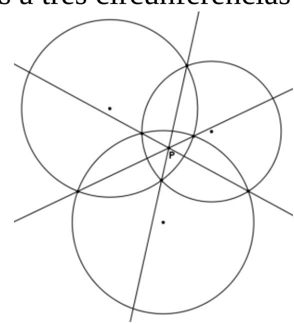
Y de la misma manera se demuestra que B pertenece al eje radical de las circunferencias.

11.15.5 Proposición. Centro radical de tres circunferencias.
Dadas tres circunferencias, sus ejes radicales son concurrentes. El punto común se llama **centro radical** de las tres circunferencias y tiene igual potencia respecto a cada una de ellas.



Demostración. Sea P el punto de corte entre el eje radical de ϖ y ϖ', y el eje radical de ϖ' y ϖ''. Entonces $p(P,\varpi) = p(P,\varpi')$ y $p(P,\varpi') = p(P,\varpi'')$, y por tanto $p(P,\varpi) = p(P,\varpi'')$, de lo que se deduce que P pertenece también al eje radical de ϖ y ϖ'', es decir, los tres ejes son concurrentes.

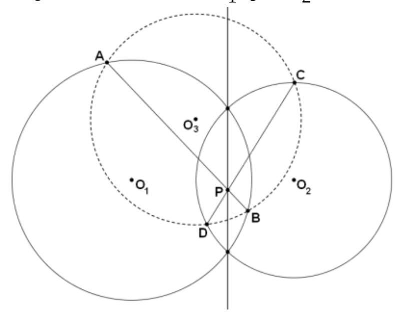
11.15.6 Corolario.
Las tres rectas secantes dos a dos a tres circunferencias dadas son concurrentes.



Demostración. Basta aplicar 11.15.4 y 11.15.3 pues son los tres ejes radicales de las circunferencias dadas.

11.15.7 Corolario.
Dadas dos circunferencias secantes ϖ_1 y ϖ_2 con centros respectivos O_1 y O_2, sean $A, B \in \varpi_1$ y $C, D \in \varpi_2$. Son equivalentes:

a) Los puntos A, B, C, D pertenecen a una misma circunferencia cuyo centro O_3 no pertenece a la recta O_1O_2.
b) $P = AB \cap CD$ pertenece al eje radical de ϖ_1 y ϖ_2.



Demostración. $a) \Rightarrow b)$ se deduce directamente de 11.15.6.
$b) \Rightarrow a)$ $|PA \cdot PB| = p(P, \varpi_1) = p(P, \varpi_2) = |PC \cdot PD| \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$, entendiendo esta última igualdad como magnitudes sin signo.
Además, P pertenece al interior de $\overline{AB}$ si y solo si $p(P, \varpi_1) < 0$, y P pertenece al interior de $\overline{CD}$ si y solo si $p(P, \varpi_2) < 0$, luego la condición $p(P, \varpi_1) = p(P, \varpi_2)$ garantiza que, o bien P pertenece a los interiores de ambos segmentos,o bien no pertenece a ninguno de los dos.
Con todo lo anterior hemos comprobado que estamos en condiciones de aplicar el recíproco del Teorema de la Potencia de un punto interior (10.1.5), de donde se deduce que los puntos A, B, C y D son cocíclicos.
Los puntos O_1, O_2 y O_3 no son colineales puesto que AB y CD no son paralelas.

Problemas propuestos.
Los ejercicios #19 a #22 de **[Prob4]** están todos dedicados a practicar los conceptos de esta sección.

El problema #24 de **[Prob5]** es una interesante aplicación de la potencia y los ejes radicales a la resolución de un problema IMO.

12 Razón doble. Resultados proyectivos.

La geometría aún posee todas esas virtudes que los educadores les atribuían hace una generación. Todavía hay geometría en la naturaleza esperando ser reconocida y apreciada. La geometría (sobre todo la geometría proyectiva) sigue siendo una excelente manera para introducir a los estudiantes en la axiomática. Aún posee el atractivo estético que siempre ha tenido, y la belleza de sus resultados no ha disminuido. Por otra parte, es aún más útil y necesaria para el científico y el matemático de lo que ha sido nunca. Consideremos, por ejemplo, las formas de las órbitas de los satélites artificiales y la geometría de cuatro dimensiones del continuo espacio-tiempo.
Geometry Revisited, (H.S.M. Coxeter y S.L. Greitzer, 1967)

12.1 La razón doble de cuatro puntos.

12.1.1 Definición. Razón doble de cuatro puntos.

Dados cuatro puntos A,B,C,D, con $B \neq C$ y $A \neq D$, definimos su **razón doble** por:

$$(A,B;C,D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \div \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}$$

Consideramos longitudes de segmentos con signo: $\overline{BA} = -\overline{AB}$ (ver 11.1), por lo que la razón doble puede ser un número negativo.

La razón doble se llama en alemán "**Doppelverhältnis**", es decir, "razón de razones".

Nota. Sobre la interpretación geométrica de la razón doble.
La razón doble es un concepto realmente difícil. Es este sentido es balsámico leer las palabras de **Robin Hartshorne** en su libro "Geometry Euclid and Beyond" (página 341, la traducción es mía)

"...Llegado a este punto alguien me podría preguntar cuál es la interpretación geométrica de la razón doble. Aunque yo trabajé por primera vez con la razón doble con algunos alumnos aventajados en el bachillerato y he trabajado con este concepto muchas veces desde entonces, debo decir con franqueza que no soy capaz de visualizar geométricamente la razón doble. Podríamos decir que es algo mágico, que es un resultado algebraico cuyo significado es imposible de entender pero que resulta muy útil. Es algo que funciona. Se podría decir que fue un triunfo del álgebra el inventar este valor numérico que resultó tan valioso y que no hubiera sido posible imaginarlo geométricamente. O si tienes vocación de geómetra, puedes decir, si quieres, que es un invento del diablo y odiarlo a muerte.
Dejadme decir algunas palabras en defensa de la pobre razón doble. En el presente contexto de las transformaciones en el plano euclídeo, tenemos los movimientos rígidos, que conservan la distancia. Después vienen las homotecias, que no conservan la distancia pero sí conservan las razones. Finalmente están las inversiones, que no conservan las distancias ni las razones. Puesto que estas últimas sí conservan la razón doble, esta particular razón de razones resulta ser lo mejor que podemos obtener. Es algo estable cuando las distancias y las razones varían a nuestro alrededor.
En la sección 39C [22.2.2 en este libro] usaremos la razón doble para definir el concepto de distancia en el modelo Poincaré de una geometría no euclídea. En ese contexto, la razón doble tendrá un papel principal. En geometría proyectiva la razón doble también es importante. Una proyectividad entre dos rectas se define [12.2.4] como una composición de un número finito de proyecciones entre dos rectas. Una proyectividad no preserva distancias ni razones de distancias, pero sí preserva las razones dobles [12.2.3]. De hecho, un teorema fundamental de la geometría proyectiva afirma que una transformación entre dos rectas en el plano proyectivo es una proyectividad si y sólo si preserva la razón doble para todo conjunto de cuatro puntos diferentes de la recta..."

Nota histórica. [Boyer] atribuye al matemático francés **Michael Chasles** (1793-1880) ser el precursor de la razón doble, llamada en aquella época "razón anarmónica". En su *Traité de géométrie supérieure* (1852) se establece, además, el uso de segmentos orientados en la geometría pura. Chasles fue uno de los últimos grandes geómetras proyectivos franceses, y fue principalmente en Alemania donde su obra se vio continuada por matemáticos tales como **Steiner** y **Von Staudt**.

12.1.2 Proposición. Las permutaciones de la razón doble.
Dados cuatro puntos A, B, C y D,
a) $(A,B;C,D)=(B,A;D,C)=(C,D;A,B)=(D,C;B,A)=\lambda$
b) $(A,B;D,C)=1/\lambda$
c) $(A,C;B,D)=1-\lambda$
d) El resto de permutaciones son consecuencia de las tres anteriores.

Por lo tanto, las 24 posibles permutaciones de los cuatro puntos involucrados en una razón doble se reducen a seis posibles valores diferentes:

$$\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad 1-\lambda, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

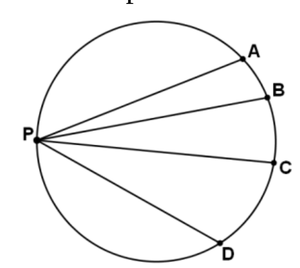
12.1.3 Proposición.
Si A,B,C,D,D' están alineados y $(A,B;C,D)=(A,B;C,D')$ entonces $D=D'$.

Demostración.

$$(A,B;C,D)=(A,B;C,D') \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD'}}{\overline{BC}\cdot\overline{AD'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BD'}}{\overline{AD'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{BD'}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AD'}}$$
$$\Leftrightarrow D=D'$$

En donde hemos aplicado 11.1.5b.

12.1.4 Proposición. Razón doble de cuatro puntos cocíclicos.
Si A,B,C,D,P son cinco puntos cocíclicos y diferentes, entonces



$$(A,B;C,D)=\frac{\sin\angle APC\cdot\sin\angle BPD}{\sin\angle BPC\cdot\sin\angle APD}$$

Y por tanto la expresión de la derecha no depende del punto P que tomemos.

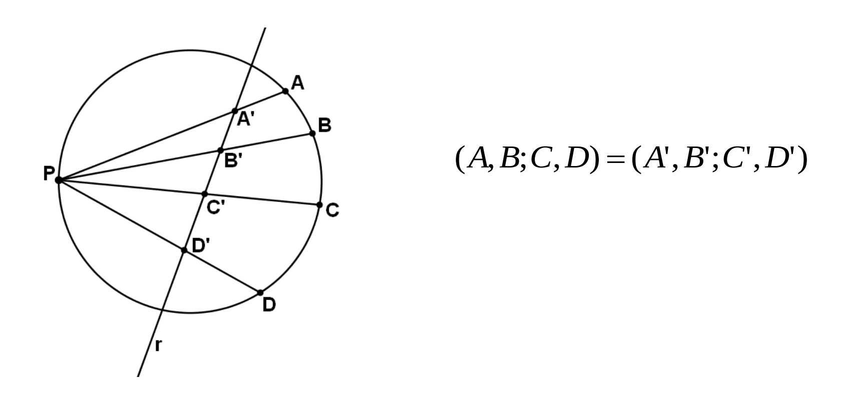
Demostración. Basta aplicar el Teorema del seno (9.1.5). Si r es el radio de la circunferencia circunscrita a los cinco puntos, se tiene

$$\sin\angle APC=\frac{AC}{2r}, \sin\angle BPD=\frac{BD}{2r}, \sin\angle BPC=\frac{BC}{2r}, \sin\angle APD=\frac{AD}{2r}$$

Luego

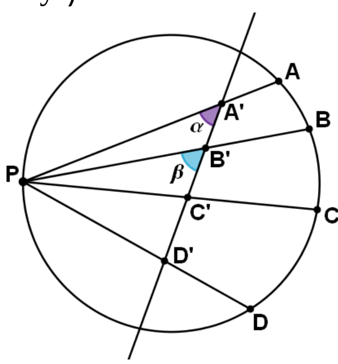
$$\frac{\sin\angle APC\cdot\sin\angle BPD}{\sin\angle BPC\cdot\sin\angle APD}=\frac{\frac{AC}{2r}\cdot\frac{BD}{2r}}{\frac{BC}{2r}\cdot\frac{AD}{2r}}=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}=(A,B;C,D)$$

12.1.5 Proposición.
Sean A,B,C,D,P cinco puntos diferentes pertenecientes a una misma circunferencia ϖ, y sea r una recta secante con ϖ. Sean A',B',C',D' los respectivos puntos de corte entre PA,PB,PC,PD y la recta r. Entonces:



$$(A,B;C,D)=(A',B';C',D')$$

Demostración. Sean $\alpha=\angle PA'C'$ y $\beta=\angle PB'D'$.



Aplicando el Teorema del Seno:

$$\frac{PC'}{\sin\alpha}=\frac{A'C'}{\sin\angle A'PC'}\Rightarrow A'C'=\frac{PC'\sin\angle A'PC'}{\sin\alpha}$$

$$\frac{PD'}{\sin\alpha}=\frac{A'D'}{\sin\angle A'PD'}\Rightarrow A'D'=\frac{PD'\sin\angle A'PD'}{\sin\alpha}$$

$$\frac{PD'}{\sin\beta}=\frac{B'D'}{\sin\angle B'PD'}\Rightarrow B'D'=\frac{PD'\sin\angle B'PD'}{\sin\beta}$$

$$\frac{PC'}{\sin\beta}=\frac{B'C'}{\sin\angle B'PC'}\Rightarrow B'C'=\frac{PC'\sin\angle B'PC'}{\sin\beta}$$

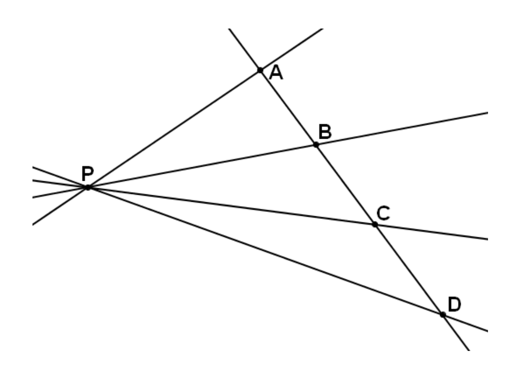
Y por tanto:

$$(A',B';C',D')=\frac{A'C'\cdot B'D'}{A'D'\cdot B'C'}=\frac{\frac{PC'\sin\angle A'PC'}{\sin\alpha}\cdot\frac{PD'\sin\angle B'PD'}{\sin\beta}}{\frac{PD'\sin\angle A'PD'}{\sin\alpha}\cdot\frac{PC'\sin\angle B'PC'}{\sin\beta}}=$$

$$=\frac{\sin\angle A'PC'\cdot\sin\angle B'PD'}{\sin\angle A'PD'\cdot\sin\angle B'PC'}=\frac{\sin\angle APC\cdot\sin\angle BPD}{\sin\angle APD\cdot\sin\angle BPC}=(A,B;C,D)$$

En donde hemos aplicado la proposición anterior.

12.1.6 Teorema. Expresión trigonométrica de la razón doble de puntos alineados.
Dados cuatro puntos alineados A,B,C,D, y un punto P externo a la recta que determinan, tenemos:



$$(A,B;C,D)=\frac{\sin\angle APC\cdot\sin\angle BPD}{\sin\angle BPC\cdot\sin\angle APD}$$

Y por lo tanto la expresión de la derecha no depende del punto P que tomemos.

Demostración. Aplicamos el Teorema del Seno cuatro veces:

$$\frac{AC}{\sin\angle APC}=\frac{PA}{\sin\angle ACP}\Rightarrow AC=\frac{PA\sin\angle APC}{\sin\angle ACP}$$

$$\frac{BC}{\sin\angle BPC}=\frac{PB}{\sin\angle BCP}\Rightarrow BC=\frac{PB\sin\angle BPC}{\sin\angle BCP}$$

$$\frac{AD}{\sin\angle APD}=\frac{PA}{\sin\angle ADP}\Rightarrow AD=\frac{PA\sin\angle APD}{\sin\angle ADP}$$

$$\frac{BD}{\sin\angle BPD}=\frac{PB}{\sin\angle BDP}\Rightarrow BD=\frac{PB\sin\angle BPD}{\sin\angle BDP}$$

$$(A,B;C,D)=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}=\frac{\dfrac{PA\sin\angle APC}{\sin\angle ACP}\cdot\dfrac{PB\sin\angle BPD}{\sin\angle BDP}}{\dfrac{PB\sin\angle BPC}{\sin\angle BCP}\cdot\dfrac{PA\sin\angle APD}{\sin\angle ADP}}=$$

$$=\frac{\sin\angle APC\cdot\sin\angle BPD}{\sin\angle BPC\cdot\sin\angle APD}$$

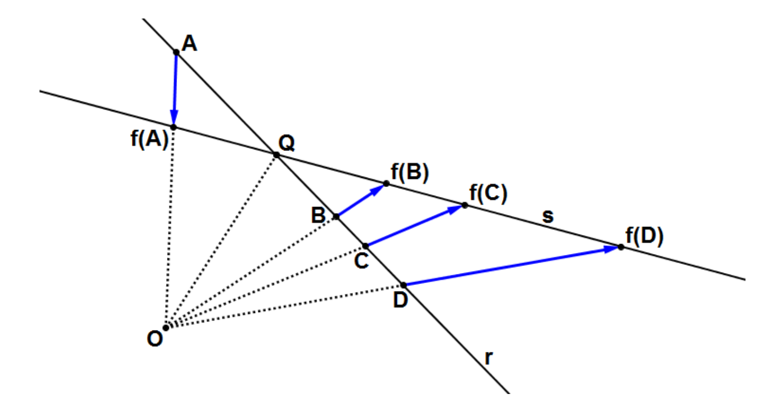
12.2 Perspectividades y proyectividades.

12.2.1 Definición. Perspectividad.
Sean r y s dos rectas del plano y O un punto exterior a ambas.

Para todo punto $P \in r$ definimos el punto $f(P) \in s$ como $\overleftrightarrow{OP} \cap s$. De esta manera definimos una función

$$f : r \to s$$
$$P \mapsto f(P) = \overleftrightarrow{OP} \cap s$$

llamada **perspectividad de centro O**.



Esta función es inyectiva, pues si $f(P) = f(P')$, entonces $\overleftrightarrow{Of(P)} = \overleftrightarrow{Of(P')}$ y por tanto $P = \overleftrightarrow{Of(P)} \cap r = \overleftrightarrow{Of(P')} \cap r = P'$.

Es suprayectiva, pues para cualquier $A \in s$, el punto $P = \overleftrightarrow{OA} \cap r$ cumplirá $f(P) = A$.
Luego tenemos una biyección entre r y s.
Esta función deja fijo el punto de corte Q entre r y s.

Una perspectividad entre las rectas r y s con centro O se denota con $r \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} s$, o $r \overset{=}{\wedge} s$.

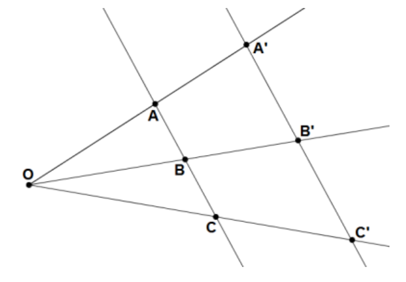
Normalmente una perspectividad viene fijada por cuatro puntos A, B, C, D y sus respectivas imágenes A', B', C', D', y se denotará por

$$(A, B, C, D) \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} (A', B', C', D')$$

La función inversa de una perspectividad es también una perspectividad con su mismo centro y la función identidad es una perspectividad, pero en general la composición de perspectividades no es una perspectividad.

12.2.2 Lema.
Sean $A*B*C$ tres puntos diferentes de una recta r, sea s una recta paralela a r y O un punto exterior a ambas. Sean A', B' y C' los puntos de corte de $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ y $\overleftrightarrow{OC}$ con la recta s. Entonces

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$



Demostración. Los triángulos ΔOAB y $\Delta OA'B'$ son semejantes pues están en posición de Tales, luego

$$\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'}$$

Los triángulos ΔOAC y $\Delta OA'C'$ son semejantes pues están en posición de Tales, luego

$$\frac{AC}{OA} = \frac{A'C'}{OA'} \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{OA}{OA'}$$

De las dos igualdades anteriores se deduce la igualdad buscada:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

12.2.3 Proposición.
Las perspectividades dejan invariante la razón doble.

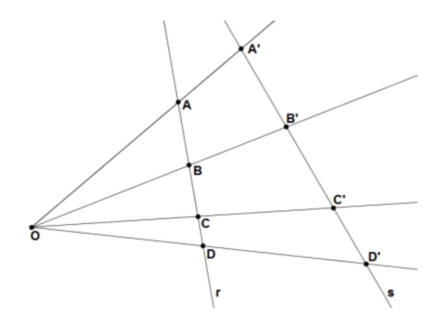
Demostración. En primer lugar vamos a verlo para el caso $r // s$. Sean A, B, C, D cuatro puntos de r y sean A', B', C', D' sus respectivas imágenes en la recta s por la proyección desde el punto O.

$(A,B;C,D) = \dfrac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \dfrac{AC}{BC} \cdot \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{A'C'}{B'C'} \cdot \dfrac{B'D'}{A'D'} = (A',B';C',D')$, puesto que

aplicando el lema anterior a los triángulos ΔOAC y $\Delta OA'C'$ tenemos $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A'C'}{B'C'}$,

y aplicando el lema anterior a los triángulos ΔOAD y $\Delta OA'D'$ tenemos $\frac{BD}{AD}=\frac{B'D'}{A'D'}$.

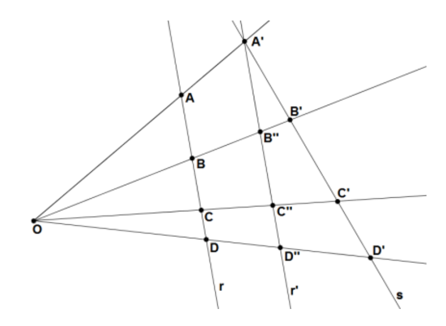
Supongamos ahora que r y s no son paralelas.



Trazamos la recta r' paralela a r por A'. Sean B'', C'', D'' los respectivos puntos de corte de r' con $\overleftrightarrow{OB}$, $\overleftrightarrow{OC}$ y $\overleftrightarrow{OD}$. Acabamos de ver que

$$(A,B;C,D)=(A',B'';C'',D'')$$

Luego sólo nos falta ver que $(A',B'';C'',D'')=(A,B';C',D')$.



Para ello aplicaremos el Teorema de Menelao (11.2.2) dos veces. La primera sobre el triángulo $\Delta A'B'B''$ con la transversal $\overleftrightarrow{C'C''}$:

$$\frac{A'C''}{C''B''}\cdot\frac{B''O}{OB'}\cdot\frac{B'C'}{C'A'}=-1$$

La segunda nuevamente sobre el triángulo $\Delta A'B'B''$ con la transversal $\overleftrightarrow{D'D''}$:

$$\frac{A'D''}{D''B''}\cdot\frac{B''O}{OB'}\cdot\frac{B'D'}{D'A'}=-1$$

De donde se deduce que

$$\frac{A'C''}{C''B''}\cdot\frac{B''O}{OB'}\cdot\frac{B'C'}{C'A'}=\frac{A'D''}{D''B''}\cdot\frac{B''O}{OB'}\cdot\frac{B'D'}{D'A'}\Rightarrow\frac{A'C''}{C''B''}\cdot\frac{B'C'}{C'A'}=\frac{A'D''}{D''B''}\cdot\frac{B'D'}{D'A'}$$

Reordenando sus elementos llegamos a la igualdad deseada:

$$\frac{A'C''}{C''B''}\cdot\frac{D''B''}{A'D''}=\frac{C'A'}{B'C'}\cdot\frac{B'D'}{D'A'}\Rightarrow\frac{A'C''}{B''C''}\cdot\frac{B''D''}{A'D''}=\frac{A'C'}{B'C'}\cdot\frac{B'D'}{A'D'}\Rightarrow$$

$$(A',B'';C'',D'')=(A',B',C',D')$$

Problemas propuestos:

El problema #38 de **[Prob1]** tiene una solución muy elegante mediante esta proposición, es la versión 3 de dicha solución.

El problema #39 de **[Prob1]** es una aplicación práctica de este resultado.

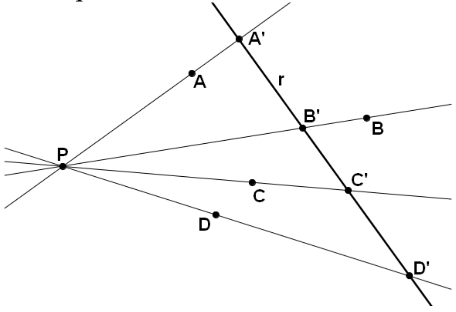
12.2.4 Definición. Proyectividad entre rectas.
Diremos que una función $f : r \to s$ es una proyectividad cuando sea una composición de un número finito de perspectividades, y se denotará por $r \overline{\wedge} s$.
Se comprueba fácilmente que toda proyectividad, por ser una composición de biyecciones, será siempre biyectiva.
La composición de proyectividades es siempre una proyectividad, la función inversa de una proyectividad es otra proyectividad (basta con tomar al revés la cadena de perspectividades) y la función identidad es una proyectividad.
Claramente las proyectividades conservan la razón doble, pues la conservan todas y cada una de las perspectividades que la conforman.

12.2.5 Proposición. Razón doble de un haz de cuatro rectas.
Con los resultados obtenidos anteriormente estamos en condiciones de definir la razón doble de un haz de cuatro rectas concurrentes en un mismo punto P, que denotaremos por $P(A,B,C,D) = (\overleftrightarrow{PA}, \overleftrightarrow{PB}, \overleftrightarrow{PC}, \overleftrightarrow{PD})$

Su razón doble será la razón doble de los cuatro puntos de corte con cualquier transversal r:

$$(PA, PB; PC, PD) = (A', B'; C', D')$$

Esta definición está bien construida pues acabamos de ver que la razón doble de dichos puntos no depende de la recta r que tomemos.



Y aplicando 12.1.6 llegamos a

$$(PA, PB; PC, PD) = (A', B'; C', D') = \frac{\sin\angle A'PC' \cdot \sin\angle B'PD'}{\sin\angle B'PC' \cdot \sin\angle A'PD'} = \frac{\sin\angle APC \cdot \sin\angle BPD}{\sin\angle BPC \cdot \sin\angle APD}$$

12.2.6 Proposición. El Teorema de la Mariposa.
El Teorema de la Mariposa (10.1.15) se puede demostrar mediante la invariancia de la razón doble bajo proyectividades y 12.1.5. Siguiendo con las definiciones de 10.1.15::

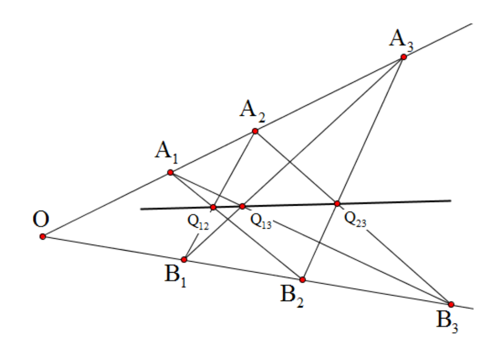
$$(P,Q;X,M) \overset{D}{\underset{\wedge}{=}} (P,Q;A,C) \overset{B}{\underset{\wedge}{=}} (P,Q;M;Y) \Rightarrow (P,Q;X,M) = (P,Q;M;Y)$$

Por otro lado, la reflexión con centro M preserva la razón de segmentos, y por tanto la razón doble, luego $(P,Q;X,M) = (Q,P,X',M)$
Y por tanto $(P,Q,M,Y) = (Q,P;X',M) = (P,Q;M,X') \Rightarrow X' = Y$

12.3 El Postulado de Pappus. Planos papianos.

12.3.1 Definición. Postulado de Pappus proyectivo. Planos papianos.

Sean dos rectas r y s que se cortan en un punto O.
Sean A_1, A_2, A_3 tres puntos diferentes de r, B_1, B_2, B_3 tres puntos diferentes de s, y todos diferentes de O.
Entonces los tres puntos $Q_{12} = \overleftrightarrow{A_1B_2} \cap \overleftrightarrow{A_2B_1}$, $Q_{23} = \overleftrightarrow{A_2B_3} \cap \overleftrightarrow{A_3B_2}$ y $Q_{13} = \overleftrightarrow{A_1B_3} \cap \overleftrightarrow{A_3B_1}$ están alineados. A dicha recta la llamaremos **Recta de Pappus**.

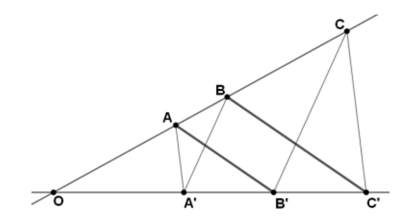


La Recta de Pappus no pasa necesariamente por el punto O.
Diremos que un plano es **papiano** si en él se cumple el Postulado de Pappus proyectivo.

Nota: Este postulado es hermano del **Teorema de Pascal** (ver 12.7.1)

12.3.2 Definición. Postulado de Pappus.

Sean tres puntos A, B y C en una recta y sean A', B' y C' otros tres puntos en otra recta diferente. Supongamos que ambas rectas se cortan en un punto que no es ninguno de los seis anteriores. Si $A'B // B'C$ y $AA' // CC'$ entonces $AB' // BC'$



12.3.3 Proposición.

Si se cumple el Postulado de Pappus proyectivo también se cumple el Postulado de Pappus.

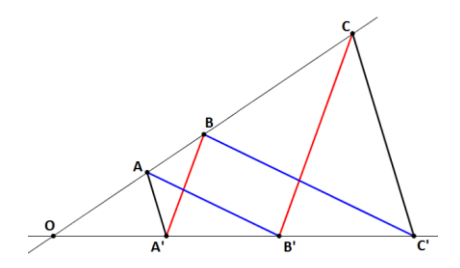
Demostración. Tomamos $A_1 = A$, $A_2 = B$ y $A_3 = C$, y para la otra recta reordenamos los puntos: $B_1 = C'$, $B_2 = B'$ y $B_3 = A'$.

$A'B // B'C \Leftrightarrow B_3A_2 // B_2A_3 \Leftrightarrow Q_{23} = B_3A_2 \cap B_2A_3 \in r_\infty$

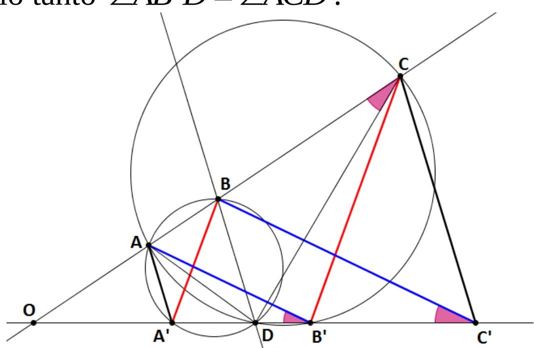
$AA' // CC' \Leftrightarrow A_1B_3 // A_3B_1 \Leftrightarrow Q_{13} = A_1B_3 \cap A_3B_1 \in r_\infty$

Ahora aplicamos el Postulado de Pappus proyectivo para deducir que entonces
$Q_{12} = A_1B_2 \cap A_2B_1 \in r_\infty$
Pero interpretando este resultado en términos de paralelismo:
$A_1B_2 \cap A_2B_1 \in r_\infty \Leftrightarrow A_1B_2 // A_2B_1 \Leftrightarrow AB' // BC'$

12.3.4 Proposición. Teorema de Pappus simplificado en un plano euclídeo.
Sean dos rectas que se cortan en un punto O. Sean A, B, C tres puntos en la primera recta y A', B', C' tres puntos de la segunda recta todos diferentes de O. Si los triángulos $\Delta OAA'$ y $\Delta OCC'$ son isósceles en O y $AB // B'C$, entonces $AB' // BC'$.



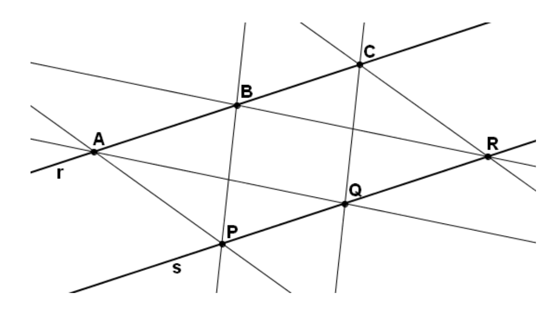
Demostración: Desde B trazamos una paralela a AA' que cortará OC' en un punto D. El cuadrilátero ABA'D es cíclico, pues $\angle ABD = \angle OA'A$ y por tanto $\angle AA'D$ y $\angle ABD$ son suplementarios.
Por lo tanto $\angle ADA' = \angle ABA'$ y puesto que $A'B // B'C$, tenemos $\angle ABA' = \angle ACB'$. Así pues, los ángulos $\angle ADC'$ y $\angle ACB'$ son suplementarios, y por tanto el cuadrilátero ACB'D es cíclico. Por lo tanto $\angle AB'D = \angle ACD$.



Pero $\angle ACD = \angle OCD = \angle OC'B$ puesto que los triángulos ΔOBD y ΔODC son congruentes (criterio SAS).
Así pues $\angle OB'A = \angle AB'D = \angle OC'B$ y por tanto $AB' // BC'$ como queríamos ver.

[Rothe]

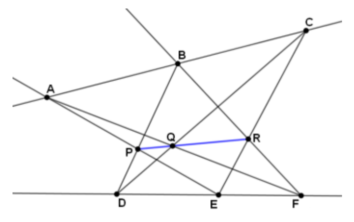
12.3.5 Teorema. Teorema menor de Pappus.
Dados tres puntos diferentes A, B, C sobre una recta r y tres puntos diferentes P, Q, R sobre una recta paralela s, si $AQ // BR$ y $AP // CR$ entonces $BP // CQ$



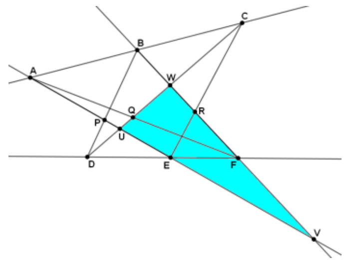
Demostración.
Es un caso particular de 12.3.2 cuando $O = r \cap s \in r_\infty$.
Entonces los puntos $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$, $Z = CB' \cap C'B$ están alineados.

12.3.6 Teorema.
Si se cumple el Teorema de Menelao se cumple el Postulado de Pappus. En particular, en un plano euclídeo se cumple el Postulado de Pappus.

Demostración. Sean dos rectas r y s que se cortan en un punto O.
Sean A, B y C tres puntos en r y D, E y F tres puntos en s, todos diferentes entre ellos y diferentes a O. Queremos ver que entonces los tres puntos $P = BD \cap AE$, $Q = AF \cap CD$ y $R = BF \cap CE$ están alineados.



Las rectas AE, BF y DC determinan un triángulo cuyos vértices son: $U = AE \cap DC$, $V = AE \cap BF$ y $W = DC \cap BF$.



Sobre este triángulo aplicaremos el Teorema de Menelao (11.2.2) cinco veces:
Recta DPB: $\frac{UD}{DW} \cdot \frac{WB}{BV} \cdot \frac{VP}{PU} = -1$, Recta AQF: $\frac{UQ}{QW} \cdot \frac{WF}{FV} \cdot \frac{VA}{AU} = -1$
Recta ERC: $\frac{UC}{CW} \cdot \frac{WR}{RV} \cdot \frac{VE}{EU} = -1$
Multiplicando las tres igualdades anteriores:

$$\frac{UD}{DW} \cdot \frac{WB}{BV} \cdot \frac{VP}{PU} \cdot \frac{UQ}{QW} \cdot \frac{WF}{FV} \cdot \frac{VA}{AU} \cdot \frac{UC}{CW} \cdot \frac{WR}{RV} \cdot \frac{VE}{EU} = (-1)^3 = -1 \qquad (1)$$

Recta ABC: $\frac{UC}{CW} \cdot \frac{WB}{BV} \cdot \frac{VA}{AU} = -1$, Recta DEF: $\frac{UD}{DW} \cdot \frac{WF}{FV} \cdot \frac{VE}{EU} = -1$

Multiplicando las dos igualdades anteriores:

$$\frac{UC}{CW} \cdot \frac{WB}{BV} \cdot \frac{VA}{AU} \cdot \frac{UD}{DW} \cdot \frac{WF}{FV} \cdot \frac{VE}{EU} = (-1)^2 = 1 \qquad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2), y simplificando términos llegamos fácilmente a:

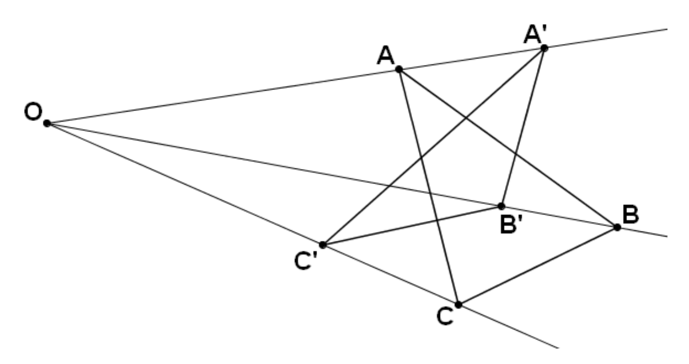
$$\frac{VP}{PU} \cdot \frac{UQ}{QW} \cdot \frac{WR}{RV} = (-1) \cdot 1 = -1$$

De donde, nuevamente por Menelao, deducimos que los puntos P, Q y R están alineados.

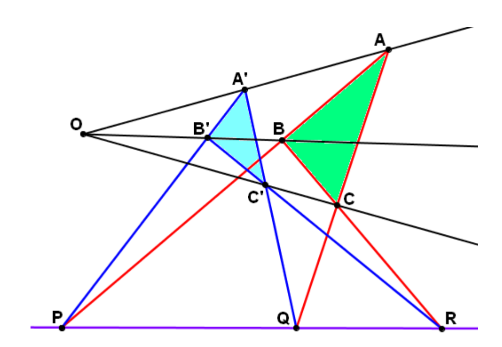
Observación: En el apartado 13.7 veremos que un plano cartesiano $P_2(K)$ cumple el Postulado de Pappus proyectivo si y sólo si K es conmutativo.

12.4 El Postulado de Desargues. Planos arguesianos.

12.4.1 Definición. Triángulos en perspectiva. Centro de perspectiva.
Diremos que dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ **están en perspectiva** cuando las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes en un punto O, al que llamaremos **centro de perspectiva**.



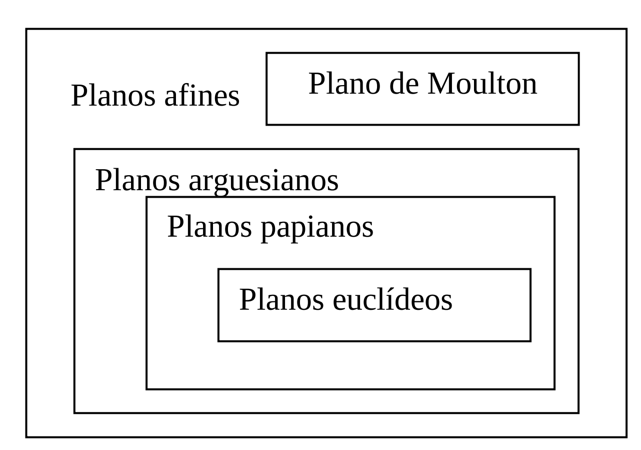
12.4.2 Definición. Postulado de Desargues. Planos arguesianos.
Dos triángulos ABC y A'B'C' tienen un centro de perspectiva O, es decir, las tres rectas AA', BB' y CC' pasan por un mismo punto O, si y sólo si tienen un eje de perspectiva, es decir, los puntos $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ y $R = BC \cap B'C'$ están alineados.



Un **plano arguesiano** es un plano en el que se cumple el Postulado de Desargues.

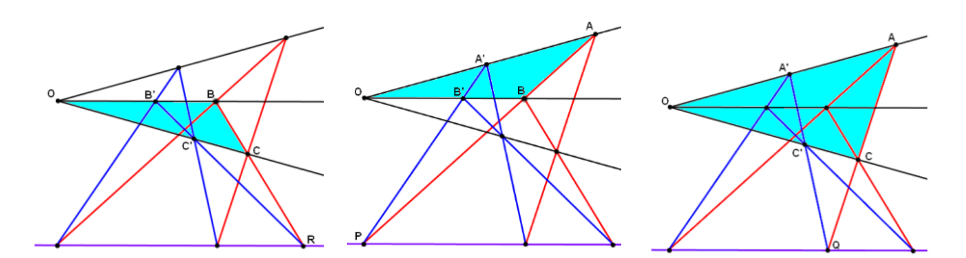
Nota histórica. Girard Desargues (1591-1661), matemático, arquitecto y ingeniero militar francés.

Esquema jerárquico.



12.4.3 Teorema.
Todo plano euclídeo es arguesiano.

Demostración. Aplicaremos varias veces el teorema de Menelao. Supongamos que los triángulos ABC y A’B’C’ están en perspectiva desde el punto O.



Aplicando el Teorema de Menelao al triángulo OBC y la recta B’C’R, tenemos que

$$\frac{CR}{RB}\cdot\frac{BB'}{B'O}\cdot\frac{OC'}{C'C}=-1$$

Aplicando el Teorema de Menelao al triángulo OAB y la recta A’B’P, tenemos que

$$\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{OB'}{B'B}=-1$$

Aplicando el Teorema de Menelao al triángulo OAC y la recta A’C’Q tenemos que

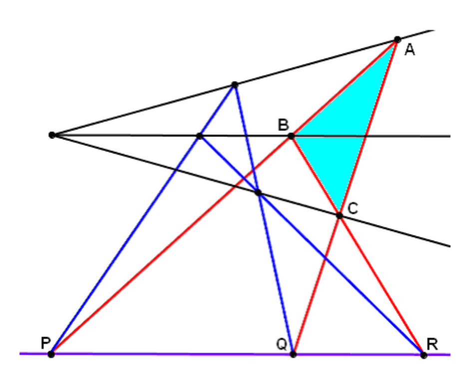
$$\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CC'}{C'O}\cdot\frac{OA'}{A'A}=-1$$

Multiplicamos las tres igualdades anteriores:

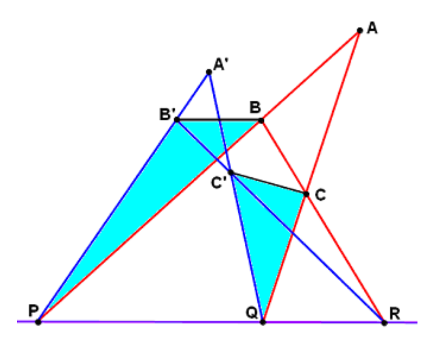
$$\frac{CR}{RB}\cdot\frac{BB'}{B'O}\cdot\frac{OC'}{C'C}\cdot\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{OB'}{B'B}\cdot\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CC'}{C'O}\cdot\frac{OA'}{A'A}=(-1)(-1)(-1)=-1\Leftrightarrow$$

$$\frac{CR}{RB}\cdot\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AQ}{QC}=-1$$

Esta tercera igualdad, en el triángulo ABC y nuevamente aplicando el teorema de Menelao, garantiza que los puntos P, Q y R están alineados, tal y como queríamos ver:



Supongamos por el contrario que los puntos P, Q y R están alineados. Consideramos los triángulos BB’P y CC’Q.



Estos triángulos están en perspectiva respecto del punto R, por lo que podemos aplicar la primera parte de este teorema para afirmar que los tres puntos $BB'\cap CC'$, $PB\cap QC = A$ y $PB'\cap QC' = A'$ están alineados.

Definiendo $O = BB'\cap CC'$, de lo anterior se deduce que la recta AA' pasa por O, es decir, que los triángulos ABC y A'B'C' están en perspectiva respecto de este punto O.

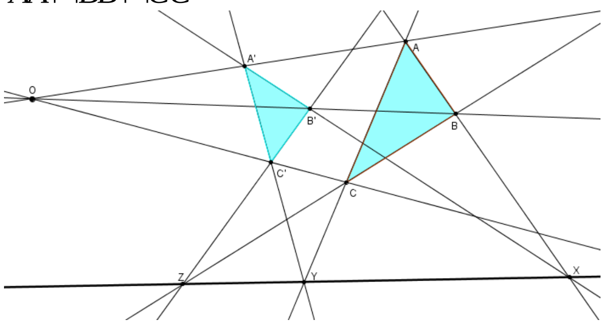
Fuente de la demostración: http://sistemas.fciencias.unam.mx/~mglgm/NotasGM_cap4.pdf

12.4.4 Teorema. Teorema de Hessenberg.

El Teorema de Desargues se puede demostrar utilizando única y exclusivamente el Teorema de Pappus y los axiomas incidentales.

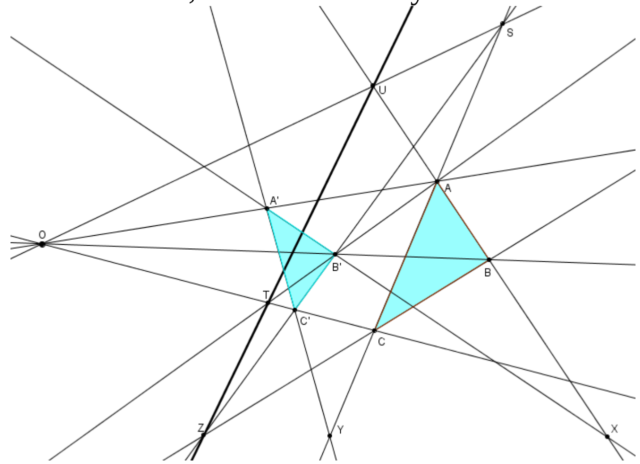
"Pappusian planes are Desarguesian" (G. Hessenberg, Mathematische Annalen, 61 (1905) pp.161-172)

Demostración. Sean dos triángulos ABC y A'B'C' cuyos vértices están en perspectiva por un punto O: $O = AA'\cap BB'\cap CC'$



Queremos ver que los puntos $X = AB\cap A'B'$, $Y = AC\cap A'C'$ y $Z = BC\cap B'C'$ están alineados.

Primer Paso: Sean $S = B'C'\cap AC$, $T = B'A\cap CC'$ y $U = BA\cap OS$:

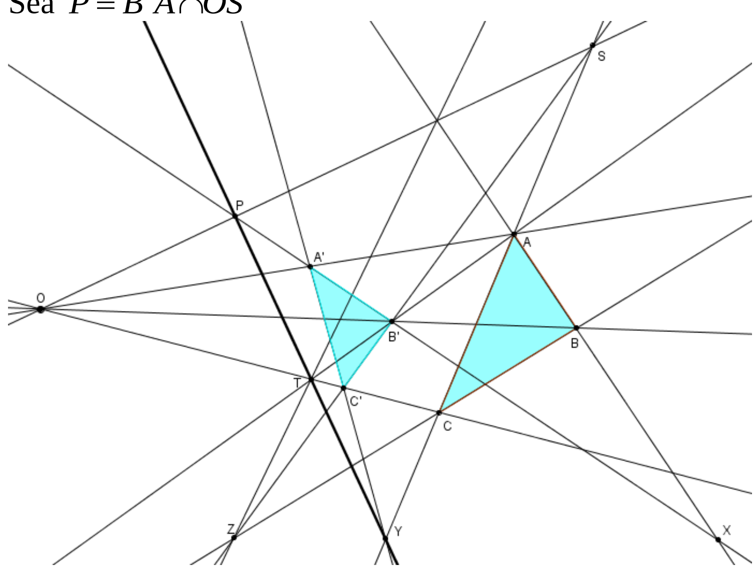


Los puntos O, B y B’ están alineados. Los puntos A, S y C también están alineados, y todos son diferentes de la intersección de sus respectivas rectas, luego, aplicando el Postulado de Pappus, los puntos

$$\begin{matrix} O & B & B' \\ A & S & C \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} BC \cap B'S = Z \\ OS \cap AB = U \\ OC \cap AB' = T \end{cases} \text{ están alineados.}$$

donde utilizamos que B’S=B’C’ y OC=CC’.

Segundo paso: Sea $P = B'A' \cap OS$

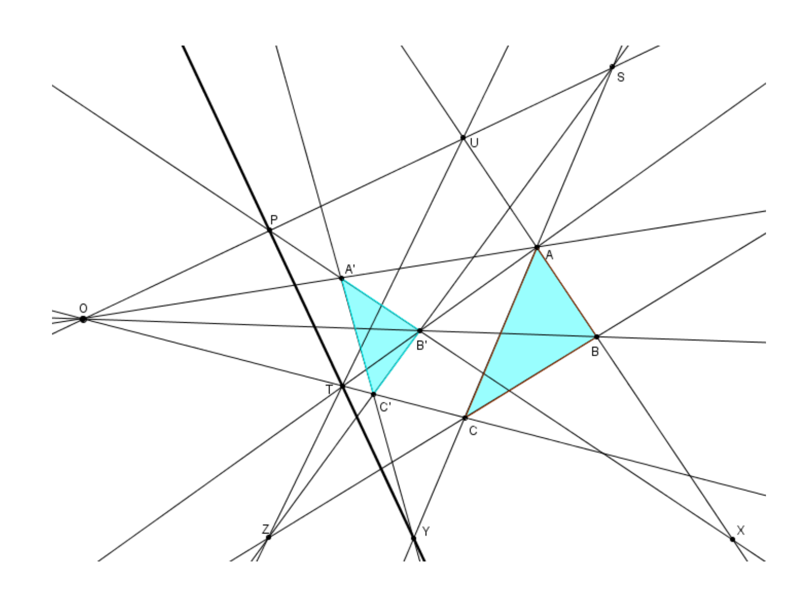


Los puntos O, A y A’ están alineados. Los puntos B’, C’ y S también están alineados, y todos son diferentes de la intersección de sus respectivas rectas, luego aplicando el Postulado de Pappus, los puntos

$$\begin{matrix} O & A & A' \\ B' & C' & S \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} AS \cap A'C' = Y \\ OC' \cap AB' = T \\ OS \cap A'B' = P \end{cases} \text{ están alineados.}$$

donde utilizamos que AS=AC y OC’=CC’.

Tercer paso:



Hemos definido $U = BA \cap OS$ y $P = B'A' \cap OS$, luego ambos puntos pertenecen a OS, y por tanto los puntos U, S y P están alineados.

Por otro lado $T = B'A \cap CC'$ pertenece a la recta B'A, luego los puntos B', T y A están alineados.

Además, todos son diferentes de la intersección de sus respectivas rectas, luego aplicando el Postulado de Pappus, los puntos

$$\begin{matrix} U & S & P \\ B' & T & A \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} AS \cap PT = Y \\ UT \cap B'S = Z \\ UA \cap PB' = X \end{cases} \text{ están alineados}$$

es decir, se cumple el Postulado de Desargues.

Aquí hemos utilizado los siguientes hechos:
$Y = AC \cap A'C' = AS \cap A'C' = AS \cap PT$ (segundo paso)
$Z = BC \cap B'C' = BS \cap B'C' = AS \cap UT$ (primer paso)
$X = AB \cap A'B' = UA \cap A'B' = UA \cap PB'$

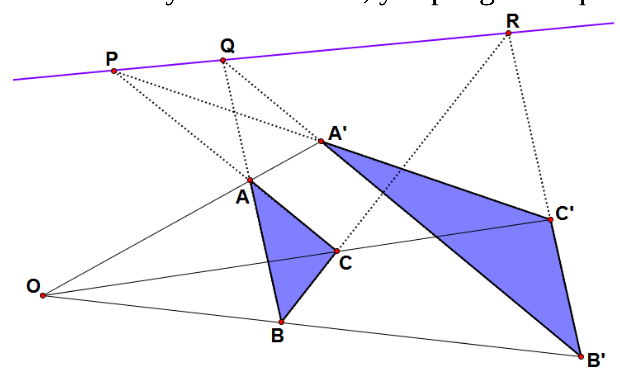
(Fuente de la demostración: Timothy Vis "The Theorem of Desargues")

12.4.5 Teorema.
Todo espacio proyectivo tridimensional es arguesiano.

Demostración.

Primer caso: Triángulos en planos diferentes, Vértices $\Rightarrow$ Lados:

Sean dos triángulos $\Delta ABC \subset \pi$ y $\Delta A'B'C' \subset \pi'$, y supongamos que $\pi \neq \pi'$.



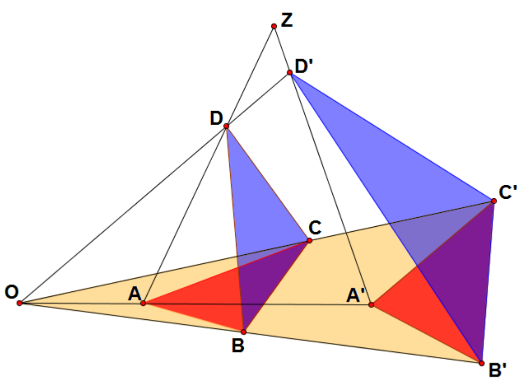
$A' \in \overleftrightarrow{OA}$ y $B' \in \overleftrightarrow{OB}$, luego los puntos A, B, A', B' están contenidos en el plano OAB, y por tanto las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{A'B'}$ están en el plano OAB, y en consecuencia se cortarán en un punto Q. Con un razonamiento similar deducimos que las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{A'C'}$ cortarán en un punto P, y las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{B'C'}$ cortarán en un punto R. Los puntos P, Q y R pertenecen simultáneamente a los planos π y π', por lo que su intersección será forzosamente una recta que contendrá los dichos puntos, tal y como queríamos ver.

Segundo caso: Triángulos en planos diferentes, Lados$\Rightarrow$Vértices:

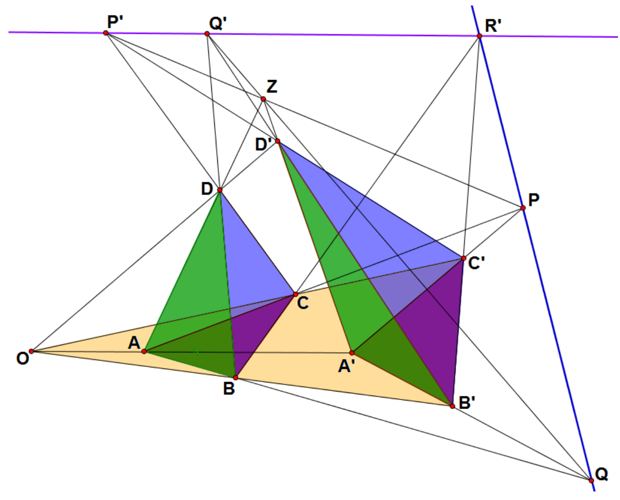
Sean dos triángulos $\Delta ABC \subset \pi$ y $\Delta A'B'C' \subset \pi'$, y supongamos que $\pi \neq \pi'$.
Supongamos que tienen un eje de simetría r.
Sean los tres planos $\pi_1 =< \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{A'B'} >$, $\pi_2 =< \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{A'C'} >$, $\pi_3 =< \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{B'C'} >$ (5.1.5b)
Entonces $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{AA'}$, $\pi_1 \cap \pi_3 = \overleftrightarrow{BB'}$, y $\pi_2 \cap \pi_3 = \overleftrightarrow{CC'}$ (5.1.4 b)
La recta $\overleftrightarrow{AA'}$ no puede estar contenida en π_3, pues entonces cortaría π en un punto de $\overleftrightarrow{BC}$, y por hipótesis los puntos A, B y C no pueden ser colineales. Luego $\overleftrightarrow{AA'} \cap \pi_3$ es un único punto O. Por lo tanto $\{O\} = \overleftrightarrow{AA'} \cap \pi_3 = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{CC'}$, es decir, hemos encontrado el centro de perspectiva.

Tercer caso: Triángulos en el mismo plano, Vértices$\Rightarrow$Lados:

Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos contenidos en un mismo plano π. Puesto que estamos en el espacio, podemos tomar un punto Z fuera de este plano y D otro punto de la recta $\overleftrightarrow{AZ}$. Sea $D' = \overleftrightarrow{AZ} \cap \overleftrightarrow{OD}$.



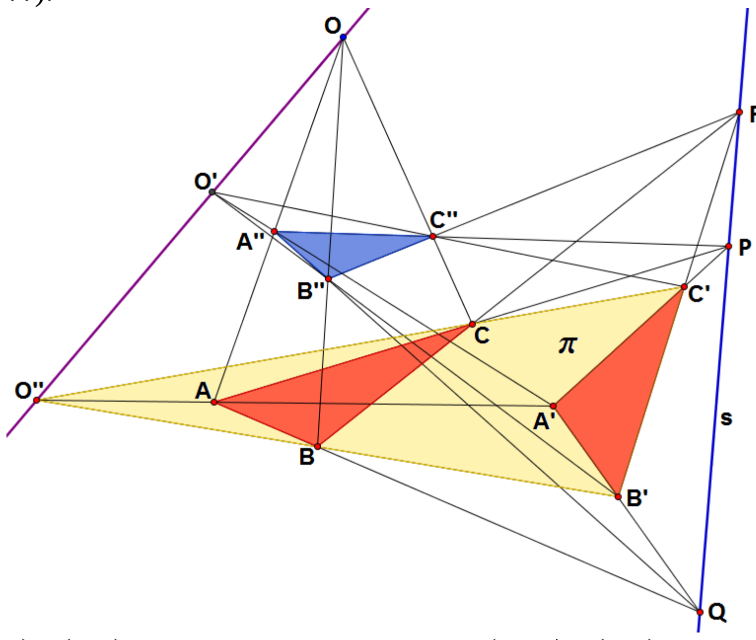
Los triángulos ΔBCD y $\Delta B'C'D'$ tienen el punto O como centro de perspectiva y no pertenecen a un mismo plano.
Luego podemos aplicar el teorema de Desargues para triángulos no coplanares, y deducir que los tres puntos $R' = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$, $Q' = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{B'D'}$ y $P' = \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{C'D'}$ están alineados.



Ahora proyectamos estos tres puntos en el plano π a través del punto Z obtendremos tres puntos igualmente alineados:
$P = \overleftrightarrow{P'Z} \cap \pi$, $Q = \overleftrightarrow{Q'Z} \cap \pi$, $R = \overleftrightarrow{R'Z} \cap \pi = R'$.
Q es la intersección $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$. En efecto, los triángulos ΔABD y $\Delta A'B'D'$ tienen el punto O como centro de perspectiva, y no pertenecen a un mismo plano, luego los puntos $Z = \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{A'D'}$, $Q' = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{B'D'}$ y $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$ están alineados. Luego el punto $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$ será la intersección $\overleftrightarrow{ZQ'} \cap \pi$, tal y como queríamos ver.
Con un razonamiento similar se demuestra que el punto P es la intersección de $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$.

Cuarto caso: Triángulos en el mismo plano, Lados$\Rightarrow$Vértices:

Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos contenidos en un mismo plano π, y supongamos que tienen un eje de perspectiva s. Puesto que estamos en un espacio tridimensional, podemos tomar un plano π' que corte π en s.
Sea O un punto fuera de π y de π' (una recta que pase por un punto de π y de π' tiene un tercer punto fuera de ambos planos).
Sean A'', B'' y C'' los puntos de corte de $\overleftrightarrow{AO}$, $\overleftrightarrow{BO}$ y $\overleftrightarrow{CO}$ con π'. Los triángulos ΔABC y $\Delta A''B''C''$ tienen O como centro de perspectiva, y no están en un mismo plano por construcción, luego podemos aplicar el primer caso de esta misma demostración para deducir que tienen un eje de simetria, que será la misma recta s.
Por lo tanto $\overleftrightarrow{A''C''} \cap \overleftrightarrow{AC}$ será un punto de la recta s que es el punto $P = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$ (Demostrar ????).



Así pues, $\overleftrightarrow{A''C''} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = P$, y de la misma manera $\overleftrightarrow{B''C''} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = R$ y $\overleftrightarrow{A''B''} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = Q$, es decir, los triángulos $\Delta A'B'C'$ y $\Delta A''B''C''$ tienen s como eje de simetría, luego podemos aplicar el tercer caso de esta misma demostración para deducir que tienen un centro de simetría O'.
Los puntos O y O' deben ser diferentes, pues en caso contrario A=A', B=B' y C=C'.

Sea O’’ el punto de intersección de $\overleftrightarrow{OO'}$ con π. Veamos que O’’ es un centro de simetría para los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$.
Los puntos O’, A’ y A’’ están alineados. Sea π'' el plano que contiene esta recta y el punto O. Los puntos A y O’’ también pertenecen a π'', y por lo tanto $O''\in \pi \cap \pi''$.
Luego la intersección de estos dos planos será una recta. A esta recta pertenecen también los puntos A y A’’, como queríamos ver.
De forma similar demostramos la alineación de los otros vértices.

12.4.6 Corolario.
Todo plano proyectivo contenido en un espacio proyectivo tridimensional es arguesiano.

Demostración. Trivial.

12.4.7 Un plano afín no arguesiano: El Plano de Moulton.

12.5 Cuaternas armónicas.

12.5.1 Definición. Cuaterna armónica.

Diremos que cuatro puntos ordenados (A, X, B, Y) alineados forman una **cuaterna armónica** (en inglés "**harmonic bundle**") cuando

$$(A, B; X, Y) = -1 \quad \text{o, equivalentemente, } \frac{XA}{XB} = -\frac{YA}{YB}$$

Ejemplo:

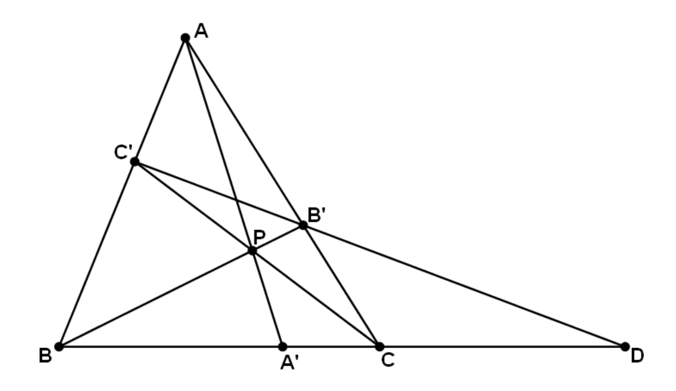
3.51   0.85   1.38

A   X   B   Y

$$(A, B; X, Y) = \frac{\overline{AX} \cdot \overline{BY}}{\overline{BX} \cdot \overline{AY}} = \frac{3.51 \cdot 1.38}{-0.85 \cdot 5.74} = -0.992 \cong -1$$

12.5.2 Teorema. Caracterización de cuaternas armónicas y cevianas concurrentes.

Sea un triángulo ΔABC y sean AA', BB' y CC' tres cevianas concurrentes en un punto P (tal vez en las extensiones de los lados). Sea $D = B'C' \cap BC$. Entonces (B, A', C, D) es una cuaterna armónica.



Nota. El recíproco también es cierto: Si $(B, A'; C, D) = -1$ entonces las tres cevianas son concurrentes.

Demostración.

Por el Teorema de Ceva (11.2.1) tenemos que $\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \dfrac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = +1$

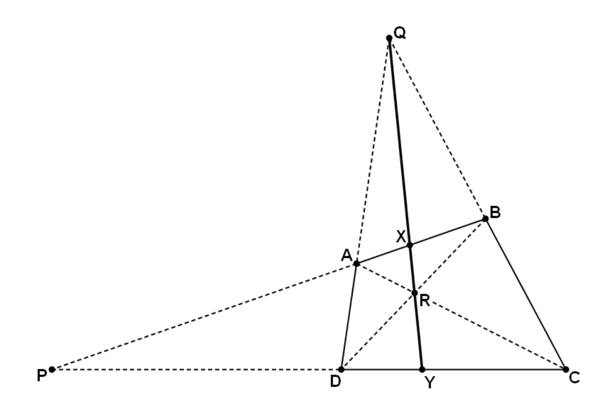
Por el Teorema de Menelao (11.2.2) tenemos que $\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \dfrac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = -1$

Luego

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \div \left(\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \right) = \frac{+1}{-1} = -1 \Leftrightarrow$$

$$-1 = \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{AC'}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{CB'}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = (B, C; A', D)$$

12.5.3 Corolario. Cuaternas armónicas y cuadriláteros completos.
Dado un cuadrilátero ABCD, lo completamos con los puntos $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap AD$ y $R = AC \cap BD$. Supongamos que QR corta $\overline{AB}$ en X y $\overline{CD}$ en Y. Entonces obtenemos las siguientes cuaternas armónicas:



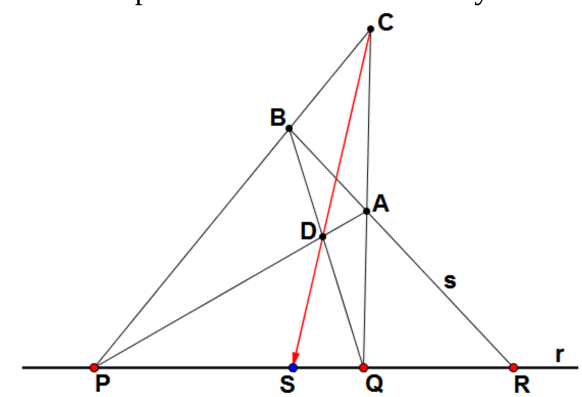
a) $(P,Y;D,C) = -1$

b) $(P,X;A,B) = -1$

c) $(Q,R;X,Y) = -1$

Demostración. Aplicando el teorema anterior al triángulo ΔDQC con las cevianas QY, DB y AB, se deduce directamente el apartado a). El apartado b) se deduce de a proyectando con centro Q los puntos P,D,Y,C en P,A,X,B.
El apartado c) se deduce mediante una proyección de centro C que envía P,A,X,B a Y,R,X,Q, luego $-1 = (P,X;A,B) = (Y,X;R,Q)$

12.5.4 Teorema. El cuarto armónico de tres puntos alineados.
Dados tres puntos P, Q y R de una recta r, definimos su **cuarto armónico** S de la siguiente manera:
1. Trazamos una recta s arbitraria diferente de r que pase por R.
2. Marcamos dos puntos arbitrarios A y B en s.
3. Completamos el cuadrilátero de vértices A, B, P y Q trazando las rectas $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{QA}$ y $\overleftrightarrow{QB}$.
4. Marcamos el punto C intersección de $\overleftrightarrow{PB}$ y $\overleftrightarrow{QA}$ y el punto D intersección de $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{QB}$.
5. El cuarto armónico S será el punto de intersección de r y $\overleftrightarrow{CD}$.

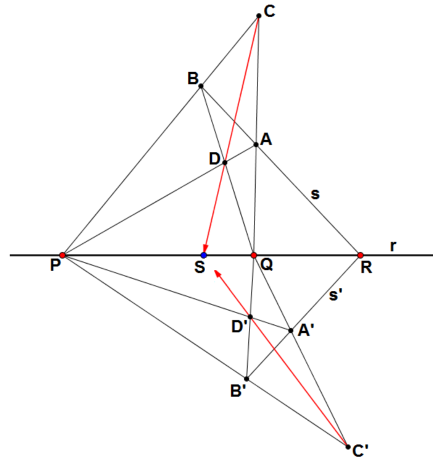


Cuatro puntos P, Q, R y S de una misma recta r forman una cuaterna armónica si y sólo si S es el cuarto armónico de P, Q y R.

Demostración. El cuarto armónico está bien definido, es decir, no depende de la recta s ni de los puntos A y B tomados para su construcción, sólo depende de P, Q y R. Para demostrarlo, utilizaremos el Teorema de Desargues (12.4.2) tres veces, en ambos sentidos.
Supongamos que trazamos otra recta s' y otros dos puntos A', B' en s'.

Trazamos de la misma manera los puntos B', C' y sea $S' = \overleftrightarrow{C'D'} \cap r$.

Queremos ver que $S = S'$.



Los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ tienen como eje de perspectiva la recta $\overleftrightarrow{PQ}$:

$P = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$, $Q = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$, $R = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$, y estos tres puntos están alineados. Luego, por el Teorema de Desargues, tendrán un centro O de perspectiva.

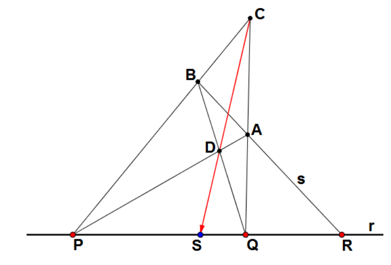
De la misma forma, los triángulos ΔBDA y $\Delta B'D'A'$ tienen como eje de perspectiva la misma recta $\overleftrightarrow{PQ}$: $P = \overleftrightarrow{DA} \cap \overleftrightarrow{D'A'}$, $Q = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{B'D'}$, $R = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$, tres puntos alineados, luego nuevamente por el Teorema de Desargues, tendrán un centro O' de perspectiva.

Los puntos O y O' coinciden, pues $O = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = O'$

Luego los triángulos ΔBCD y $\Delta B'C'D'$ tienen un centro de perspectiva O, y por tanto, nuevamente por el Teorema de Desargues ahora en sentido opuesto, deducimos que tienen ambos un eje de perspectiva común. Este eje de perspectiva debe ser forzosamente la recta $\overleftrightarrow{PQ}$, pues $P = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$ y $Q = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{B'D'}$, y por tanto el tercer punto de corte debe ser el mismo: $S = \overleftrightarrow{CD} \cap r = \overleftrightarrow{C'D'} \cap r = S'$.

Veamos ahora la equivalencia entre cuarto armónico y cuaterna armónica.

$\Rightarrow$Montamos el esquema constructivo del cuarto armónico:



Por el Teorema de Ceva aplicado al triángulo ΔCPQ y las cevianas PA, QB y CS:

$$\frac{CB}{BP}\cdot\frac{PS}{SQ}\cdot\frac{QA}{AC}=1$$

Por el Teorema de Menelao aplicado al mismo triángulo y la recta AB, se cumple

$$\frac{CB}{BP}\cdot\frac{PR}{RQ}\cdot\frac{QA}{AC}=-1$$

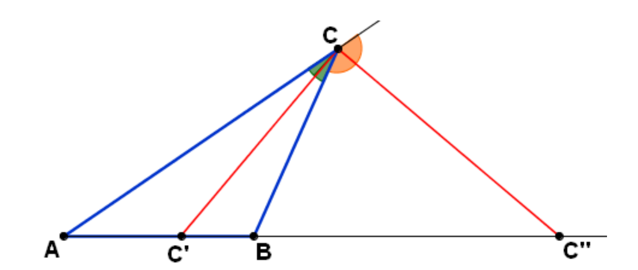
Luego

$$-1=1\div(-1)=\frac{CB}{BP}\cdot\frac{PS}{SQ}\cdot\frac{QA}{AC}\div\left(\frac{CB}{BP}\cdot\frac{PR}{RQ}\cdot\frac{QA}{AC}\right)=\frac{CB}{BP}\cdot\frac{PS}{SQ}\cdot\frac{QA}{AC}\cdot\frac{BP}{CB}\cdot\frac{RQ}{PR}\cdot\frac{AC}{QA}=$$

$$=\frac{PS}{SQ}\cdot\frac{RQ}{PR}=\frac{PS\cdot QR}{PR\cdot QS}\Rightarrow -1=\frac{1}{-1}=\frac{PR\cdot QS}{PS\cdot RQ}=(P,Q;R,S)$$

$\Leftarrow$Supongamos ahora que $(P,Q;R,S)=-1$. Montamos el cuarto armónico S' mediante la construcción del cuadrilátero completo anterior, y para este punto S', en la primera parte de esta demostración hemos demostrado que $(P,Q;R,S')=-1$. Luego $S=S'$ por 12.1.3.

12.5.5 Proposición. Cuaternas armónicas y bisectrices.
En todo triángulo, dos vértices y los pies de las bisectrices interior y exterior que parten del tercero constituyen una cuaterna armónica.



Demostración. Aplicamos los teoremas de la bisectriz interior y exterior (11.4.2 y 11.4.3):

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{C''A}{C''B}=\frac{AC}{CB}$$

Luego $(A,B;C'',C')=\dfrac{AC''\cdot BC'}{BC''\cdot AC'}=\dfrac{AC''}{BC''}\cdot\dfrac{BC'}{AC'}=\dfrac{-C''A}{-C''B}\cdot\dfrac{-C'B}{AC'}=-\dfrac{C''A}{C''B}\cdot\dfrac{C'B}{AC'}=-1$

12.5.6 Teorema. Cuarterna armónica y puntos impropios.
Sean dos puntos A y B y sea M su punto medio. Sea P_∞ el punto impropio de la recta AB. Entonces $(A,B;M,P_\infty)$ es una cuaterna armónica.

Nota: En este teorema suponemos que nos encontramos en un plano proyectivo, es decir, en el que cada recta tiene además un punto del infinito o punto impropio, y dos rectas son paralelas si y solo si se cortan en el punto impropio.
Este teorema es muy útil pues relaciona puntos medios y rectas paralelas.

Demostración. $(A,B;M,P_\infty)=\dfrac{\overline{AM}\cdot\overline{BP_\infty}}{\overline{BM}\cdot\overline{AP_\infty}}=(-1)\dfrac{\overline{BP_\infty}}{\overline{AP_\infty}}=(-1)\cdot 1=-1$

(Fuente: Chen pág 173)

Problema propuesto: Problema #3 de **[Prob5]**. Donde se aplica este teorema para identificar un punto medio mediante una cuaterna armónica y dos rectas paralelas.

12.6 Cuadriláteros armónicos.

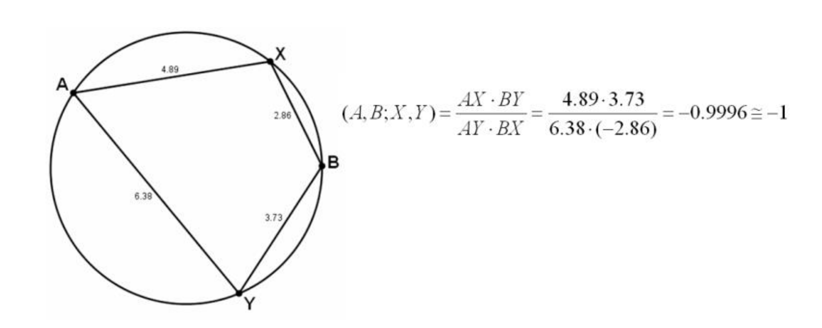
Introducimos aquí el concepto de cuadrilátero armónico, que será estudiado en profundidad en el apartado 15.5 mediante el uso de rectas simedianas.

12.6.1 Definición. Cuadrilátero armónico.
Diremos que un cuadrilátero cíclico $AXBY$ es un **cuadrilátero armónico** cuando

$$(A,B;X,Y) = -1$$

Equivalentemente: $-1 = (A,B;X,Y) = \dfrac{AX \cdot BY}{AY \cdot BX} \Leftrightarrow AX \cdot BY = -AY \cdot BX$

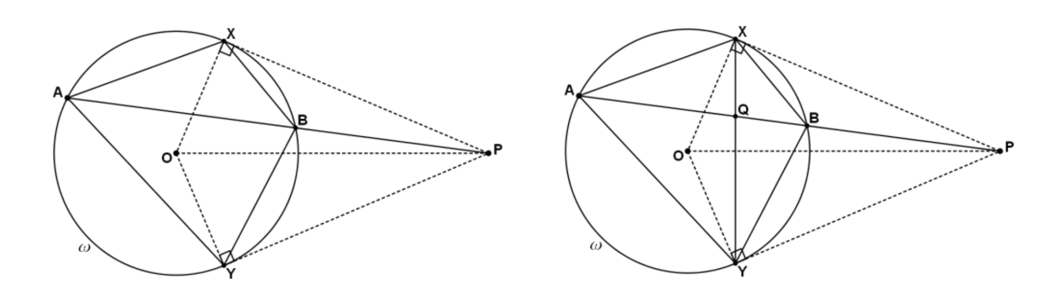
Ejemplo:



Nota. Si prescindimos de segmentos orientados, la caracterización de los cuadriláteros armónicos es $AX \cdot BY = AY \cdot BX$, es decir, los productos de lados opuestos coindicen.

Nota histórica. Se atribuye al matemático inglés **Robert Tucker** (1832-1905) el primer estudio sobre los cuadriláteros armónicos, en su artículo "*Some Properties of a Quadrilateral in a Circle the Rectangles under whose opposite Sides are equal*", presentado en la London Mathematical Society el 12 de febrero de 1885.

12.6.2 Proposición.
Sea P un punto externo a una circunferencia ϖ . Sean $\overline{PX}$ y $\overline{PY}$ las tangentes a ϖ . Dada cualquier recta que pase por P, y siendo A y B sus puntos de corte con ϖ , se cumple
a) $AXBY$ es un cuadrilátero armónico.
b) Si $Q = \overline{AB} \cap \overline{XY}$, entonces (A,Q,B,P) es una cuaterna armónica.



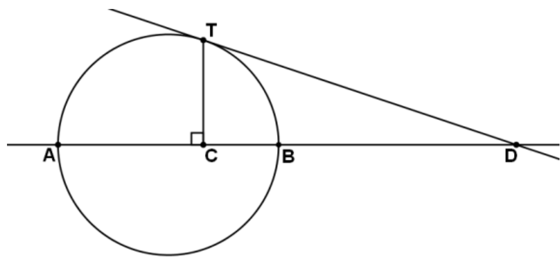
Demostración.

a) Sabemos que $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YB}$ (distancias sin signo), y que $(A,B;X,Y)$ debe ser negativo por la posición de los puntos, luego $(A,B;X,Y) = \frac{\overline{AX} \cdot \overline{BY}}{\overline{BX} \cdot \overline{AY}} = -1$

b) Podemos proyectar por el punto X: $-1 = (A,B,X,Y) \overset{X}{\underset{\wedge}{=}} (A,B,Q,P)$, entendiendo la recta XX como la tangente a la circunferencia por X.

Problema propuesto: Problema #4 de **[Prob5]**.

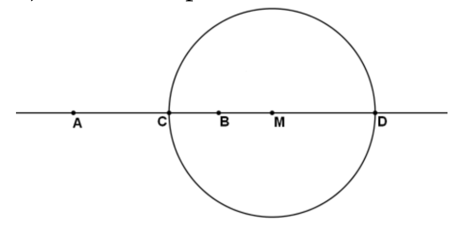
12.6.3 Proposición. Cuaternas armónicas y tangentes.
Dados tres puntos alineados A, C, y D en este orden, sea ϖ la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, sea TD la tangente a ϖ por D y sea $C \in AB$ con $CT \perp AB$. Entonces $(A,B;C,D) = -1$.



Demostración. Basta aplicar 12.6.2b tomando A y B el diámetro por D. (???? Falta comprobar que C se caracteriza por perpendicularidad)

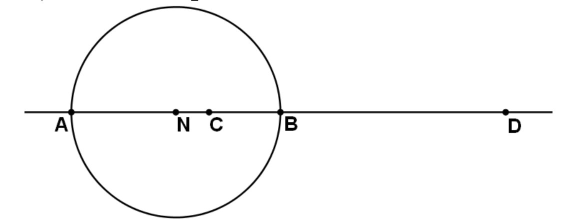
12.6.4 Proposición. Cuaternas armónicas y puntos medios.
Dados cuatro puntos alineados A, C, B, D en este orden,

a) Si M es el punto medio de $\overline{CD}$,



$$(A,B;C,D) = -1 \Leftrightarrow AC \cdot AD = AB \cdot AM$$

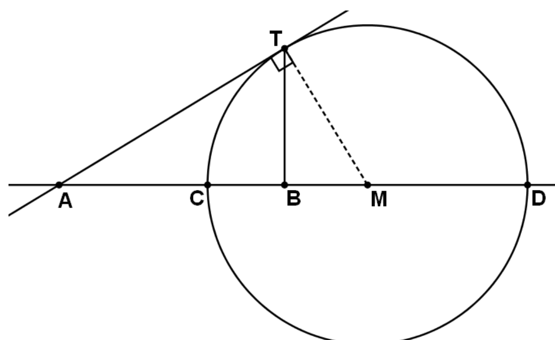
b) Si N es el punto medio de $\overline{AB}$,



$$(A,B;C,D) = -1 \Leftrightarrow NC \cdot ND = NB^2 = NA^2$$

Demostración.

a) $\Leftarrow$Trazamos la circunferencia de centro M y diámetro $\overline{CD}$. Sea AT su tangente por A.

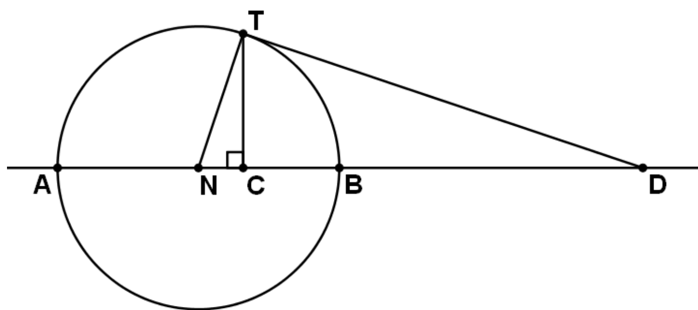


Por 10.1.12, $AC \cdot AD = AT^2 \Rightarrow AB \cdot AM = AT^2 \Rightarrow \dfrac{AB}{AT} = \dfrac{AT}{AM} \Rightarrow \Delta ATM \approx \Delta ABT \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABT = \angle ATM = 90º$

Ahora podemos aplicar 12.6.3 para deducir $(A,B;C,D) = -1$

b) $\Leftarrow$ Trazamos la circunferencia de centro N y diámetro $\overline{AB}$. Trazamos por C una perpendicular a AB y sea T su punto de corte con la circunferencia.

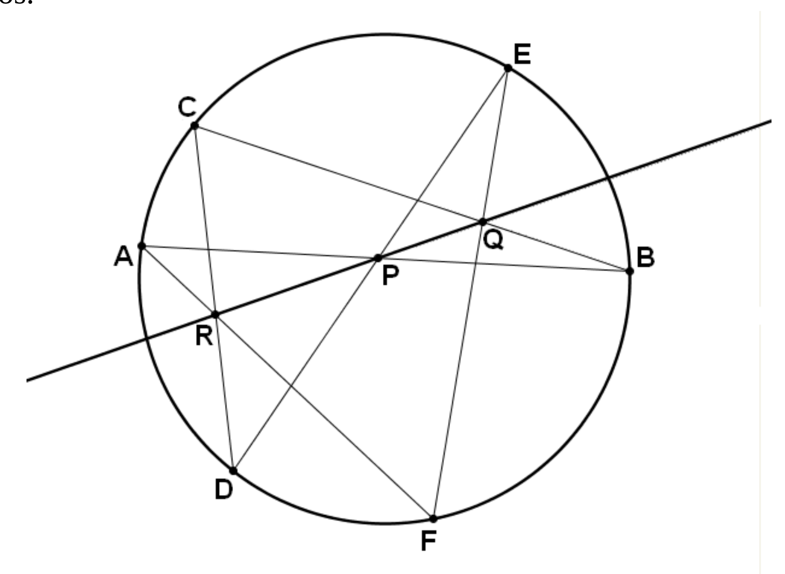


$NC \cdot ND = NB^2 = NT^2 \Rightarrow \dfrac{NC}{NT} = \dfrac{NT}{ND} \Rightarrow \Delta NTC \approx \Delta NCT \Rightarrow \angle NTD = \angle NCT = 90º$,

Luego, de nuevo podemos aplicar 12.6.3 para deducir $(A,B;C,D) = -1$.

12.7 Teoremas de Pascal y de Brianchon.

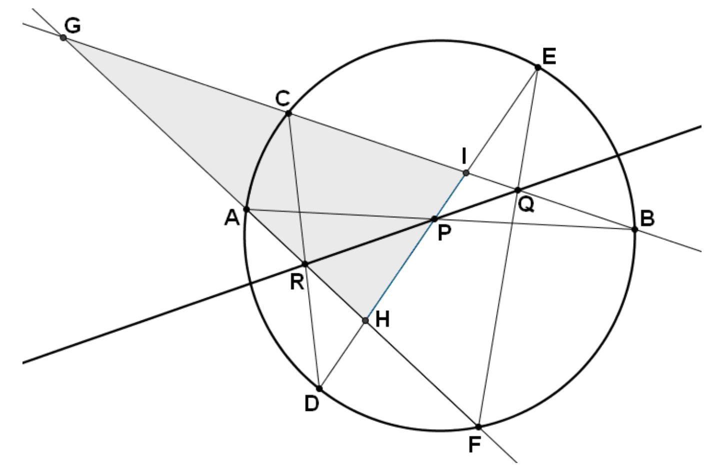
12.7.1 Teorema. El Teorema de Pascal.
Sea ABCDEF un hexágono inscrito en una circunferencia, con los vértices ordenados de cualquier manera. Entonces los puntos $P = \overline{AB} \cap \overline{DE}$, $Q = \overline{BC} \cap \overline{EF}$ y $R = \overline{CD} \cap \overline{FA}$ están alineados.



Demostración.

Primera versión.

Sean $G = BC \cap AF$, $H = AF \cap DE$ y $I = BC \cap DE$ y consideramos el triángulo ΔGHI.



En este triángulo aplicaremos tres veces el Teorema de Menelao (11.2.2):

En primer lugar con la transversal CRD: $\frac{GR}{RH} \cdot \frac{HD}{DI} \cdot \frac{IC}{CG} = -1$

En segundo lugar, con la transversal APB: $\frac{GA}{AH} \cdot \frac{HP}{PI} \cdot \frac{IB}{BG} = -1$

En tercer lugar, con la transversal GQE: $\frac{GF}{FH} \cdot \frac{HE}{EI} \cdot \frac{IQ}{QG} = -1$

Multiplicamos las tres igualdades anteriores:

$$\frac{GR}{RH}\cdot\frac{HD}{DI}\cdot\frac{IC}{CG}\cdot\frac{GA}{AH}\cdot\frac{HP}{PI}\cdot\frac{IB}{BG}\cdot\frac{GF}{FH}\cdot\frac{HE}{EI}\cdot\frac{IQ}{QG}=(-1)^3=-1$$

Agrupamos términos: $\frac{GR}{RH}\cdot\frac{HP}{PI}\cdot\frac{IQ}{QG}\cdot\frac{HD\cdot HE}{AH\cdot FH}\cdot\frac{GA\cdot GF}{BG\cdot CG}\cdot\frac{IB\cdot IC}{DI\cdot EI}=-1$

Se cumple (por 10.1.5 y 10.1.6) $\frac{HD\cdot HE}{AH\cdot FH}=\frac{GA\cdot GF}{BG\cdot CG}=\frac{IB\cdot IC}{DI\cdot EI}=1$

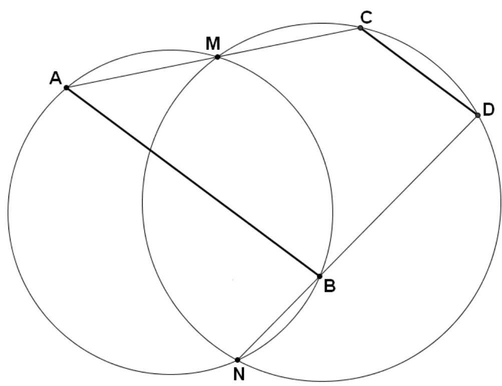
Luego $\frac{GR}{RH}\cdot\frac{HP}{PI}\cdot\frac{IQ}{QG}=-1$

Y aplicando el recíproco del Teorema de Menelao concluimos que los puntos K, P y Q están alineados, tal y como queríamos ver.

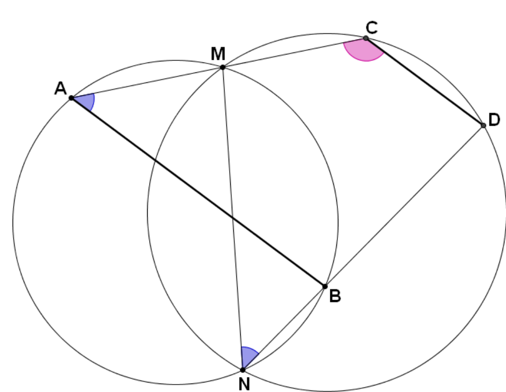
Segunda versión.

En **AoPS** (link) se encuentra una demostración alternativa muy interesante basada en triángulos homotéticos y en el siguiente lema:

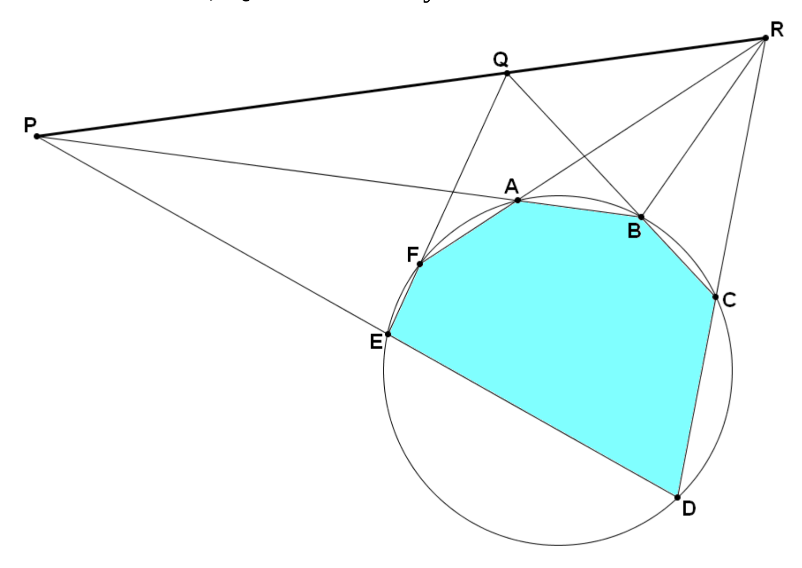
Lema. Dadas dos circunferencias ϖ_1 y ϖ_2 que se cortan en los puntos M y N, sea AB una cuerda de ϖ_1 y sean C y D los respectivos puntos de corte de AM y BN con ϖ_2. Entonces $AB // CD$.



Demostración. MCDN es un cuadrilátero cíclico, luego $\angle ACD=\angle MCD=180-\angle MND$. Pero, por otro lado, AMBN es cíclico, luego $\angle MND=\angle MNB=\angle MAB$. Luego $\angle ACD$ y $\angle CAB$ son ángulos suplementarios, luego la recta AC corta AB y CD con ángulos internos alternos congruentes, y por tanto $CD // AB$.



Procedemos ahora a la demostración del teorema de Pascal. Sea ABCDEF un hexágono cíclico y sean $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$ y $R = CD \cap FA$.



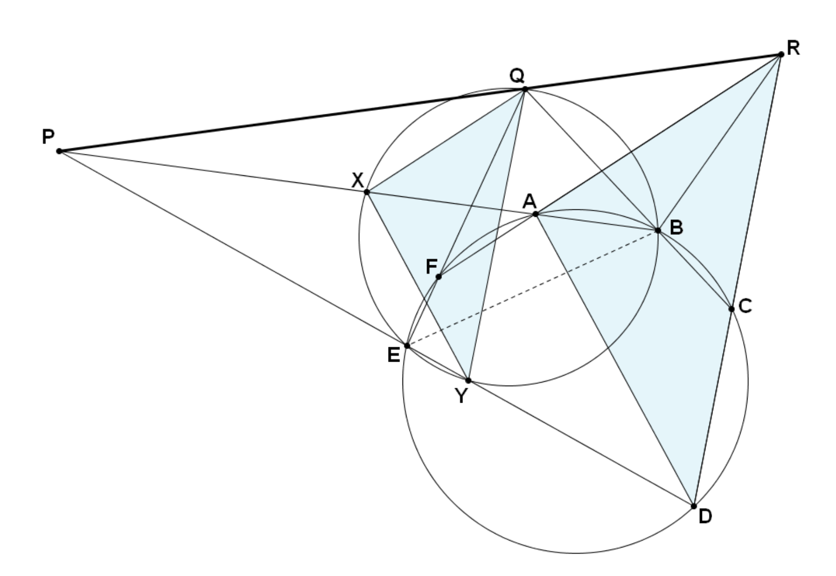
Sea ϖ_1 la circunferencia circunscrita a ABCDEF y ϖ_2 la circunferencia circunscrita a ΔBEQ.

Sea X el segundo punto de corte entre ϖ_2 y AB y sea Y el segundo punto de corte entre ϖ_2 y DE.

Aplicando el lema anterior a la cuerda AD, tenemos $AD // XY$.

Aplicando el lema anterior a la cuerda AF, tenemos $AF // XQ \Rightarrow AR // XQ$.

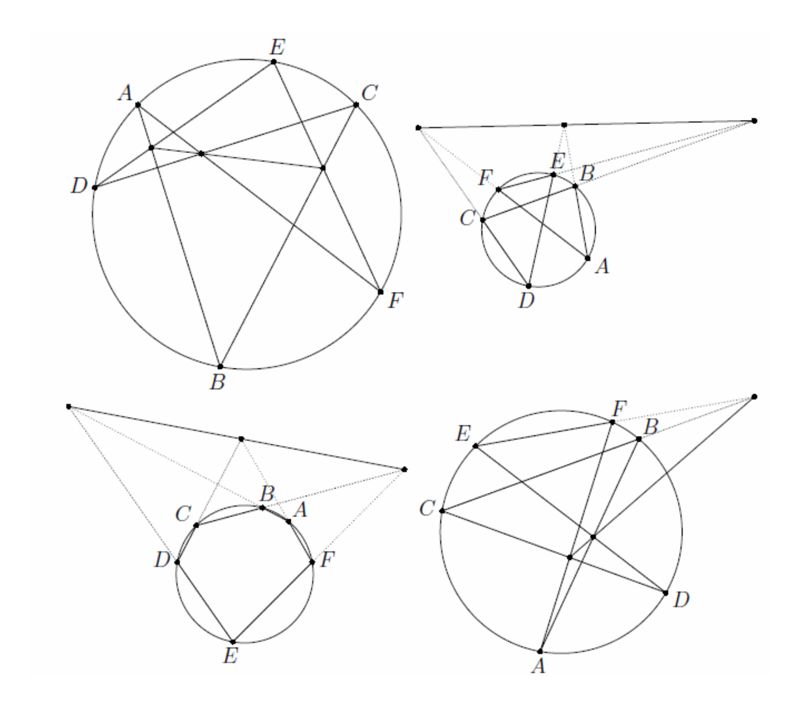
Aplicando el lema anterior a la cuerda CD, tenemos $CD // QY \Rightarrow DR // QY$.



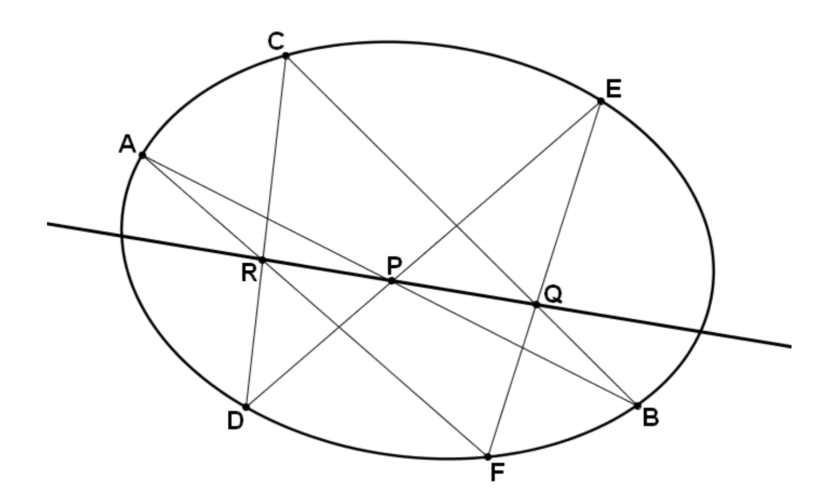
Por lo tanto, los triángulos ΔQXY y ΔRAD son semejantes, y por tanto la recta QR pasará por la intersección de AX y YD, es decir, por la intersección de AB y DE, que es P.

Problemas propuestos: Problemas #17 y #18 de **[Prob5]**

Nota 1. Este teorema no impone ningún orden en los vértices del hexágono, por lo que se puede presentar bajo un gran número de configuraciones diferentes:

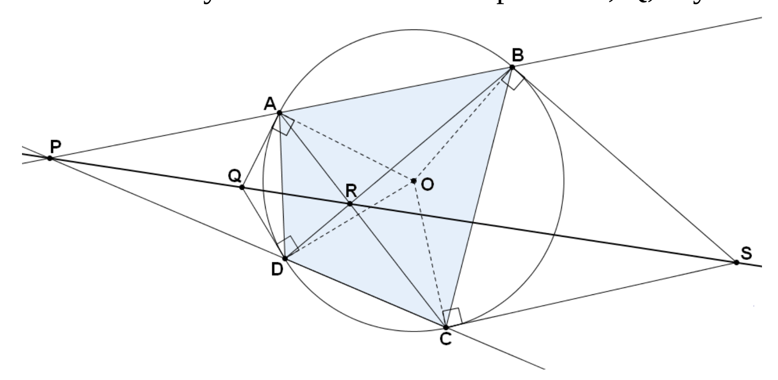


Nota 2. Este teorema y el Teorema de Pappus (12.3.1) son casos particulares de un teorema de Pascal generalizado para hexágonos inscritos en cualquier cónica (las parejas de rectas que se cruzan y las circunferencias son casos particulares de cónicas).



Nota histórica. Blaise Pascal (1623-1662), matemático francés, discípulo de Desargues. Demostró este teorema a la edad de dieciseis años, en un artículo que tituló *mysterium hexagrammicum*.

12.7.2 Corolario. Puntos alineados con tangentes a un cuadrilátero cíclico (1).
Dado un cuadrilátero cíclico ABCD, inscrito en una circunferencia ϖ, sea S el punto de corte de las tangentes a ϖ por B y C, sea Q el punto de corte de las tangentes a ϖ por A y D, y sean $P = AB \cap CD$ y $R = AC \cap BD$. Los puntos P, Q, R y S están alineados.



Demostración. Podemos considerar este resultado como corolario al Teorema de Pascal (12.7.1) si interpretamos el cuadrilátero ABCD como un "hexágono" con algunos vértices coincidentes.
Además, si X es cualquier punto de la circunferencia, interpretamos que el "segmento" XX es la recta tangente a la circunferencia por el punto X. Esto se puede comprender intuitivamente tomando un segmento XY, fijando el punto X y aproximando el punto Y a X. La cuerda resultante se va aproximando más y más a la tangente por X.

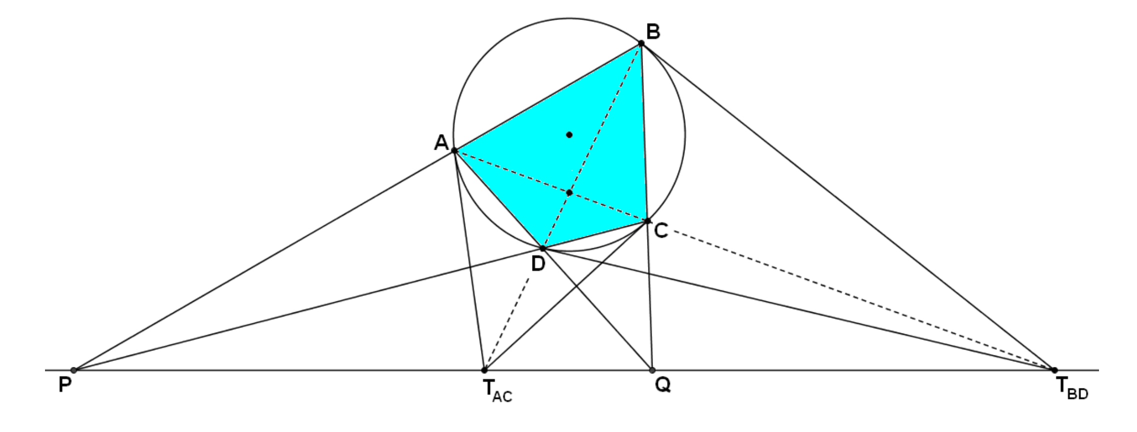
Con estas precisiones, en primer lugar el hexágono AABDDC, que da lugar a los puntos alineados:

$$Q = AA \cap DD,\ P = AB \cap CD \text{ y } R = BD \cap AC$$

En segundo lugar, el hexágono BBACCD, que da lugar a los puntos alineados

$$S = BB \cap CC,\ P = AB \cap CD \text{ y } R = AC \cap BD$$

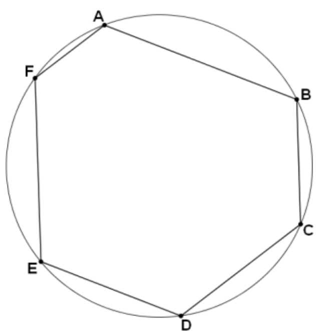
12.7.3 Corolario. Puntos alineados con tangentes a un cuadrilátero cíclico (2).
En un cuadrilátero cíclico ABCD, los puntos de corte de las rectas tangentes por vértices opuestos y los puntos de corte de los lados opuestos están alineados.



Denotando por AA la recta tangente por A a la circunferencia circunscrita al cuadrilátero, y siendo $T_{AC} = AA \cap CC$, $T_{BD} = BB \cap DD$, $P = AB \cap CD$ y $Q = AD \cap BC$, los puntos T_{AB}, T_{BD}, P, Q están alineados.

Demostración. Aplicando el Teorema de Pascal (12.7.1) al hexágono cíclico BBADDC, deducimos que los puntos $BB \cap DD = T_{BD}$, $BA \cap DC = P$ y $AD \cap CB = Q$ están alineados.
Aplicando el mismo teorema al hexágono cíclico AABCCD, deducimos que los puntos $AA \cap CC = T_{AC}$, $AB \cap CD = P$ y $BC \cap DA = Q$ están alineados. Esto significa que el punto T_{AC} pertenece a la recta PQ, en definitiva, que los puntos T_{AB}, T_{BD}, P, Q están alineados.

12.7.4 Corolario. Lados paralelos en un hexágono inscrito en una circunferencia.
Dado un hexágono ABCDEF inscrito en una circunferencia, si $AB // DE$ y $BC // EF$, entonces $AF // CD$.

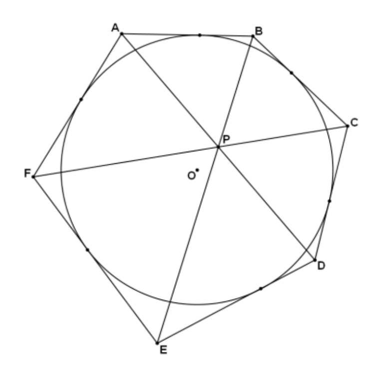


Demostración. Es una aplicación directa del Teorema de Pascal en el contexto de un plano proyectivo en el que el paralelismo de rectas se interpreta como la concurrencia en la "recta del infinito" r_∞

$$\left.\begin{array}{l} AB // DE \Rightarrow AB \cap DE \in r_\infty \\ BC // EF \Rightarrow BC \cap EF \in r_\infty \end{array}\right\} \Rightarrow BC \cap EF \in r_\infty \Rightarrow BC // EF$$

El plano proyectivo ampliado con la recta del infinito se estudiará en el Tema 19 de este libro, en un contexto analítico.

12.7.5 Teorema. Teorema de Brianchon.
Como todo teorema de geometría proyectiva, el Teorema de Pascal tiene su dual, llamado Teorema de Brianchon: Dado un hexágono ABCDEF circunscrito a una circunferencia, las rectas que unen vértices opuestos (también llamadas "**diagonales mayores**") AD, BE y CF son concurrentes.



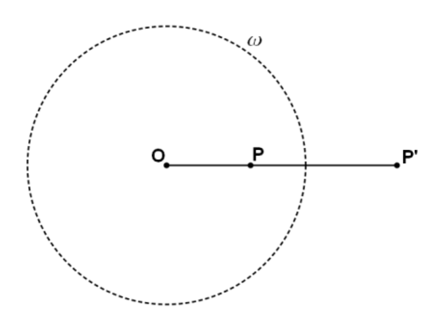
13 El plano inversivo.

13.1 Inversiones. Determinación del punto inverso.

13.1.1 Definición. Inversión.

Sea ϖ una circunferencia de centro O y radio r. Dado cualquier punto $P \neq O$ del plano, su inverso $P' = i(P)$ es el punto de la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ que verifica

$$OP \cdot OP' = r^2$$

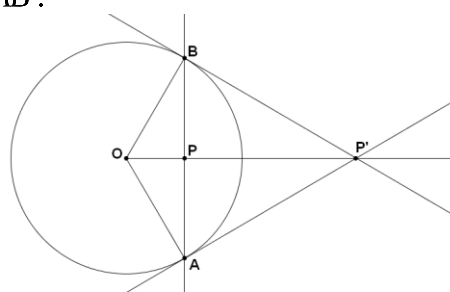


Definimos así una función, llamada **inversión** respecto a ϖ, que denotaremos por i_{ϖ}, definida para todo punto del plano excepto el centro O de la circunferencia. El valor r^2 se denomina **potencia de la inversión**, y el punto O, **centro de la inversión**.

13.1.2 Proposición. Construcción del punto inverso mediante tangentes.

Sea ϖ una circunferencia de centro O y radio r. Dado cualquier punto $P \neq O$ del interior de la circunferencia, trazamos la perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$ por P y sean A y B sus dos puntos de corte con ϖ. Las dos rectas tangentes a la circunferencia por A y B concurren en un mismo punto P' de la semirrecta $\overrightarrow{OP}$, que es el punto inverso de P.

Si el punto P está en el exterior de la circunferencia, el método para obtener su inverso es similar, trazando en primer lugar las rectas tangentes a ϖ por P', que tocarán la circunferencia en los dos puntos A y B, para después determinar el punto de intersección entre $\overrightarrow{OP'}$ y $\overleftrightarrow{AB}$.

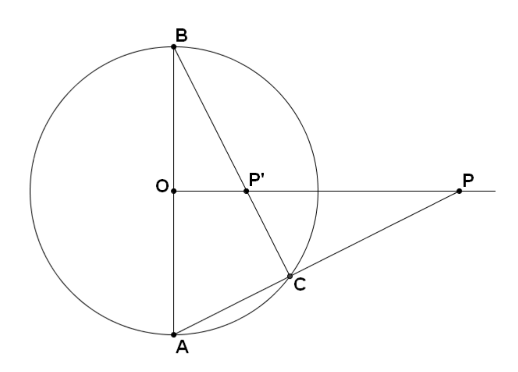


Demostración. El triángulo $\Delta OBP'$ es rectángulo en B y es semejante al triángulo ΔOPB por el criterio AA pues $\angle POB = \angle P'OB$ y $\angle OPB = \angle OBP'$. Luego

$$\frac{OP}{OB} = \frac{OB}{OP'} \Rightarrow OP \cdot OP' = OB \cdot OB = r^2$$

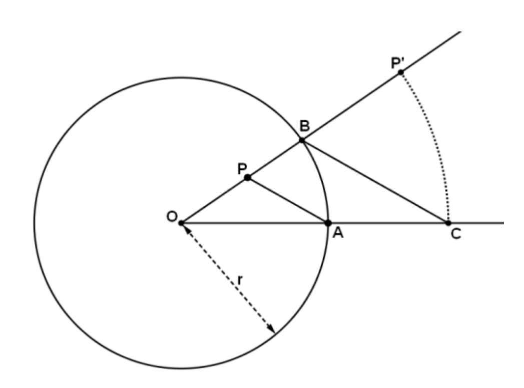
tal como queríamos ver.

13.1.3 Proposición. Construcción del punto inverso mediante el diámetro.
Sea ϖ una circunferencia de centro O y radio r. Dado cualquier punto $P \neq O$ del exterior de la circunferencia, trazamos la perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$ por el centro O y sean A y B sus dos puntos de corte con ϖ. Sea C el punto de corte entre AP y ϖ y P' el punto de corte entre BC y $\overrightarrow{OP}$. El punto P' es el inverso de P respecto a ϖ.



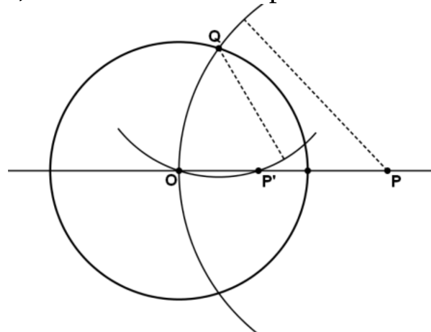
Demostración. Sabemos que $\angle ACB$ es recto pues C pertenece a ϖ. Luego los triángulos ΔACB y ΔAOP son semejantes. También son semejantes ΔACB y $\Delta P'OB$, pues $\angle ABC \cong \angle OBP'$. Luego $\frac{OP'}{OB} = \frac{OA}{OP} \Rightarrow OP \cdot OP' = OA \cdot OB = r^2$.

13.1.4 Proposición. Construcción del punto inverso mediante paralelismo.
Sea B el punto de corte entre la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ y ϖ. Trazamos otra semirrecta diferente $\overrightarrow{OA}$ con $A \in \varpi$. Trazamos la paralela a $\overleftrightarrow{PA}$ por B que cortará $\overrightarrow{OA}$ en un punto C.
Sea P' en $\overrightarrow{OP}$ tal que $OP' = OC$. El punto P' es el inverso de P respecto a ϖ.



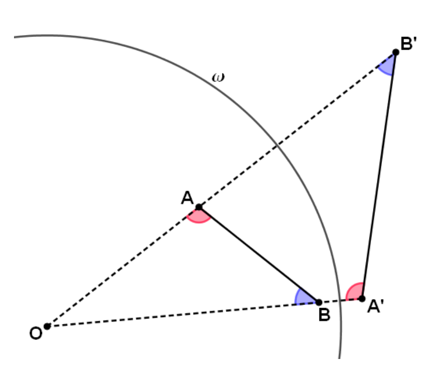
Demostración.
Claramente $OP' = OC$, $OA = OB = r^2$ y ΔOPA y ΔOBC son triángulos semejantes, luego $\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OP} \Rightarrow OC \cdot OP = OA \cdot OB \Rightarrow OP' \cdot OP = r^2$

13.1.5 Proposición. Construcción del punto inverso mediante circunferencias.
Trazamos una circunferencia con centro P y radio OP. Sea Q uno de sus puntos de corte con ϖ . Trazamos una circunferencia con centro Q y radio OQ. Esta circunferencia cortará la recta OP en O y P', el inverso de P respecto a ϖ .



Demostración. El triángulo ΔOPQ es isósceles puesto que $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$. Luego $\angle OQP \cong \angle QOP$. El triángulo $\Delta OQP'$ es isósceles puesto que $\overline{OQ} \cong \overline{P'Q}$. Luego $\angle QOP' \cong \angle OP'Q$. De lo que se deduce que $\angle OP'Q \cong \angle OQP$ y por tanto $\Delta OP'Q$ y ΔQOP son triángulos semejantes. Por lo tanto $\dfrac{PO}{OQ} = \dfrac{QO}{P'O} \Rightarrow PO \cdot P'O = OQ^2 = r^2$.

13.1.6 Proposición.
Sea una circunferencia ϖ con centro O, y sea ΔAOB un triángulo con un vértice en O y sean A' y B' los respectivos inversos de A y B. Entonces:



a) $OA' = \dfrac{r^2}{OA}$, $OB' = \dfrac{r^2}{OB}$

b) $\Delta AOB \approx \Delta B'OA'$

c) $A'B' = \dfrac{r^2}{OA \cdot OB} AB$

Demostración. Puesto que $A' \in \overrightarrow{OA}$ y $B' \in \overrightarrow{OB}$, $\angle AOB = \angle A'OB'$.

Por construcción, $OA \cdot OA' = r^2 \Rightarrow OA' = \dfrac{r^2}{OA}$, $OB \cdot OB' = r^2 \Rightarrow OB' = \dfrac{r^2}{OB}$

Tomando $k = \dfrac{r^2}{OA \cdot OB}$, se cumple

$OA' = \dfrac{r^2}{OA} = \dfrac{r^2}{OA \cdot OB} OB = k \cdot OB$ y $OB' = \dfrac{r^2}{OB} = \dfrac{r^2}{OB \cdot OA} OA = k \cdot OA$

luego $\Delta AOB \approx \Delta B'OA'$ por el criterio SAS de triángulos, y por lo tanto

$$A'B' = k \cdot AB = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$$

Problemas propuestos: Problemas #39, #40, #47, #48 de **[Prob4]**.

Observaciones.

1. Puesto que en la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ siempre existirá un único punto P' tal que $\overline{OP'} = \frac{r^2}{\overline{OP}}$, el punto inverso está bien definido.

2. El centro O de la circunferencia no tiene asociado ningún inverso, y no es inverso de ningún punto del plano. La inversión es una biyección del plano en sí mismo excluyendo el centro de la circunferencia.

3. La inversión es idempotente: $I_{\varpi}^{2} = Id$, o dicho de otra manera, toda inversión es su propia inversa.

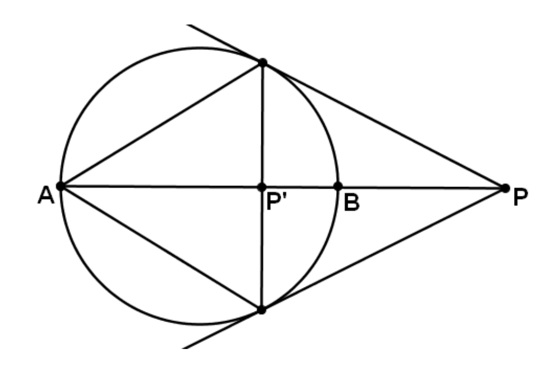
4. Si $P \in \varpi$, entonces $|\overline{OP}| = r$ y $|\overline{OP'}| = \frac{r^2}{r} = r$ y por tanto $P = P'$, es decir, la función deja invariantes los puntos de la circunferencia.

5. Si P está en el interior de la circunferencia $|\overline{OP}| < r$ y entonces $|\overline{OP'}| = \frac{r^2}{|\overline{OP}|} > \frac{r^2}{r} = r$ por tanto P' está fuera de la misma, y viceversa. Es decir, las inversiones intercambian el interior y el exterior de las circunferencias.

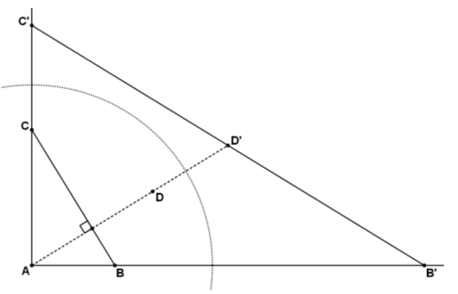
6. Las inversiones son **transformaciones conformales**, es decir, mantienen invariables los ángulos entre curvas.

13.1.7 Corolario. Cuaterna armónica inducida por una inversión.
Dado un punto P de una recta AB, sea P' su inversión respeto a la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$. Entonces A, P', B, P es una cuaterna armónica.

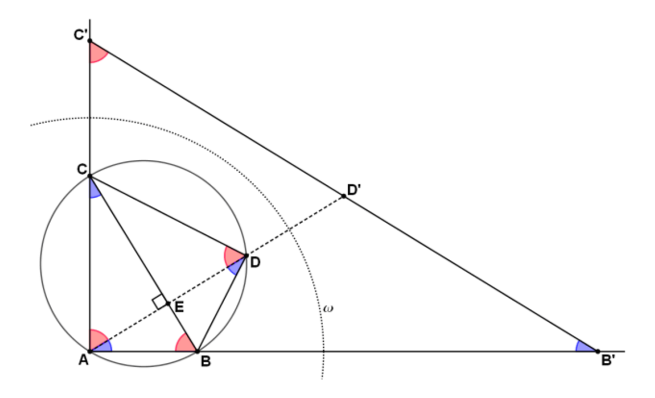
Demostración. Es un caso particular de 13.2.6 cuando tomamos AB como diámetro de la circunferencia.



13.1.7 Proposición.
Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ y sea D el simétrico de A respecto a la recta BC. Sean B', C' y D' los puntos inversos respectivos de B, C y D respecto de una circunferencia ϖ de radio r cualquiera y centrada en A. Entonces D' es el punto medio de $A'B'$.



Demostración. Sea E el punto medio de AD. Sean $\alpha = \angle CAE$ y $\beta = 90 - \alpha = \angle EAB$
$AD \perp BC$, luego $\Delta AEC \cong \Delta DEC$, por el criterio SAS, y $\angle CDE = \alpha$,
$\Delta AEB \cong \Delta DEB$, por el criterio SAS, y $\angle EDB = \beta$.



Por lo tanto $\angle CDB = \angle CAB = 90$ y los puntos A, B, C, D pertenecen a la circunferencia de diámetro $\overline{BC}$. Así pues, las inversiones B', C', D' son puntos alineados.

Por 13.1.6b, $\angle AA'D' = \angle ADC = \alpha$, luego el triángulo $\Delta AA'D'$ es isósceles en D', y por tanto $A'D' = D'A$.
De la misma manera, $\angle AB'D' = \angle ADB = \beta$, y por tanto el triángulo $\Delta AD'B'$ es isósceles en D', luego $AD' = D'B'$, y de esto se deduce que $A'D' = D'B'$, tal y como queríamos ver.

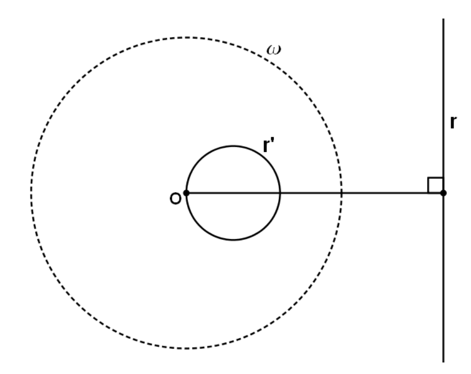
13.1.8 Proposición.
Dados dos puntos A y B diferentes del plano, y un radio r cualquiera, siempre podremos determinar una única circunferencia de radio r para la cual los puntos A y B sean inversos el uno del otro, es la **Circunferencia de Apolonio** asociada a dichos puntos, que se introdujo en 11.12.

13.2 Transformación de rectas y circunferencias bajo inversión.

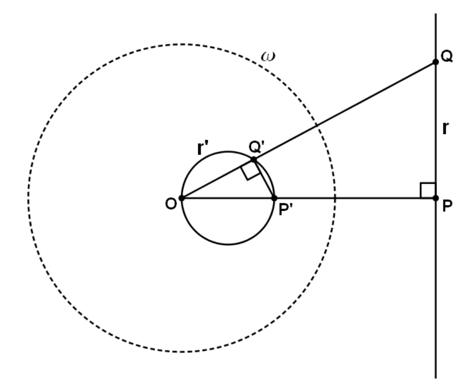
13.2.1 Proposición.
Las inversiones transforman rectas que pasan por el centro O en sí mismas (excluyendo el propio punto O).

Demostración. $P \in \overleftrightarrow{OQ}, P \neq Q \Rightarrow \overleftrightarrow{OQ} = \overleftrightarrow{OP} \Rightarrow i(P) = P' \in \overrightarrow{OP} \subset \overleftrightarrow{OP} = \overleftrightarrow{OQ} \Rightarrow P' \in \overleftrightarrow{OQ}$
Por definición de punto inverso, $P' \in \overrightarrow{OP}$.

13.2.2 Proposición.
Las inversiones transforman rectas que no pasan por O en circunferencias que pasan por O, cuyo diámetro por O es perpendicular a dicha recta.



Demostración. Sea ϖ una circunferencia con centro O y sea r una recta que no pasa por O. Sea P el punto de intersección entre la recta r la recta perpendicular a r que pasa por O. Sea $P' = i(P)$, sea Q cualquier otro punto de la recta, y $Q' = i(Q)$.
Por 13.1.6b, $\Delta QOP \approx \Delta P'OQ'$, luego $\angle OQ'P' \cong \angle OPQ = 90$ luego, por el teorema de Tales, el punto Q' pertenecerá a la circunferencia de centro P y diámetro OP'.

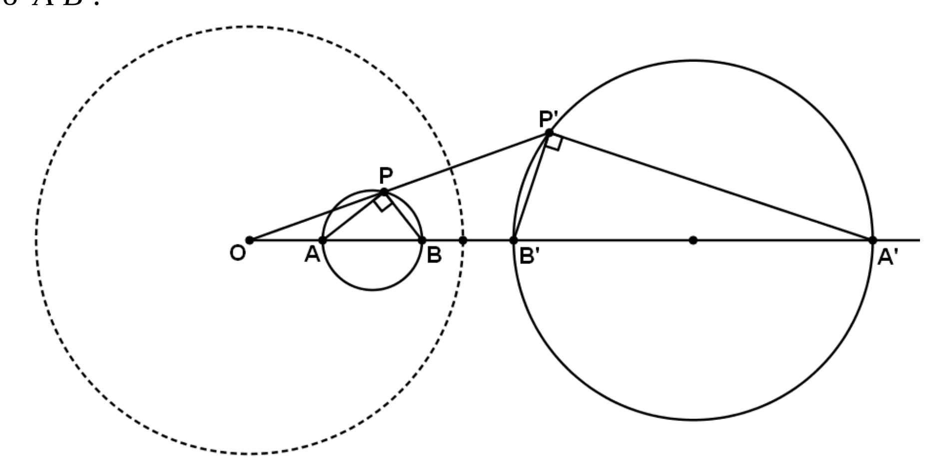


13.2.3 Corolario.
Las inversiones transforman circunferencias que pasan por O en rectas que no pasan por O.

Demostración. Puesto que toda inversión es idempotente, es decir, $i^2 = Id$, transformará circunferencias que pasan por el centro O en rectas que no pasan por O.

13.2.4 Teorema.
Las inversiones transforman circunferencias que no pasan por O en circunferencias que no pasan por O.

Demostración. Sea ϖ_1 una circunferencia de centro O_1 y supongamos que el centro O de la inversión no pertenece a ϖ_1. La semirrecta $\overrightarrow{OO_1}$ cortará ϖ_1 en dos puntos A y B que determinan un diámetro de ϖ_1.
Sea $P \in \varpi_1$. Por ser $\overline{AB}$ diámetro tenemos $\angle APB = 90º$ (10.1.4). Sea P' su inverso.
Aplicando 13.1.6b tenemos $\Delta OPB \approx \Delta OB'P'$ y $\Delta OPA \approx \Delta A'P'$, luego
$\angle OP'B' = \angle OBP$ y $\angle OP'A' = \angle OAP$.
$\angle B'P'A' = \angle OP'A' - \angle OP'B' = \angle OAP - \angle OBP = 180 - \angle PAB - \angle OBP =$
$= 180 - (\angle PAB + \angle OBP) = 180 - \angle APB = 180 - 90 = 90$
Y por tanto, nuevamente por 10.1.4, el punto P' pertenecerá a la circunferencia de diámetro $\overline{A'B'}$.

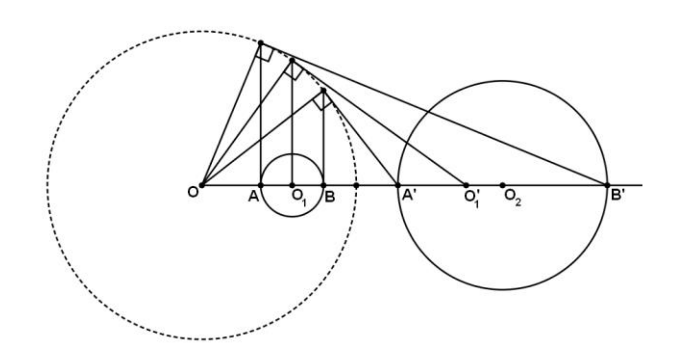


13.2.5 Definición. Circunferencias simétricas.
Diremos que dos circunferencias ω_1 y ω_2 son simétricas respecto de la circunferencia ω cuando una sea la imagen de la otra mediante la inversión por ω:

$$\omega_2 = i_{\varpi}(\omega_2)$$

Es importante tener en cuenta que las inversiones no envían centros a centros:
Si ω_1 es una circunferencia con centro O_1 que no pasa por O, su imagen $i(\omega_1)$ será una circunferencia que no pasa por O, pero su centro O_2 no es la imagen del centro de ω_1:

$$O_2 \neq i(O_1)$$



13.2.6 Teorema. Relación entre radios de circunferencias simétricas.
Sea ϖ_1 una circunferencia de centro O_1 y radio r_1. Su imagen mediante una inversión de centro O con $O \notin \varpi_1$ y radio k será una circunferencia $\varpi_1' = i(\varpi_1)$ con centro O_2 y radio r_2. Se cumple:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{k^2}{\overline{OO_2}^2 - r_2^2}$$

Demostración. Como en el Teorema anterior, trazamos la semirrecta $\overrightarrow{OO_1}$ que pasará por O_2 y cortará ϖ_1 en los puntos A y B.
El segmento $\overline{AB}$ es un diámetro de ϖ_1 porque pasa por su centro O_1.
Acabamos de ver que su imagen $\varpi_1' = i(\varpi_1)$ será una circunferencia de diámetro $\overline{A'B'}$.
Trazamos una recta tangente a ϖ_1 por O, y sea R su punto de tangencia. Puesto que $R \in \varpi_1 \Rightarrow R' \in \varpi_1'$, y por ser OR tangente, también será OR' tangente a ϖ_1'.
Luego $\angle OR'O_2$ es recto.

Aplicando 13.1.6a:

$$OB - OA = \frac{k^2}{O'B'} - \frac{k^2}{O'A'} = \frac{k^2 O'A' - k^2 O'B'}{O'A' \cdot O'B'} = k^2 \frac{O'A' - O'B'}{O'A' \cdot O'B'}$$

Luego

$$\left.\begin{array}{l} 2r_1 = OB - OA \\ 2r_2 = OB' - OA' \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{OB - OA}{OA' - OB'} = \frac{k^2 \dfrac{O'A' - O'B'}{O'A' \cdot O'B'}}{OA' - OB'} = \frac{k^2}{O'A' \cdot O'B'}$$

Aplicando 10.1.11 y el Teorema de Pitágoras:

$$O'A' \cdot O'B' = \overline{OR'}^2 = \overline{OO_2}^2 - \overline{R'O_2}^2 = \overline{OO_2}^2 - r_2^2$$

Con lo que se llega a la igualdad deseada.

Problema propuesto: Problema #22 de **[Prob5]**.

13.2.7 Teorema. La desigualdad de Ptolomeo.
Dados cuatro puntos A, B, C, D se cumple

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$$

y la igualdad solo sucede si A, B, C, D están alineados o son cocíclicos en este orden.

Demostración. Aplicamos una inversión de centro A y radio r cualquiera, y utilizaremos 13.1.6b:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = \frac{r^2}{AB'} \frac{AC \cdot AD}{r^2} C'D' + \frac{r^2}{AD'} \frac{AB \cdot AC}{r^2} C'B' =$$
$$= \frac{AC}{AB'} \cdot AD \cdot C'D' + \frac{AC}{AD'} \cdot AB \cdot C'B' = \frac{AB}{AC'} \cdot AD \cdot C'D' + \frac{AD}{AC'} \cdot AB \cdot C'B' =$$
$$= \frac{AB}{AC'} \cdot AD \cdot (C'D' + C'B')$$

Donde hemos utilizado que $\frac{AC}{AB'} = \frac{AB}{AC'}$ y $\frac{AC}{AD'} = \frac{AD}{AC'}$

Por otro lado, $AC \cdot BD = \frac{r^2}{AC'} \frac{AB \cdot AD}{r^2} B'D' = \frac{AB \cdot AD}{AC'} B'D'$

Luego la igualdad del enunciado se convierte, bajo la inmersión en la conocida desigualdad triangular:

$$C'D' + C'B' \geq B'D'$$

Esta desigualdad solo es una igualdad cuando los puntos B, C, D están alineados, es decir, cuando los puntos originales A, B, C, D son cocíclicos o están alineados.

Nota: La igualdad del enunciado se llama "**Teorema de Ptolomeo**" y se demostró en 10.4.7.

Problema propuesto: En el problema #42 de **[Prob4]** se propone demostrar el Teorema de Ptolomeo mediante inversión.

13.2.8 Definición. El plano inversivo. El punto infinito.
Una inversión i de centro O transforma rectas y circunferencias en rectas y circunferencias, pero no está definido $i(O)$. Es "casi" una biyección en el plano.

Podemos superar todas estas incomodidades técnicas añadiendo a nuestro plano euclídeo convencional un nuevo punto, al que llamaremos "**punto infinito**" y denotaremos por "∞". Este nuevo plano se denomina "**plano inversivo**".

En el plano inversivo se cumplen las siguientes propiedades:
- Todas las rectas pasan por ∞.
- Dos rectas son paralelas si y solo si tienen a ∞ como único punto en común.
- Ninguna circunferencia pasa por ∞.
- En toda inversión i, se cumple $i(O)=\infty$.

En inglés, las palabras "line" (recta) y "circle" (circunferencia) se pueden solapar para formar "**circline**", que define simpáticamente tanto una circunferencia como una recta. Usando este nuevo concepto se cumplen las siguientes propiedades.

- Las rectas son las "circlines" que pasan por ∞.
- Las inversiones transforman "circlines" en "circlines".
- Dados tres puntos diferentes, existe una única "circline" que pasa por los tres.
- Las inversiones son biyecciones que transforman "circlines" en "circlines".

En castellano las palabras recta y circunferencia no se prestan a una unión tan graciosa. Algunos autores proponen "cirunrectas". Otros autores proponen "**circunferencias ampliadas**" para referirse al conjunto unión de las circunferencias y las rectas, puesto que se puede considerar una recta como una circunferencia de radio infinito.

Si la circunferencia de la inversión tiene centro O y radio r, la igualdad

$$OP \cdot OP' = r^2 \Rightarrow OP' = \frac{r^2}{OP}$$

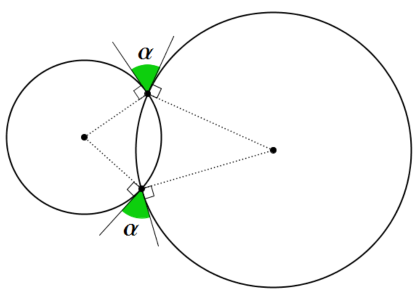
que no estaba definida para $P=O$, ahora se puede ampliar:

$$\infty = \frac{r^2}{0} \ , \ 0 = \frac{r^2}{\infty}$$

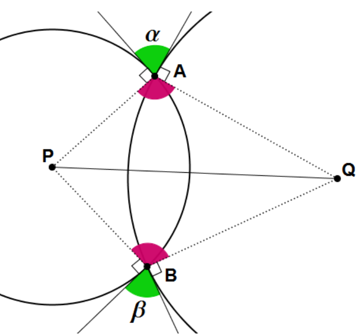
siempre que tengamos muy presente el sentido y contexto de estos nuevos símbolos.

13.3 Ángulo entre circunferencias. Circunferencias ortogonales.

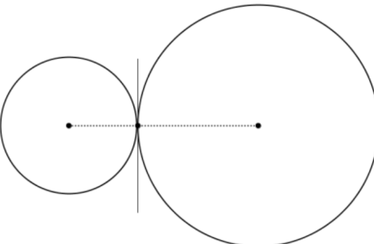
13.3.1 Definición. Ángulo entre dos circunferencias. Circunferencias ortogonales.
Definimos el ángulo entre dos circunferencias que se cortan en dos puntos como el ángulo que determinan las rectas tangentes a dichas circunferencias en los puntos de corte.



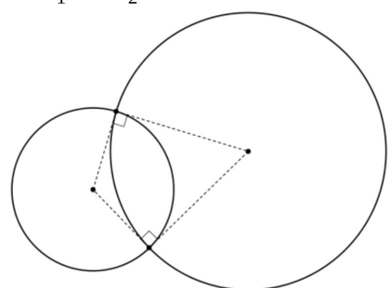
Los dos ángulos determinados son iguales. Efectivamente, llamando P y Q a los centros de las dos circunferencias, y llamando A y B a los dos puntos de corte de las mismas, $\Delta PQA \approx \Delta PQB$ por el criterio SSS, y por tanto $\angle PAQ \cong \angle PBQ$.
Por otro lado, tenemos $90+90+\alpha+\angle PAQ=360$ y $90+90+\beta+\angle PBQ=360$, de lo que se deduce $\alpha=\beta$



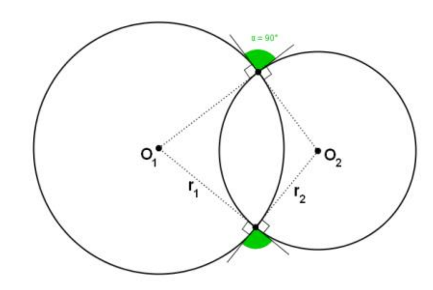
Si las dos circunferencias son **tangentes**, es decir, se cortan en un único punto, diremos que el ángulo que determinan es 0:



Diremos que dos circunferencias secantes ϖ_1 y ϖ_2 son **ortogonales** cuando determinen ángulos rectos, y escribiremos $\varpi_1 \perp \varpi_2$.



13.3.2 Proposición.
Si ϖ_1 tiene centro O_1 y radio r_1, y ϖ_2 tiene centro O_2 y radio r_2,



$$\varpi_1 \perp \varpi_2 \Leftrightarrow \overline{O_1O_2}^2 = r_1^2 + r_2^2$$

Demostración. Basta aplicar el Teorema de Pitágoras.

13.3.4 Proposición.
a) Si una circunferencia ϖ_2 es ortogonal a la circunferencia de la inversión ϖ, entonces queda invariante:

$$i(\varpi_2) = \varpi_2$$

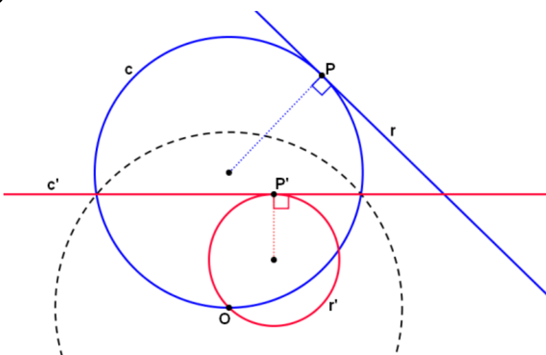
b) Toda circunferencia que contenga un punto y su inverso es ortogonal a la circunferencia de inversión.

Demostración.
a) Supongamos que ϖ_2 es ortogonal a la circunferencia de inversión ϖ. Sean O y r el centro y el radio de ϖ. Sea $A \in \varpi_2$ y sea B el otro punto de corte entre ϖ_2 y la recta $\overleftrightarrow{OA}$. Aplicamos 10.1.11, $OA \cdot OB = OP^2 = r^2$
Luego B es el inverso de A, y por tanto $i(A) \in \varpi_2$.

b) Supongamos que existen $A \in \varpi_2$ y $A' = i(A) \in \varpi_2$. Sean O_2 y r_2 el centro y el radio de ϖ_2. Por definición de puntos inversos y aplicando 10.1.12 y 13.3.2:

$$r^2 = OA \cdot OA' = \overline{OO_2}^2 - r_2^2 \Rightarrow r^2 + r_2^2 = \overline{OO_2}^2 \Rightarrow \varpi_2 \perp \varpi$$

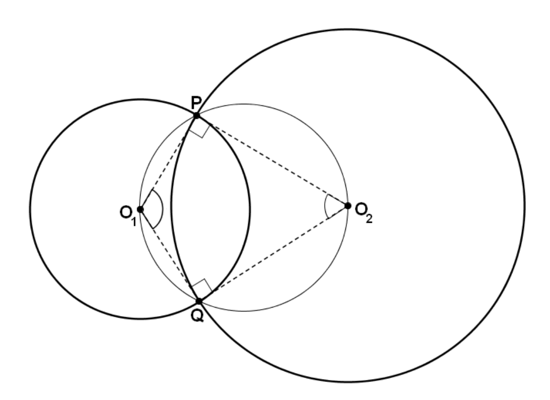
13.3.5 Corolario.
Sea una circunferencia c y una recta r, tangentes en un punto P. Toda inversión con centro O en un punto de dicha circunferencia transformará del conjunto circunferencia c + recta tangente r en un conjunto circunferencia $i(r)$ +recta tangente $i(c)$, tangentes en $i(P)$.



Problema propuesto: Problema #21 de **[Prob5]**.

13.3.6 Proposición.

Los puntos de corte P y Q y los centros O_1 O_2 de dos circunferencias ortogonales determinan un cuadrilátero cíclico, y por tanto sus ángulos por los centros son suplementarios: $\angle PO_1Q + \angle PO_2Q = 180º$



Demostración. Puesto que los ángulos $\angle O_1PO_2$ y $\angle O_1QO_2$ son ángulos opuestos suplementarios: $\angle O_1PO_2 + \angle O_1QO_2 = 90 + 90 = 180$, el cuadrilátero O_1PO_2Q será cíclico (10.4.2), y por lo tanto los otros dos ángulos opuestos también serán suplementrios.

13.4 Inversión y razón doble.

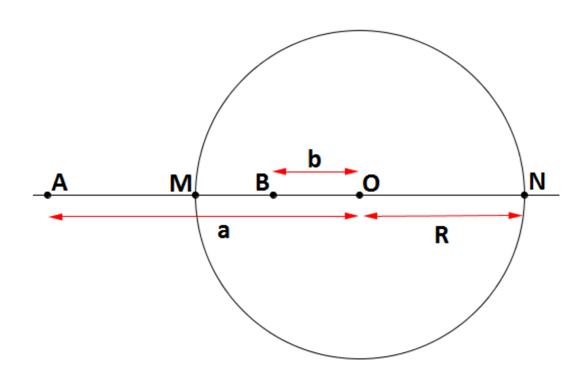
13.4.1 Proposición. La razón doble se conserva bajo inversión.
Si A', B', C', D' son las imágenes de A, B, C, D bajo una inversión, entonces

$$(A', B'; C', D') = (A, B; C, D)$$

Demostración. Aplicaremos la identidad $A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$ de 13.1.6c:

$$(A', B'; C', D') = \frac{A'C' \cdot B'D'}{B'C' \cdot A'D'} = \frac{\frac{r^2}{OA' \cdot OC'} AC \cdot \frac{r^2}{OB' \cdot OD'} BD}{\frac{r^2}{OB' \cdot OC'} BC \cdot \frac{r^2}{OA' \cdot OD'} AD} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = (A, B; C, D)$$

13.4.2 Proposición. Cuaternas armónicas e inversión.
Si (A, M, B, N) es una cuaterna armónica, entonces A y B son inversos respecto de la circunferencia de diámetro MN.



Demostración. $-1 = (A, B; M, N) = \frac{AM \cdot BN}{AN \cdot BM} = \frac{AM}{AN} \cdot \frac{BN}{BM} \Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{MB}{BN}$

Prescindiendo de los signos de los segmentos,

$$AM = a - R,\ AN = a + R,\ MB = R - b,\ BN = R + b$$

Luego

$$\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{BN} \Rightarrow \frac{a-R}{a+R} = \frac{R-b}{R+b} \Rightarrow (a-R)(R+b) = (a+R)(R-b) \Rightarrow$$
$$aR + ab - R^2 - Rb = aR - ab + R^2 - Rb \Rightarrow ab - R^2 = -ab + R^2 \Rightarrow$$
$$2ab = 2R^2 \Rightarrow ab = R^2$$

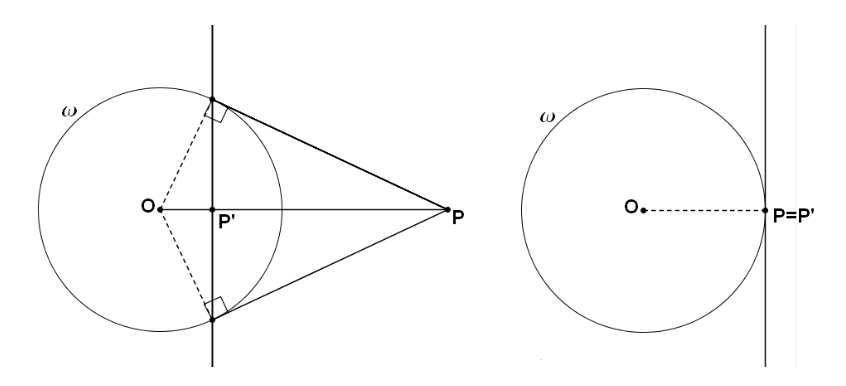
Nota: Este mismo resultado se deducirá en 15.2.7 en el contexto de las simedianas.

13.5 Polos y polares.

13.5.1 Definición. Polos y polares.

Dada una circunferencia ϖ de centro O, sea P un punto cualquiera y P' su inverso respecto a ϖ. Definimos la recta **polar de P** como la recta perpendicular a OP que pasa por P'.
Si P pertenece a la circunferencia, entonces $P' = P$ y su polar es la tangente a ϖ por P.

Aplicando 13.1.2 obtenemos una primera caracterización de la polar de un punto P:
Es la recta que pasa por los puntos de corte entre ϖ y las tangentes a ϖ por P.



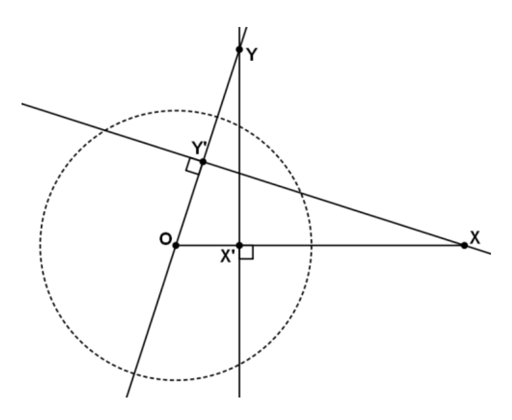
En 13.5.5 veremos una segunda caracterización mediante cuaternas armónicas.

Nota: No existe la polar del centro O, pero en el contexto de un plano proyectivo (ver Tema 19), definimos la polar del centro O como la recta del infinito r_∞.

Dada una recta r que no pasa por O, sea $P' \in r$ tal que $OP' \perp r$, y sea P el inverso de P'. Está claro que r es la polar de P', y diremos que P es el **polo de r**. Está claro que $P = polar(r) \Leftrightarrow r = polo(P)$.

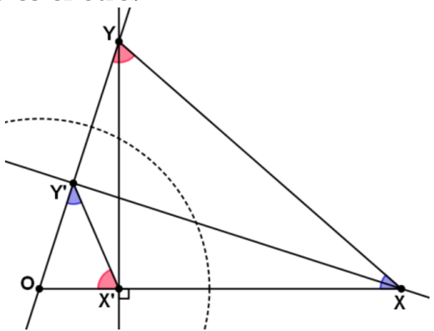
13.5.2 Teorema. Teorema de La Hire. Puntos conjugados.

Un punto X pertenece a la polar de un punto Y si y solo si Y pertenece a la polar de X.



Diremos que dos puntos son **conjugados** cuando uno pertenezca a la polar del otro.

Demostración. Supongamos que Y pertenece a la polar de X. Sabemos por 13.1.6 que $\angle OX'Y' = \angle OYX$ y por tanto podemos aplicar 8.3.5: $\angle XX'Y = \angle XY'Y$ y por lo tanto uno será recto si y solo si lo es el otro.



13.5.3 Corolario.

a) Dados dos puntos P y Q, $polar(P) \cap polar(Q) = polo(\overleftrightarrow{PQ})$

b) Dadas dos rectas r y s, $polar(r \cap s) = \overleftrightarrow{polo(r)\ polo(s)}$.

c) Si A, B y C están alineados, sus polares a, b y c son concurrentes.

d) Si a, b y c son tres rectas concurrentes, sus polos A, B y C están alineados.

Demostración. Se deducen directamente del Teorema de La Hire anterior.

a) Sea $R = polar(P) \cap polar(Q)$. $R \in polar(P) \Rightarrow P \in polar(R)$, y $R \in polar(Q) \Rightarrow Q \in polar(R)$, luego $polar(R) = \overleftrightarrow{PQ}$.

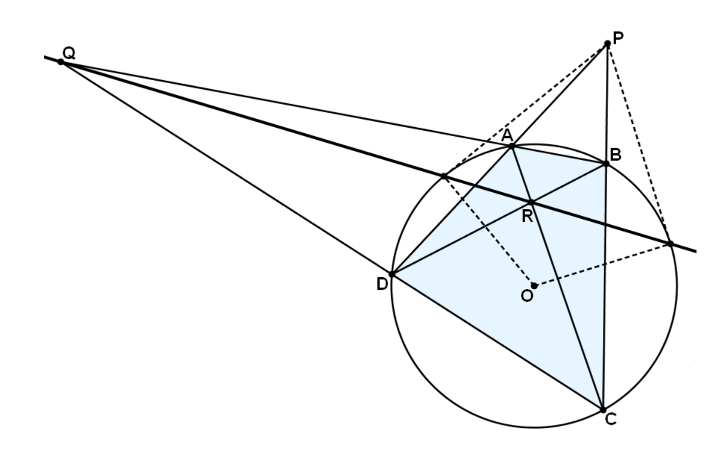
b) Sea $R = r \cap s$. $R \in r = polar(P) \Rightarrow P \in polar(R)$
$R \in s = polar(Q) \Rightarrow Q \in polar(R)$, luego
$P, Q \in polar(R) \Rightarrow PQ = polar(R) \Rightarrow R = polo(PQ) = R = r \cap s$

c) Sea r la recta que contiene A, B y C y sea R su polo asociado. Tenemos $A \in r \Rightarrow R \in a$, y de la misma forma $R \in b$ y $R \in c$, es decir, las rectas a, b y c concurren en el punto R.

d) Es un razonamiento similar al del apartado anterior.

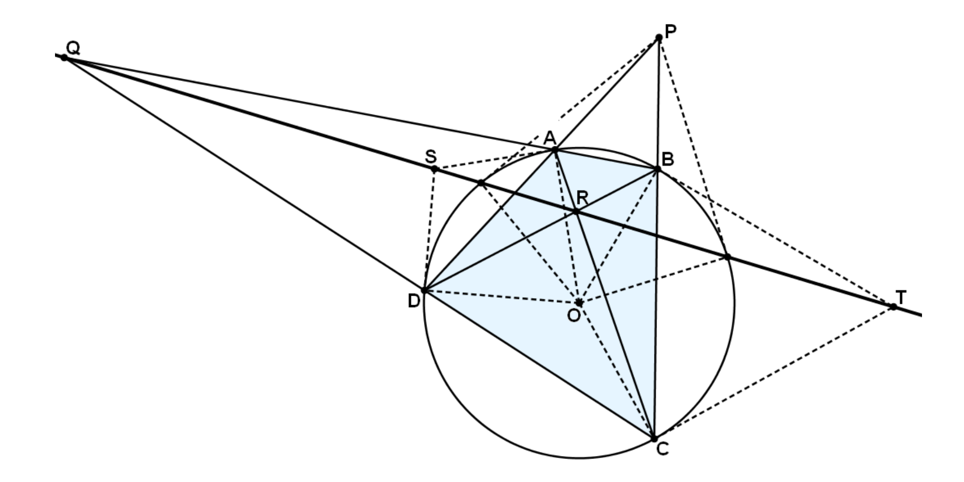
13.5.4 Proposición. Polares y cuadriláteros cíclicos.

Dado un cuadrilátero cíclico ABCD, la polar de $P = AD \cap BC$ es la recta que pasa por $Q = AB \cap CD$ y $R = AC \cap BD$.



Nota: De esto se deduce directamente que $QR \perp OP$.

Demostración. Sean T y S las polares respectivas de las recta BC y AD.
Puesto que $P = BC \cap AD$, se deduce que la polar de P es la recta $\overleftrightarrow{ST}$.

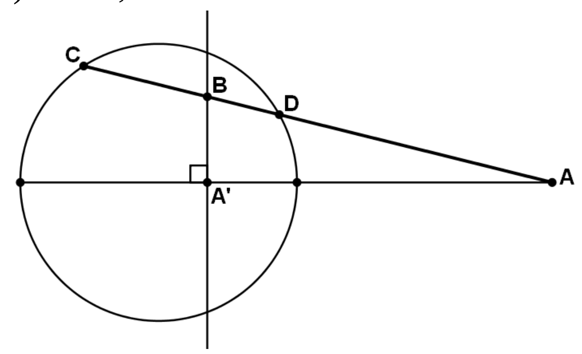


Aplicando el Corolario al Teorema de Pascal (12.7.2), los puntos Q, S, R y T están alineados , es decir, $\overleftrightarrow{ST} = \overleftrightarrow{QR}$, tal y como queríamos ver.

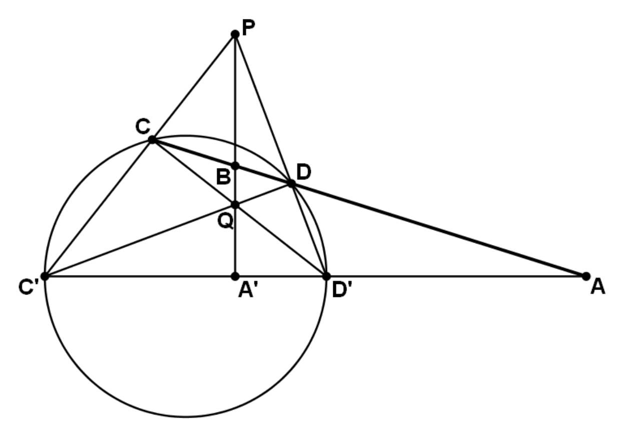
Problemas propuestos: Problema #15 y #20 de **[Prob5]**.

13.5.5 Proposición. Caracterización de polares mediante cuaternas armónicas.
Si la recta determinada por dos puntos conjugados A y B corta la circunferencia de inversión ϖ en los puntos C y D, entonces $(A,B;C,D) = -1$.
Recíprocamente, si $(A,B;C,D) = -1$ con $C,D \in \varpi$, entonces A y B son conjugados.

O, dicho de otro modo, la polar de un punto A es el lugar geométrico de aquellos puntos B tales que $(A,B;C,D)$ con $C,D = AB \cap \varpi$.



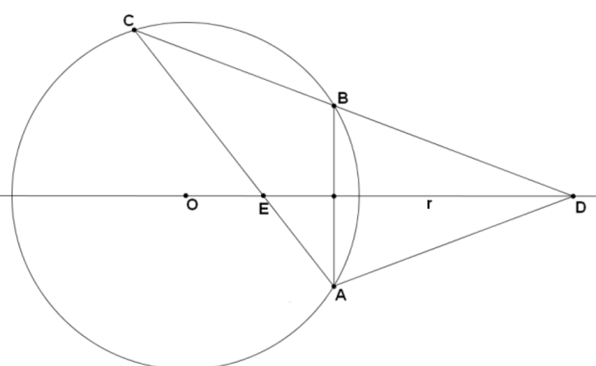
Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $(C,D;B,A) = -1$. Sea A' el inverso de A y sean C' y D' los puntos de corte entre AA' y la circunferencia.
Sabemos que AA' pasa por su centro, luego $C'D'$ es un diámetro de ϖ.
Por 13.1.7 sabemos que $(C',D';A',A) = -1$.
Sea $P = CC' \cap DD'$ y $Q = DC' \cap CD'$. Aplicando 13.5.4 al cuadrilátero cíclico CDD'C' tenemos $polar(A) = PQ = A'P$.



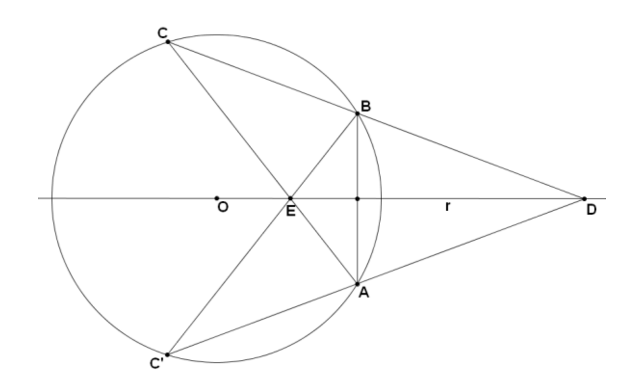
De $(C,D;B,A)=-1$ y $(C',D';A',A)=-1$, proyectando por P y teniendo en cuenta la unidad del cuarto armónico, deducimos que $B=CD\cap A'P\in polar(A)$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $B\in polar(A)$. Entonces $(C,D;B,A)=-1$ aplicando 12.6.2b.

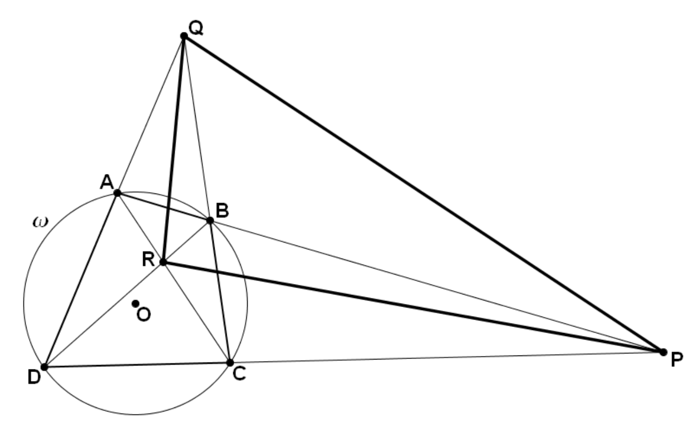
13.5.6 Proposición. Puntos inversos y cuerdas.
Sean A, B y C tres puntos en una circunferencia ϖ. Sea r la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, y sean $D=BC\cap r$ y $E=AC\cap r$. Entonces D y E son puntos inversos el uno del otro.



Demostración. Sea C' el simétrico de C respecto de r. Tenemos un cuadrilátero cíclico BCC'A en el que podemos aplicar 13.5.4 para deducir que la polar de D es la recta que pasa por E y por el punto impropio $CC'\cap AB$, es decir, la recta que pasa por E y es perpendicular a r. En particular, E es el inverso de D respecto de ϖ.



13.5.7 Teorema. Teorema de Brocard.
Dado cualquier cuadrilátero cíclico ABCD, inscrito en una circunferencia ϖ de centro O, que completaremos con los puntos $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap CD$ y $R = AC \cap BD$, el triángulo ΔPQR es **autopolar**, es decir, P es el polo de $\overleftrightarrow{QR}$, Q es el polo de $\overleftrightarrow{PR}$ y R es el polo de $\overleftrightarrow{PQ}$, siempre respecto de ϖ. Además, el punto O será el ortocentro de ΔPQR.



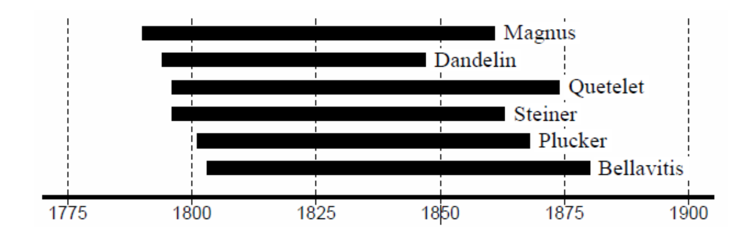
Demostración. Sean $X = QR \cap AB$ y $Y = QR \cap CD$. Por 12.5.3 tenemos $(A,B;X,P) = -1$ y $(D,C;Y,P) = -1$, luego por 13.5.5 los puntos X e Y pertenecen a la polar de P, y por tanto $polar(P) = XY = QR$.
De la misma forma se demuestra que $polar(Q) = PR$, y por tanto, por 13.5.3a,
$R = QR \cap PR = polar(P) \cap polar(Q) = polo(PQ) \Rightarrow polar(R) = PQ$

La recta OR será perpendicular a su polar PQ, luego será altura del triángulo ΔPQR. De la misma forma se verifica que son alturas OQ y OP, y por tanto O es el ortocentro de ΔPQR.

Nota histórica.

Según dice **Howard Eves** (Eves, H. W. A Survey of Geometry. Boston, MA: Allyn and Bacon, 1972) la historia de la inversión es compleja. **François Vièta** ya hablaba de puntos inversamente relacionados en el siglo XVI. **Robert Simson**, en su restauración de la obra perdida *Lugares planos* de Apolonio incluyó, basándose en un comentario hecho por Pappus, uno de los teoremas básicos de la teoría de inversión, el de que el inverso de una recta o una circunferencia es también una recta o una circunferencia. **Simon A. J. L'Huilier** (1750-1840) en sus *Eléments d'analyse géométrique et d'anlyse algebrique appliquées à la recherche des lieux géometriques* (París y Génova, 1808) dio casos especiales de este teorema. Pero la inversión como una transformación para simplificar el estudio de figuras data de tiempos más recientes, y fue utilizada independientemente por varios autores. Bützberger remonta el uso de la inversión a 1824 por parte de **Jakob Steiner** (1796-1863), un matemático alemán de origen suizo. Steiner está considerado como el más grande de los geómetras de la época moderna, tal como Apolonio lo fue en la antigüedad. Sentía una gran aversión por los métodos analíticos, y en sus manos la geometría sintética hizo progresos comparables a los que había hecho anteriormente el análisis.

Patterson (Patterson, Boyd C.: "The Origins of the Geometric Principle of Inversion". Isis, Vol. 19, No. 1. (Apr., 1933), págs. 154-180) apunta la siguiente cronología:



1822 Dandelin publica su Tableau Comparatif para la hipérbola y la focal.
1823 Quetelet compara caústicas secundarias y cónicas a la manera de Dandelin
1824 Steiner habla de inversión en un manuscrito no publicado hasta 1913.
1825 Dandelin deduce la relación $r\,r' = R^2$ correspondiente a radio vectores de lemniscatas y cónicas, dando lugar a una nueva construcción de aquellas.
1825 Quetelet define la inversa de una curva.
1831 Plücker explica sus neues *Übertragungs-Princip*, que fue publicado en 1834
1836 Bellavitis dio una exposición completa de la teoría de las figuras inversas.
1845 Lord Kelvin la aplica a sus estudios sobre elasticidad.

Fuente: "Inversión en Olimpiadas. Aplicación de la Inversión a la Resolución de Problemas", por **Francisco J. García Capitán**, 2005

Problemas propuestos para este tema.

Problema #2 de **[Prob5]**

Bibliografía de este tema.

14 Transformaciones euclídeas.

14.1 Transformaciones euclídeas e isometrías.

14.1.1 Definición. Transformación euclídea.
Llamaremos transformación euclídea a toda transformación del plano (es decir, una biyección) que conserve la incidencia, el orden y la congruencia, es decir, que cumpla las siguientes propiedades:

a) φ es una biyección.
b) φ convierte rectas en rectas.
c) φ preserva el orden: $A*B*C \Rightarrow \varphi(A)*\varphi(B)*\varphi(C)$.
d) φ preserva la congruencia de segmentos: $\overline{AB} \Rightarrow \overline{\varphi(A)\varphi(B)}$.
e) φ preserva la congruencia de ángulos: $\angle\alpha \cong \angle\varphi(\alpha)$

Observaciones.
a) La identidad $i:\Omega \to \Omega$ es una transformación rígida.
b) La composición de dos transformaciones rígidas es una transformación rígida.
c) El conjunto de transformaciones rígidas con la composición tiene estructura de grupo.

14.1.1 Definición. Isometría.
Una isometría es una función $f: IE \to IE$ del plano euclídeo en sí mismo biyectiva y que conserva la distancia, esto es:

$$\forall P, Q \in IE, \left|\overline{f(P)f(Q)}\right| = \left|\overline{PQ}\right|$$

14.1.2 Proposición.
Las isometrías conservan la congruencia:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Rightarrow \overline{f(A)f(B)} \cong \overline{f(C)f(D)}$$

Demostración. Aplicamos la propiedad L2 de la medida de segmentos:
$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Rightarrow \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right| \Rightarrow \left|\overline{f(A)f(B)}\right| = \left|\overline{f(C)f(D)}\right| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{f(A)f(B)} = \overline{f(C)f(D)}$$

14.1.3 Proposición.
Las isometrías mantienen el orden:
$$A*B*C \Leftrightarrow f(A)*f(B)*f(C)$$

Demostración. Aplicamos la propiedad L1 de la medida de segmentos:
$$A*B*C \Leftrightarrow \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right| \Leftrightarrow \left|\overline{f(A)f(C)}\right| = \left|\overline{f(A)f(B)}\right| + \left|\overline{f(B)f(C)}\right| \Leftrightarrow$$
$$f(A)*f(B)*f(C)$$

14.1.4 Proposición.
Las isometrías transforman rectas en rectas:

$$\text{Sea } r = \overleftrightarrow{AB}\text{. Entonces } f(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{f(A)f(B)}$$

Demostración. Veamos $f(\overleftrightarrow{AB}) \subset \overleftrightarrow{f(A)f(B)}$.
Sea $P \in f(\overleftrightarrow{AB}) \Leftrightarrow P = f(Q), Q \in \overleftrightarrow{AB}$.
Si $Q = A$ entonces $P = f(A) \in \overleftrightarrow{f(A)f(B)}$, y de la misma forma si $Q = B$.
Si $Q \neq A, B$ entonces se debe dar uno de los tres casos $Q * A * B$, $A * Q * B$ o $A * B * Q$.
Si $Q * A * B$, aplicando la proposición anterior $f(Q) * f(A) * f(B)$ y por tanto $P = f(Q) \in \overleftrightarrow{f(A)f(B)}$ por el Axioma B1.
De la misma manera se demuestran los otros dos casos.
La inclusión contraria $\overleftrightarrow{f(A)f(B)} \subset f(\overleftrightarrow{AB})$ se demuestra de forma similar.

14.1.5 Corolario.
Las isometrías conservan la incidencia:

$$P \in r \Leftrightarrow f(P) \in f(r)$$

Demostración. Es una aplicación directa de la proposición anterior.

14.1.6 Proposición.
Las isometrías conservan la congruencia de ángulos:

$$\angle ABC \cong \angle f(A)f(B)f(C)$$

Demostración. Consideremos los triángulos ΔABC y $\Delta f(A)f(B)f(C)$.
$\left|\overline{f(A)f(B)}\right| = \left|AB\right|$ por ser f una isometría y por tanto $\overline{f(A)f(B)} \cong \overline{AB}$.
Y de la misma forma $\overline{f(A)f(C)} \cong \overline{AC}$ y $\overline{f(B)f(C)} \cong \overline{BC}$.
Luego, por el criterio SSS de congruencia de triángulos, $\Delta ABC \cong \Delta f(A)f(B)f(C)$.
Y por tanto $\angle ABC \cong \angle f(A)f(B)f(C)$.

14.1.7 Corolario.

$$\angle ABC \cong \angle DEF \Rightarrow \angle f(A)f(B)f(C) \cong \angle f(D)f(E)f(F)$$

Demostración. $\angle f(A)f(B)f(C) \cong \angle ABC \cong \angle DEF \cong \angle f(D)f(E)f(F)$.

14.1.8 Proposición.
Si f es una isometría, su función inversa f^{-1} también es una isometría.

Demostración. $A = f(A')$ y $B = f(B')$ para ciertos puntos $A' = f^{-1}(A)$ y $B' = f^{-1}(B)$.
Luego $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{f(A')f(B')}\right| = \left|\overline{A'B'}\right| = \left|\overline{f^{-1}(A')f^{-1}(B')}\right|$, como queríamos ver.

14.1.9 Proposición.
La composición de dos isometrías es una isometría.

Demostración. Sean f y g dos isometrías. Claramente la composición de dos biyecciones es una biyección. Y además, las longitudes quedan invariantes:

$$\left|\overline{f(g(A))f(g(B))}\right| = \left|\overline{g(A)g(B)}\right| = \left|\overline{AB}\right|.$$

14.1.10 Proposición.
La función identidad

$$Id : \Omega \to \Omega$$
$$A \mapsto A$$

Es una isometría.

Demostración. Claramente es una biyección y conserva las distancias:
$\left|\overline{f(A)f(B)}\right| = \left|\overline{AB}\right|$.

14.1.11 Corolario.
El conjunto de isometrías tiene estructura de grupo.

14.1.12 Definición. Punto fijo de una isometría.
Diremos que $P \in IE$ es un punto fijo para la isometría $f : IE \to IE$ cuando $f(P) = P$.

14.1.13 Proposición.
Si una isometría deja fijos dos puntos de una recta, toda la recta es de puntos fijos.

Demostración. Sea una isometría $f : IE \to IE$ y supongamos que $A, B \in IE$ puntos fijos.
Sea $C \in \overleftrightarrow{AB}$. Queremos ver que $f(C) = C$.
Se pueden dar tres casos: $C * A * B$, $A * C * B$ o $A * B * C$ (Axioma B3). Lo probaremos para el caso $A * C * B$, los otros dos casos se demuestran de forma similar.
Supongamos pues que $A * C * B$. Sabemos que las isometrías mantienen el orden y transforman rectas en rectas, por lo tanto $A * f(C) * B$.
Se cumple $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{f(A)f(C)}\right| = \left|\overline{Af(C)}\right|$, y por tanto $C = f(C)$, pues C es el único punto de la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ a dicha distancia de A.

14.1.14 Proposición.
La identidad es la única isometría que deja fijos tres puntos no colineales.

Demostración. Sean $A, B, C \in IE$ tres puntos no colineales y supongamos que son puntos fijos para la isometría $f : IE \to IE$. Claramente la Identidad cumple esta condición, veamos que es la única isometría posible con dicha condición.
Puesto que deja fijos los tres puntos A, B y C, por la proposición anterior serán de puntos fijos las rectas que éstos determinan: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.

Sea $P \in IE$. Si P pertenece a una de estas tres rectas anteriores, entonces es fijo. Supongamos lo contrario. Sea Q un punto cualquiera $A * Q * B$ (Axioma B2) y consideremos la recta $\overleftrightarrow{PQ}$.

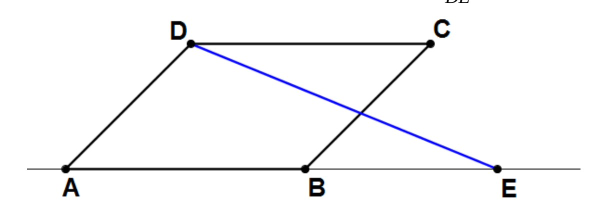
Por el Teorema de Pasch esta recta pasará por $\overline{AC}$ o por $\overline{BC}$, con lo cual contendrá un segundo punto fijo, y por la proposición anterior, será una recta de puntos fijos. Puesto que P pertenece a esta recta, también será fijo, tal y como queríamos ver.

14.1.15 Proposición.
Supongamos que dos isometrías $f, g : IE \to IE$ coinciden en tres puntos no colineales: $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ y $f(C) = g(C)$. Entonces $f = g$.

Demostración. Consideremos la isometría $f^{-1} \circ g$ (ya hemos demostrado anteriormente que es una isometría).
$(f^{-1} \circ g)(A) = f^{-1}(g(A)) = f^{-1}(f(A)) = A$ y de la misma forma $(f^{-1} \circ g)(B) = B$ y $(f^{-1} \circ g)(C) = C$. En consecuencia, y por la proposición anterior, $f^{-1} \circ g = Id$ y por lo tanto f^{-1} es la inversa de f y g a la vez, y esto sólo puede suceder si $f = g$, pues una función queda totalmente determinada por su función inversa.

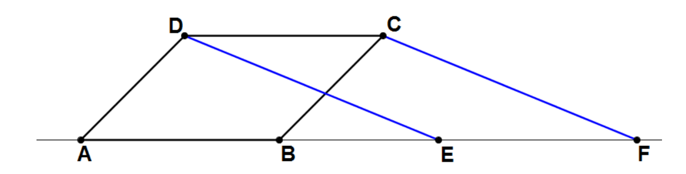
14.2 Traslaciones.

14.2.1 Lema.
Sea $ABCD$ un paralelogramo y $A*B*E$. Entonces $C \underset{DE}{\not\approx} B$.



Demostración. $A*B*E \Rightarrow A \underset{BD}{\not\approx} E$ y $A \underset{BD}{\not\approx} C$ pues las diagonales de un paralelogramo se cortan en un punto, de lo que deducimos que $E \underset{BD}{\approx} C$, por lo tanto $\lozenge BECD$ es un trapecio y por tanto convexo (2.8.14). Aplicando 2.8.12 sus diagonales se cortan en un punto. Luego $\overline{BC}$ se corta con $\overline{DE}$ y por tanto con $\overleftrightarrow{DE}$.

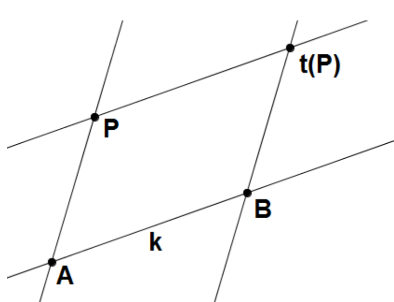
14.2.2 Lema.
Sea $ABCD$ un paralelogramo y $A*B*E$. Sea $F \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que $\overleftrightarrow{CF} // \overleftrightarrow{DE}$.
Entonces $B*E*F$, y por tanto $A*B*E*F$.



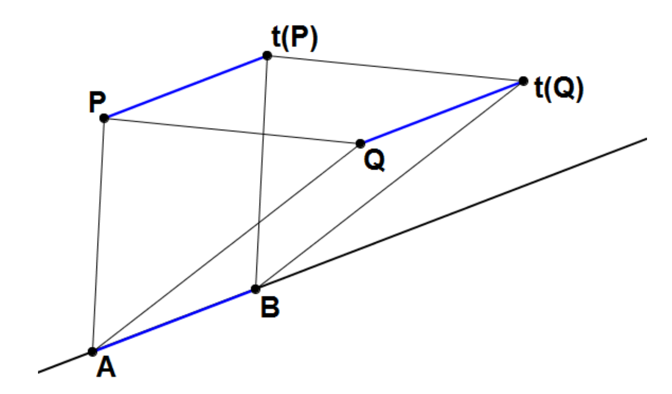
Demostración. Por el lema anterior sabemos que $C \underset{DE}{\not\approx} B$. Si $F \in \overrightarrow{EB}$ entonces $F \underset{DE}{\approx} B$ y por tanto $F \underset{DE}{\not\approx} C$, luego $\overline{FC} \cap \overleftrightarrow{DE} \neq \varnothing$ y por tanto $\overleftrightarrow{FC} \cap \overleftrightarrow{DE} \neq \varnothing$ contradiciendo la hipótesis $\overleftrightarrow{CF} // \overleftrightarrow{DE}$. Así pues, $F \in op(\overrightarrow{EB}) \Rightarrow B*E*F$.

14.2.3 Definición. Translación.
Sea una semirrecta $\overrightarrow{AB}$ y un número real $k > 0$. Definimos la translación asociada a $\overrightarrow{AB}$ y k de la siguiente manera:
Antes de nada, reasignamos el punto B de forma que $|\overline{AB}| = k$.

Primera parte: Para cualquier punto $P \notin \overleftrightarrow{AB}$:
Trazamos la paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por P y la paralela a $\overleftrightarrow{AP}$ por B. $t(P)$ será el punto de intersección de estas rectas.



Veamos que esta función, así definida, es una isometría:
Sean $P,Q \notin \overleftrightarrow{AB}$. Queremos ver que $\left|\overline{PQ}\right| = \left|\overline{t(P)t(Q)}\right|$.
Hemos construido dos paralelogramos: $\lozenge ABt(P)P$ y $\lozenge ABt(Q)Q$.
Los lados opuestos de los paralelogramos son congruentes, por lo tanto
$Pt(P) \cong AB$ y $Qt(Q) \cong AB$, luego $Pt(P) \cong Qt(Q)$.

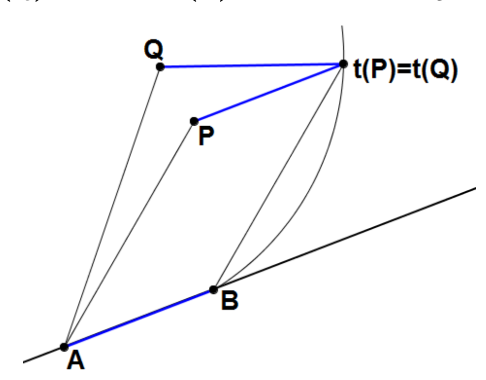


Por otro lado, $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{Pt(P)}$ y $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{Qt(Q)}$, y por tanto $\overleftrightarrow{Pt(P)} // \overleftrightarrow{Qt(Q)}$.
Así pues, $PQt(Q)t(P)$ es un paralelogramo, pues tiene dos lados opuestos paralelos y congruentes (7.1.3), luego los otros dos lados son también congruentes (7.1.2c):
$\overline{PQ} \cong \overline{t(P)t(Q)}$, y por tanto $\left|\overline{PQ}\right| \cong \left|\overline{t(P)t(Q)}\right|$.

Observación: La demostración anterior no es válida cuando $\overleftrightarrow{QP} // \overleftrightarrow{AB}$ y debemos construir un razonamiento específico para este caso, en el que tendremos que tener en cuenta el orden de los puntos.

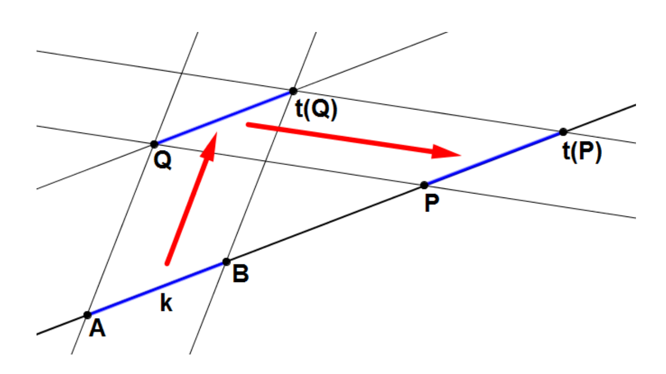
Esta función es inyectiva en $IE - \left\{\overleftrightarrow{AB}\right\}$:

Sean $P,Q \in IE - \left\{\overleftrightarrow{AB}\right\}$. Supongamos que $t(P) = t(Q)$.
$\overleftrightarrow{Qt(Q)} // \overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{Pt(P)} // \overleftrightarrow{AB}$ por construcción, luego $\overleftrightarrow{Qt(Q)} // \overleftrightarrow{Pt(P)}$, y puesto que tienen un punto en común se deduce que $\overleftrightarrow{Qt(Q)} = \overleftrightarrow{Pt(P)}$.
De la misma manera, $\overleftrightarrow{AQ} // \overleftrightarrow{Bt(Q)}$ y $\overleftrightarrow{AP} // \overleftrightarrow{Bt(P)}$, y puesto que $t(P) = t(Q)$, $\overleftrightarrow{AQ} // \overleftrightarrow{AP}$, y puesto que tienen el punto A en común, $\overleftrightarrow{AQ} = \overleftrightarrow{AP}$.
Por último $Q = \overleftrightarrow{AQ} \cap \overleftrightarrow{Qt(Q)} = \overleftrightarrow{AP} \cap \overleftrightarrow{Pt(P)} = P$, es decir, $Q = P$.

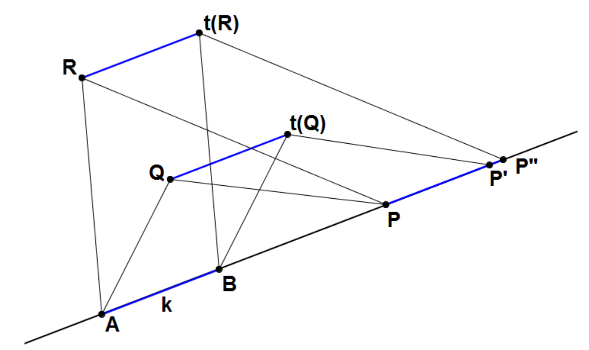


Esta función es suprayectiva en $IE - \{\overleftrightarrow{AB}\}$:
Sea $Q \in IE - \{\overleftrightarrow{AB}\}$ un punto cualquiera. Queremos ver que existe un $P \in IE - \{\overleftrightarrow{AB}\}$ tal que $t(P) = Q$.
Tomamos un punto auxiliar $R \in IE - \{\overleftrightarrow{AB}\}$, $R \neq Q$. Si $t(R) = Q$ ya hemos acabado. Si no, sea r la recta paralela a $\overleftrightarrow{Rt(R)}$ que pasa por Q y sea s la recta paralela a $\overleftrightarrow{t(R)Q}$ que pasa por R. Sea $P = r \cap s$. Para ver que $t(P) = Q$ sólo hace falta aplicar el lema anterior.

Segunda parte: Si $P \in \overleftrightarrow{AB}$.
Tomamos un punto cualquiera $Q \notin \overleftrightarrow{AB}$ y calculamos $t(Q)$ de la manera anterior. Y por paralelismo sobre $\overrightarrow{Qt(Q)}$ calculamos $t(P)$:



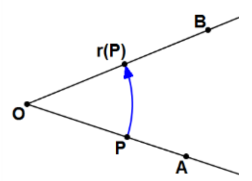
Esta construcción no depende del punto Q escogido. En efecto,



Supongamos que, dado un punto cualquiera $Q \notin \overleftrightarrow{AB}$, obtenemos mediante el proceso anterior el punto P', y tomamos otro punto cualquiera $R \notin \overleftrightarrow{AB}$ mediante el cual, por el mismo proceso, obtenemos el punto P''.
Por el lema anterior, tendremos $P', P'' \in \overrightarrow{BP}$ y $|BP'| = |BP''|$, y por tanto $P' = P''$.

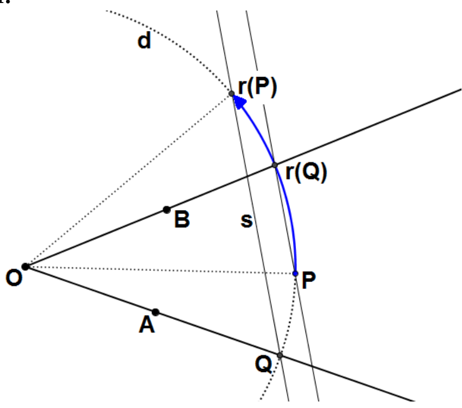
14.3 Rotaciones.

14.3.1 Definición. Rotación.
Definimos una rotación en el plano euclídeo de la siguiente manera:
Sean dos semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ compartiendo el mismo extremo O.
Definimos $r(O)=O$.
Para cualquier $P\in\overrightarrow{OA},\ P\neq O$, definimos $r(P)$ como el único punto $Q\in\overrightarrow{OB}$ tal que $\left|\overline{OQ}\right|=\left|\overline{OP}\right|$:



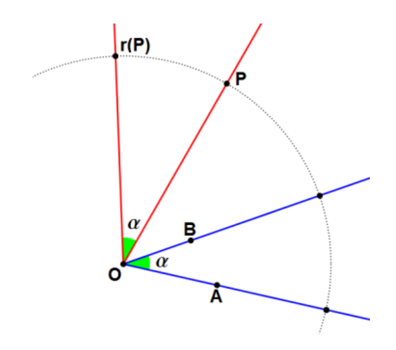
Si $P\notin\overrightarrow{OA}$, localizamos el punto $Q\in\overrightarrow{OA}$ tal que $\left|\overline{OQ}\right|=\left|\overline{OP}\right|$. Calculamos $r(Q)$ de la manera anteriormente descrita. Los puntos P , Q y $r(Q)$ están a la misma distancia de O. Sea d la circunferencia de centro O y radio $\left|\overline{OP}\right|$.

Determinamos la única recta s que pasa por Q y es paralela a $\overleftrightarrow{P\,r(Q)}$. Esta recta s y la circunferencia d tendrán dos puntos en común, uno de ellos es Q. Definimos $r(P)$ como el otro punto de intersección.



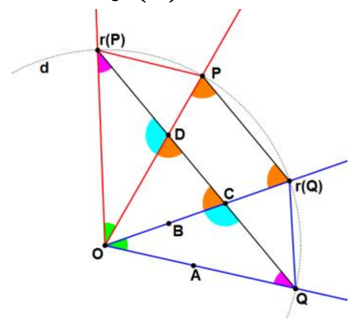
14.3.2 Proposición.
En una rotación determinada por las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, el ángulo formado por un punto diferente del origen y su imagen es siempre constante e igual al ángulo entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$:

$$\left|\angle POr(P)\right|=\left|\angle AOB\right|$$



Demostración. Si $P \in \overrightarrow{OA}$ no hay nada que demostrar. Supongamos que $P \notin \overrightarrow{OA}$. Debemos considerar tres casos independientes: Cuando P está en el interior de $\angle AOB$, cuando está en $\angle AOB$ y cuando está en el exterior de $\angle AOB$. Aquí veremos el tercer caso.

Sea $C = \overrightarrow{Or(Q)} \cap \overleftrightarrow{Qr(P)}$ y $D = \overrightarrow{OP} \cap \overleftrightarrow{Qr(P)}$.



$\overline{OQ} \cong \overline{Or(P)}$, luego $\Delta OQr(P)$ es un triángulo isósceles en O, y por tanto $\angle OQr(P) \cong \angle Or(P)Q$.

De la misma forma, $\overline{Or(Q)} \cong \overline{OP}$, luego $\Delta O\Pr(Q)$ es un triángulo isósceles en O, y por tanto $\angle Or(Q)P \cong \angle O\Pr(Q)$.

Por paralelismo, $\angle Or(Q)P \cong \angle OCD$, y $\angle O\Pr(Q) \cong \angle ODC$, y por tanto $\angle ODC \cong \angle OCD$.

Luego sus complementarios también son congruentes: $\angle ODr(P) \cong \angle OCQ$.

Aplicando el criterio AA, deducimos que los triángulos ΔOQC y $\Delta Or(P)D$ son semejantes, y por tanto $\angle AOB = \angle QOC \cong \angle DOr(P) = \angle POr(P)$.

14.3.3 Proposición.

Las rotaciones conservan las distancias.

Demostración. Sea r una rotación de centro O. Sean $P, Q \in IE$ dos puntos cualquiera del plano y sean $P' = r(P)$ y $Q' = r(Q)$.

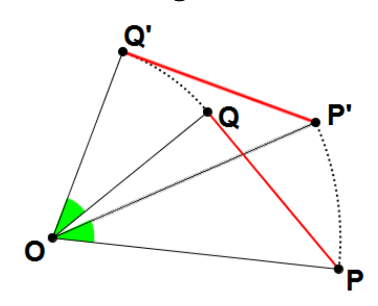
Supongamos el caso general en que P, Q y O son tres puntos no alineados (los otros casos quedan como ejercicio).

Sabemos, por la construcción de la rotación, que $|\overline{OP}| = |\overline{OP'}|$ y $|\overline{OQ}| = |\overline{OQ'}|$.

Demostraremos que $|\angle POQ| = |\angle P'OQ'|$ con lo que aplicando el criterio SAS de congruencia de triángulos deduciremos que ΔPOQ y $\Delta P'OQ'$ son congruentes, y por tanto, en particular, $|\overline{PQ}| = |\overline{P'Q'}|$.

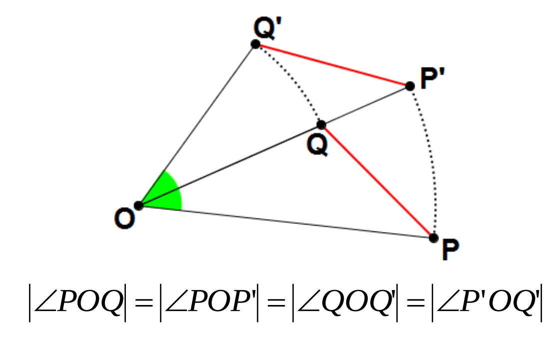
Por la proposición anterior, sabemos que $|\angle POP'| = |\angle QOQ'|$

Hay que estudiar tres casos por separado:
Primer caso: Q no está en el interior del ángulo $\angle POQ$:



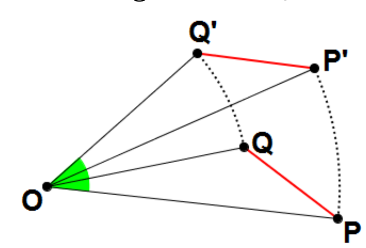
$$|\angle POQ| = |\angle POP'| + |\angle P'OQ| = |\angle QOQ'| + |\angle P'OQ| = |\angle P'OQ'|$$

Segundo caso: Q está en la semirrecta $\overrightarrow{OP'}$:



$$|\angle POQ| = |\angle POP'| = |\angle QOQ'| = |\angle P'OQ'|$$

Tercer caso: Q está en el interior del ángulo $\angle POQ$:



$$|\angle POQ| = |\angle POP'| - |\angle P'OQ| = |\angle QOQ'| - |\angle P'OQ| = |\angle P'OQ'|$$

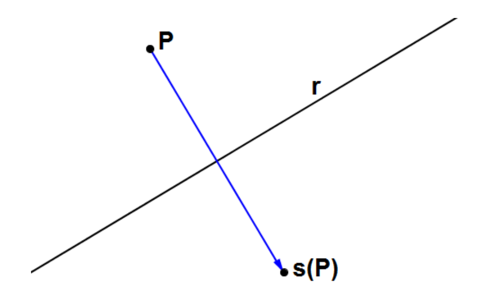
14.4 Simetrías.

14.4.1 Definición. Simetría.

Sea r una recta del plano. Definimos la simetría con eje r de la siguiente manera:

Si $P \in r$, $s(P) = P$.

Si $P \notin r$, trazamos la única perpendicular s a r por P. Sea $s(P)$ el único punto de s al otro lado de r que está a la misma distancia de r que P.



14.5 Homotecias.

14.5.1 Definición. Homotecia.

Dado un número $k > 0$ y un punto O, la homotecia de factor k y centro O es la función $d : IE \rightarrow IE$ definida de la siguiente manera:

$d(O) = O$, y si $P \neq O$, $d(O)$ es el único punto de la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ tal que

$$\left|\overline{Od(P)}\right| = k\left|\overline{OP}\right|$$

Claramente, si $k = 1$ se trata de la identidad. **Las homotecias no son isometrías**, como veremos a continuación.

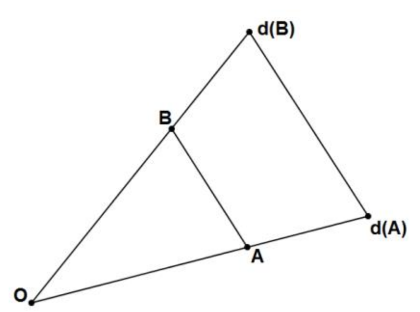
14.5.2 Proposición.

Si $d : IE \rightarrow IE$ es una homotecia de factor k, entonces

$$\left|\overline{d(A)d(B)}\right| = k\left|\overline{AB}\right|$$

Demostración. Supongamos que los puntos O, A y B no están alineados.

Los triángulos ΔAOB y $\Delta d(A)Od(B)$ son semejantes, pues $\angle AOB = \angle d(A)Od(B)$ y $\dfrac{Od(A)}{OA} = \dfrac{Od(B)}{OB} = k$



Por lo tanto tienen el tercer lado proporcional, es decir, $k = \dfrac{d(A)d(B)}{AB}$, tal y como queríamos ver.

Si los puntos O, A y B están alineados, no podemos utilizar el razonamiento anterior.

Supongamos que $A*O*B$. Entonces también $d(A)*O*d(B)$, y por tanto

$$\left|\overline{d(A)d(B)}\right| = \left|\overline{d(A)O}\right| + \left|\overline{Od(B)}\right| = k\left|\overline{AO}\right| + k\left|\overline{OB}\right| = k\left(\left|\overline{AO}\right| + k\left|\overline{OB}\right|\right) = k\left|\overline{AB}\right|$$

Los otros casos se demuestran de forma similar.

14.5.3 Corolario.

Si dos segmentos son congruentes, sus imágenes por una homotecia también serán congruentes.

Demostración. Supongamos que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$.

Por el corolario anterior, $\left|\overline{d(A)d(B)}\right| = k\left|\overline{AB}\right|$ y $\left|\overline{d(C)d(D)}\right| = k\left|\overline{CD}\right|$, luego

$\left|\overline{d(A)d(B)}\right| = k\left|\overline{AB}\right| = k\left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{d(C)d(D)}\right| \Rightarrow \overline{d(A)d(B)} \cong \overline{d(C)d(D)}$.

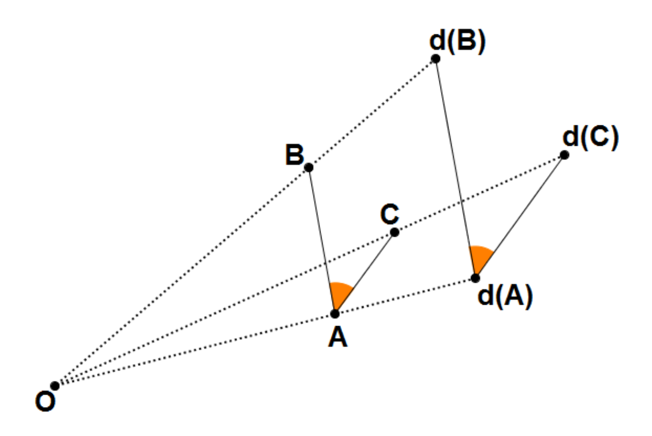
14.5.4 Corolario.
Un triángulo y su imagen por una homotecia son triángulos semejantes.

Demostración. Por la proposición anterior sabemos que

$$\left|\overline{d(A)d(B)}\right| = k\left|\overline{AB}\right|,\ \left|\overline{d(A)d(C)}\right| = k\left|\overline{AC}\right| \text{ y } \left|\overline{d(B)d(C)}\right| = k\left|\overline{BC}\right|$$

y sólo hay que aplicar el criterio SSS de semejanza de triángulos.

14.5.5 Corolario.
Un ángulo y su imagen por una homotecia son ángulos congruentes.



Demostración. Completando los triángulos ΔABC y $\Delta d(A)d(B)d(C)$, en el corolario anterior hemos visto que son semejantes, luego en particular $\angle BAC \cong \angle d(B)d(A)d(C)$.

14.5.6 Corolario.
Si dos ángulos son congruentes, sus imágenes por una homotecia también serán congruentes.

Demostración. Basta aplicar el corolario anterior.

14.6 Clasificación de las transformaciones euclídeas.

14.6.1 Teorema. Clasificación de las isometrías.
Toda isometría es de la forma $r \circ t$ o $s \circ r \circ t$, donde s es una simetría, r es una rotación y t es una traslación.

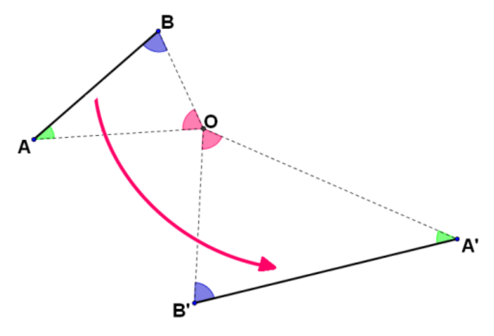
Demostración.

15 Isogonales, antiparalelas y simedianas.

15.1 Semejanzas espirales.

15.1.1 Definición. Semejanza espiral.

Una semejanza espiral de centro O es una composición de una rotación y una homotecia con un centro común O.



15.1.2 Proposición. Existencia y unicidad de la semejanza espiral entre segmentos.

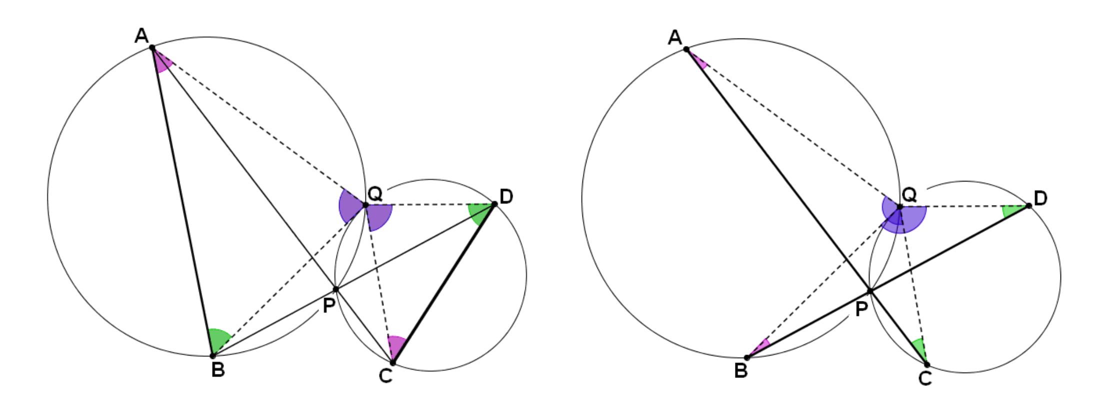
Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no paralelos, existirá una única semejanza espiral que pasa $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$.

Demostración. En 21.5.7 se presenta una demostración en el contexto del plano complejo.

15.1.3 Proposición. Determinación del centro de una semejanza espiral.

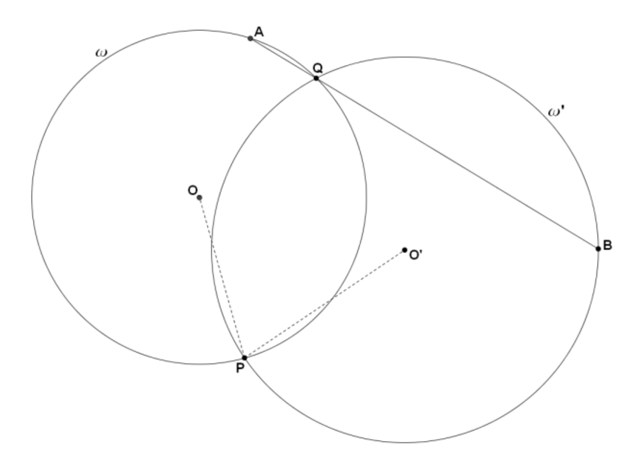
Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no paralelos, sea $P = AC \cap BD$ y sea Q el otro punto de corte entre las circunferencias circunscritas (ABP) y (CDP).

a) Q es el centro de la semejanza espiral que envía $A \to C$ y $B \to D$ ($\overline{AB} \to \overline{CD}$).
b) Q es el centro de la semejanza espiral que envía $A \to B$ y $C \to D$ ($\overline{AC} \to \overline{BD}$).



Demostración. a) Tenemos dos cuadriláteros cíclicos, y por tanto $\angle AQB = \angle APB = \angle DPC = \angle DQC$, y $\angle BAQ = 180 - \angle QPB = \angle DPQ = \angle DCQ$.
Luego los triángulos ΔABQ y ΔQCD son semejantes.
b) Observamos que también tenemos $\Delta AQC \approx \Delta BQD$.

15.1.4 Proposición. Semejanzas espirales y alineación de puntos.
Sean dos circunferencias ϖ y ϖ', y sean P y Q sus dos puntos de corte. Supongamos que la semejanza espiral con centro P que envía ϖ a ϖ', envía un punto $A \in \varpi$ a un punto $B \in \varpi'$. Entonces A, Q y B están alineados.



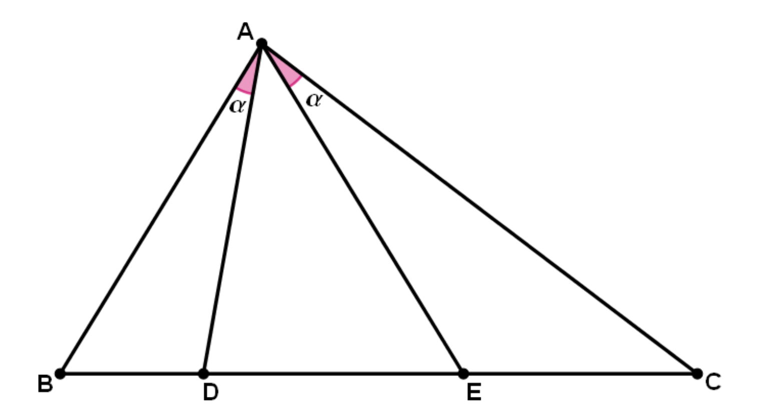
Demostración. Es el problema #11 de **[Prob5]**.

Problemas propuestos: Problemas #9, #10, #11, #25, #26 de **[Prob5]**.

15.2 Rectas conjugadas isogonales.

15.2.1 Definición. Rectas conjugadas isogonales.

Dado un triángulo ΔABC y dos puntos D y E en $\overline{BC}$, diremos que AD y AE son rectas conjugadas isogonales cuando $\angle BAD = \angle EAC$.



15.2.2 Teorema. Teorema de Steiner.

Siguiendo con las notaciones anteriores, si AD y AE son conjugados isogonales, entonces

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BE}{EC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

Demostración. Aplicamos el Teorema del Seno en los triángulos interiores de la figura.

$$\frac{BD}{\sin\alpha}=\frac{AB}{\sin\angle BDA}\Rightarrow BD=\frac{AB\sin\alpha}{\sin\angle BDA}$$

$$\frac{BE}{\sin\angle BAE}=\frac{AB}{\sin\angle BEA}\Rightarrow BE=\frac{AB\sin\angle BAE}{\sin\angle BEA}$$

$$\frac{CD}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}\Rightarrow CD=\frac{AC\sin\angle DAC}{\sin\angle ADC}$$

$$\frac{EC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin\angle AEC}\Rightarrow EC=\frac{AC\sin\alpha}{\sin\angle AEC}$$

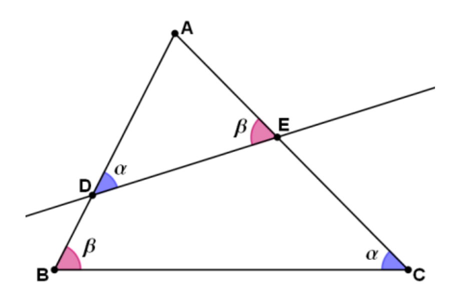
Luego

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BE}{EC}=\frac{AB\sin\alpha/\sin\angle BDA\cdot AB\sin\angle BAE/\sin\angle BEA}{AC\sin\angle DAC/\sin\angle ADC\cdot AC\sin\alpha/\sin\angle AEC}=\frac{AB^2}{AC^2}$$

Puesto que los ángulos suplementarios tienen el mismo seno y $\angle BAE=\angle DAC$.

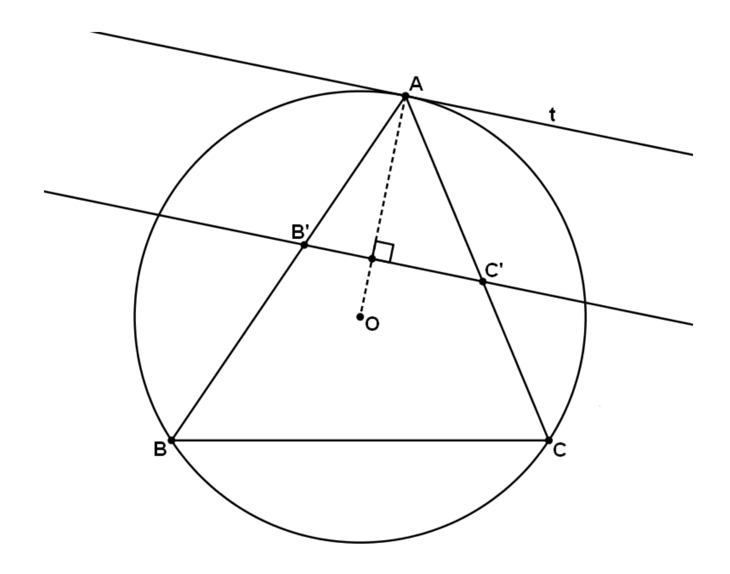
15.3 Rectas antiparalelas.

15.3.1 Definición. Rectas antiparalelas.
Sea un triángulo ΔABC y sea una recta que corta AB en D y AC en E. Diremos que DE es antiparalela de BC cuando $\angle AED = \angle ABC$ y $\angle ADE = \angle ACB$.



Obviamente, una de las condiciones implica la otra: Si $\angle AED = \angle ABC$ entonces $\Delta ADE \approx \Delta ACB$ por el criterio AA y por lo tanto $\angle ADE = \angle ACB$.

15.3.2 Proposición. Caracterización de las antiparalelas mediante tangente.
Las antiparalelas a BC son las rectas paralelas a la tangente por A a (ABC). O equivalentemente, son las rectas perpendiculares al radio OA, donde O es el circuncentro del triángulo.

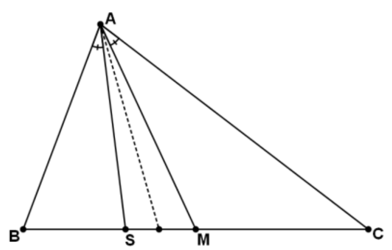


Demostración. Por el Teorema de la Tangente, $\angle ACB = \angle(t, AB)$, y por paralelismo, $\angle(t, AB) = \angle AB'C'$. De la misma forma llegamos a $\angle CBA = \angle(t, AC) = \angle AC'B'$

15.4 Las rectas simedianas.

15.4.1 Definición. Rectas simedianas.

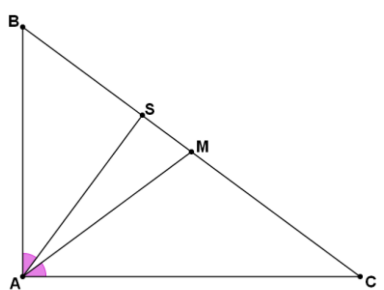
Dado un triángulo ΔABC, definimos la **A-simediana** del triángulo, o simediana por el punto A, como la recta conjugada isogonal de la A-mediana, es decir, la simétrica de la A-mediana respecto a la A-bisectriz (SIMEDIANA=SImétrica+MEDIANA). Con otras palabras, buscamos un punto S en BC tal que $\angle BAS = \angle MAC$, donde M es el punto medio de $\overline{BC}$.



Nota histórica. Las simedianas fueron descubiertas por el matemático **Émile Lemoine** en 1873. A su punto de concurrencia se le llama punto simediano o punto de Lemoine.

15.4.2 Ejemplo.

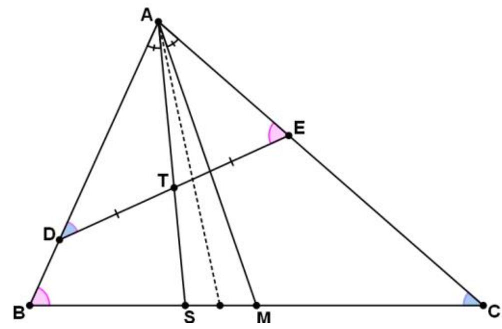
En un triángulo ΔABC, rectángulo en el vértice A, la A-simediana coincide con la A-altura.



Demostración. Es el problema #5 de **[Prob5]**.

15.4.3 Proposición. Simedianas y antiparalelas.

La simediana por el vértice A pasa por el punto medio de las antiparalelas al lado opuesto $\overline{BC}$.



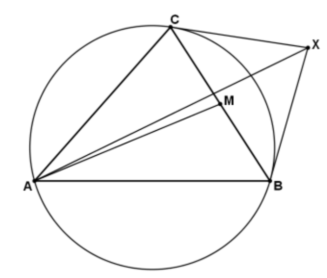
Por lo tanto podemos caracterizar la A-simediana como el lugar geométrico de los puntos medios de las antiparalelas al lado opuesto $\overline{BC}$.

Demostración. Sabemos que ΔABC y ΔAED son triángulos semejantes. Sea T la imagen de M por esta semejanza. Una semejanza pasa puntos medios a puntos medios, luego T será el punto medio de DE, y $\angle MAC = \angle TAD$, luego AT es la A-simediana del triángulo, tal y como queríamos ver.

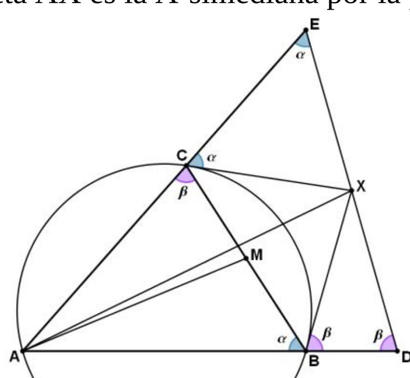
Fuente: https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/SymAntiparallel.shtml#locus

Nota histórica. La mediana se caracteriza por pasar por el punto medio del lado opuesto, y de todos los segmentos paralelos al lado opuesto. Ahora acabamos de ver que la simediana se caracteriza por pasar por el punto medio de los segmentos antiparalelos al lado opuesto. Esta fue la caracterización que **Lemoine** propuso en 1873 como definición de simediana, de hecho, él las denominó *les médianes antiparalléles*.

15.4.4 Teorema. Construcción de la simediana mediante tangentes al circuncírculo. Sea un triángulo ΔABC y sea X el punto de corte de las rectas tangentes a su circunferencia circunscrita por B y C. La recta AX es la A-simediana del triángulo.



Demostración. Primera versión: Mediante antiparalelas.
Trazamos una antiparalela a BC por X. Aplicando 10.1.11, sabemos que $\alpha = \angle XCE = \angle CBA = \angle XEC$, luego $XC = XE$, y de la misma forma $\beta = \angle XBD = \angle BCA = \angle XDB$, luego $XB = XD$, pero $XB = XC$ por 10.1.13, luego $DX = XE$, y por tanto la recta AX es la A-simediana por la proposición anterior.



Fuente: https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Symmedian.shtml#explanation

Segunda versión: Mediante Teorema del Seno.
Sea X el punto de corte de las dos tangentes y sea M' el punto de corte con el lado BC de la recta AX. Vamos a demostrar que M' es el punto medio del lado BC.
Aplicando el Teorema del Seno:

$$\frac{BM'}{\sin \angle BAM'} = \frac{AM'}{\sin \angle B} \Rightarrow BM' = \frac{AM' \sin \angle BAM'}{\sin \angle B}$$

$$\frac{CM'}{\sin \angle CAM'} = \frac{AM'}{\sin \angle C} \Rightarrow CM' = \frac{AM' \sin \angle CAM'}{\sin \angle C}$$

Luego

$$\frac{BM'}{CM'}=\frac{AM'\ \sin\angle BAM'/\sin\angle B}{AM'\ \sin\angle CAM'/\sin\angle C}=\frac{\sin\angle BAM'\sin\angle C}{\sin\angle CAM'\sin\angle B}$$

Pero $\angle C$ y $\angle ABX$ son ángulos suplementarios, luego $\sin\angle C=\sin\angle ABX$, y de la misma forma, $\angle B$ y $\angle ACX$ son suplementarios, luego $\sin\angle B=\sin\angle ACX$, y por tanto

$$\frac{BM'}{CM'}=\frac{\sin\angle BAM'\sin\angle ABX}{\sin\angle CAM'\sin\angle ACX}$$

Pero $\angle BAX=\angle CAM'$ por construcción, luego $\angle BAM'=\angle CAX$, y de la misma forma $\angle CAM'=\angle BAX$, de donde deducimos que:

$$\frac{BM'}{CM'}=\frac{\sin\angle CAX\ \sin\angle ABX}{\sin\angle BAX\ \sin\angle ACX}$$

Aplicando el Teorema del Seno al triángulo ΔACX,

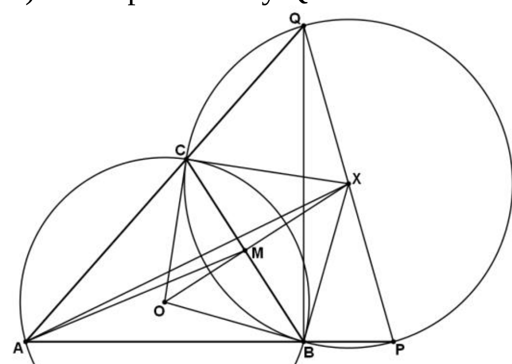
$$\frac{\sin\angle CAX}{CX}=\frac{\sin\angle ACX}{AX}\Rightarrow\frac{\sin\angle CAX}{\sin\angle ACX}=\frac{CX}{AX}$$

Y aplicando el Teorema del Seno al triángulo ΔABX,

$$\frac{\sin\angle ABX}{AX}=\frac{\sin\angle BAX}{BX}\Rightarrow\frac{\sin\angle ABX}{\sin\angle BAX}=\frac{AX}{BX}$$

Con lo que llegamos a $\frac{BM'}{CM'}=\frac{CX}{AX}\cdot\frac{AX}{BX}=\frac{CX}{BX}=1$, puesto que $CX=BX$ por 10.1.13.

Tercera versión. Sea Γ la circunferencia de centro X y radio $XB=XC$. Las rectas AB y AC cortarán Γ (de nuevo) en los puntos P y Q.



$$\angle PBQ=180-\angle ABQ=\angle CAB+\angle AQB=\frac{1}{2}(\angle COB+\angle BXC)=$$

$$=\frac{1}{2}(\angle OCB+\angle CBO+\angle XCB+\angle CBX)=\frac{1}{2}(\angle OCB+\angle XCB+\angle CBO+\angle CBX)=$$

$$=\frac{1}{2}(90+90)=90$$

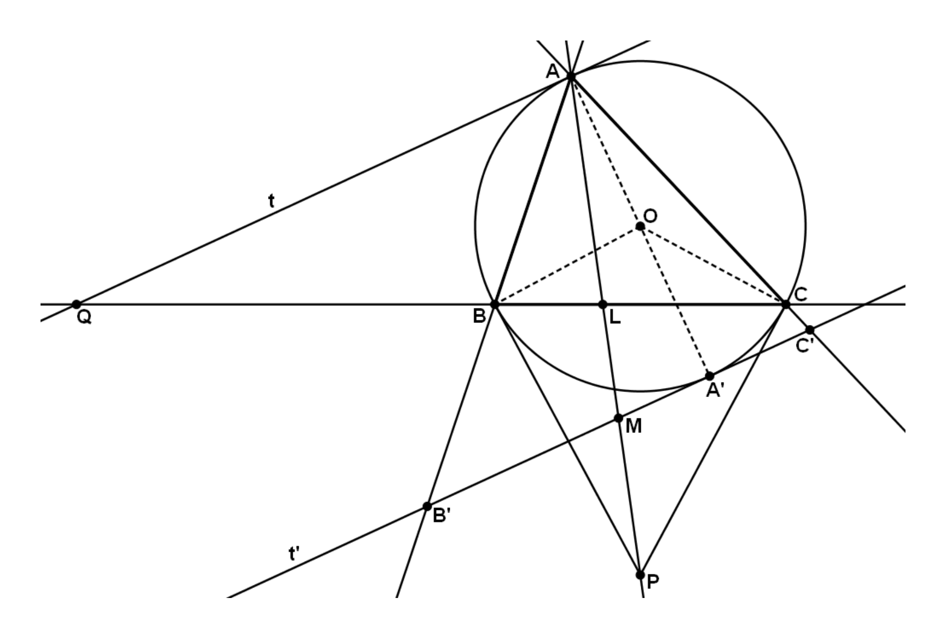
Luego B pertenece a la circunferencia de diámetro PQ, la única circunferencia que contiene B, P y Q es Γ, luego PQ es diámetro de Γ, y X pertenece a PQ.
Por ser Q, B, C y P cocíclicos tenemos que $\angle AQP=180-\angle CBP=\angle ABC$ y $\angle APQ=180-\angle BCQ=\angle ACB$, es decir, CB y QP son antiparalelas, y puesto que X es el punto medio de PQ, por 15.3.1 se deduce que AX es la A-simediana del triángulo ΔABC.

Fuente: "Lemmas in Euclidean Geometry", Yufei Zhao

15.4.5 Teorema. Simediana mediante polaridad.
La A-simediana de un triángulo ΔABC es la recta que pasa por A y el polo del lado BC respecto a la circunferencia circunscrita del triángulo.

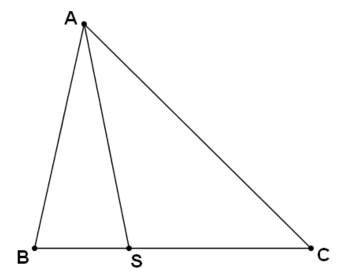
Nota. Este teorema se puede considerar como una tercera versión para demostrar el teorema anterior.

Demostración. Sea P el polo asociado a la recta BC respecto a (ABC).
Sea $L = AP \cap BC$. Sea t la recta tangente a (ABC) por A, y sea Q su punto de corte con $\overleftrightarrow{BC}$. Puesto que t es la polar de A y BC es la polar de P, AP será la polar de Q por 13.5.3a. Luego (Q, B, L, C) es una cuaterna armónica por 13.5.3.
Sea A' el punto diametralmente opuesto a A respecto a (ABC) y sea t' su recta tangente asociada. Proyectamos por A la recta t en la recta t' y sean B', C' y M las proyecciones respectivas de B, C y L.
Esta proyección envía Q al punto del infinito de t', luego M es el punto medio de B'C' por 12.5.7.
Por 15.3.2, B'C' es antiparalela de BC (), luego, por 15.4.4, AP es la A-simediana del triángulo.



Fuente: "Characterizing a Symmedian", Michel Bataille

15.4.6 Proposición. Caracterización métrica de la simediana.
La ceviana AS es A-simediana del triángulo ΔABC si y solo si



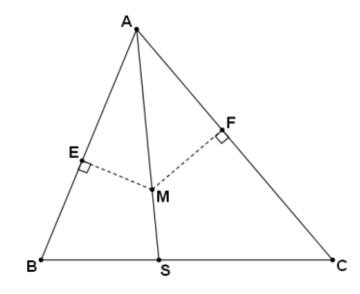
$$\frac{BS}{SC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

Demostración. $\Rightarrow$ Es una consecuencia directa de 15.2.2 teniendo en cuenta que si M es el punto medio del lado BC, $BM = MC \Rightarrow \frac{BM}{MC} = 1$:

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BS}{SC}\cdot\frac{BM}{MC} = \frac{BS}{SC}$$

$\Leftarrow$

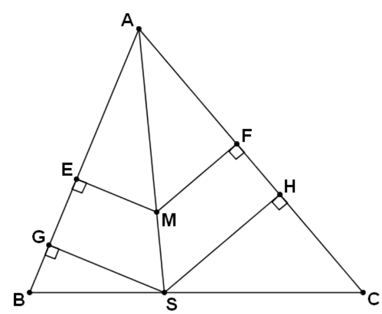
15.4.7. Proposición. Caracterización de la simediana por distancias a los lados.
Sea un triángulo ΔABC y sea AS su A-simediana. Sea $M \in \overline{AS}$ y sean E y F las proyecciones perpendiculares de M en los lados AB y AC, respectivamente. Entonces



$$\frac{EM}{FM} = \frac{AB}{AC}$$

y, recíprocamente, si un punto M del interior del triángulo cumple la condición anterior, pertenecerá a la A-simediana.

Demostración. Sean G y H las proyecciones perpendiculares del punto S en los lados AB y AC, respectivamente.

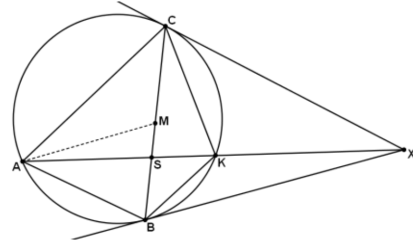


Por 8.2.6 se cumple $\frac{BS}{SC} = \frac{[\Delta ABS]}{[\Delta ACS]} = \frac{AB\cdot GS}{AC\cdot HS}$

Pero, por 15.4.6, $\frac{BS}{SC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$, Luego $\frac{AB\cdot GS}{AC\cdot HS} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \Rightarrow \frac{GS}{HS} = \frac{AB}{AC}$

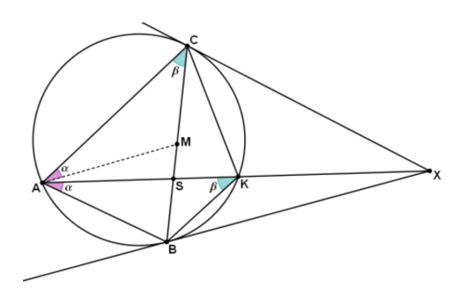
Para cualquer punto M de la recta AS, aplicando Tales tendremos $\frac{EM}{FM} = \frac{GS}{HS} = \frac{AB}{AC}$.

15.4.8 Teorema. Simediana y circunferencia circunscrita.
Sea un triángulo ΔABC y sea X el punto de corte de las rectas tangentes a su circunferencia circunscrita por B y C. Sea K el punto de corte entre AX y (ABC). En 15.4.4 vimos que la recta AX es la A-simediana del triángulo, pero además se cumplen las siguientes propiedades:

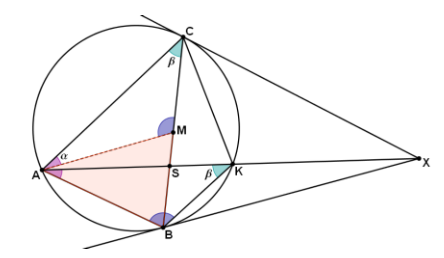


a) KA es la K-simediana del triángulo ΔBKC.
b) ΔABK y ΔAMC son directamente semejantes.
c) $\dfrac{AB}{BK} = \dfrac{AC}{CK}$
d) (BCX) pasa por el punto medio de $\overline{AK}$.
e) $\overline{BC}$ es la B-simediana de ΔBAK y la C-simediana de ΔCAK.
f) $\overline{BC}$ es la bisectriz interior del ángulo $\angle AMK$, y $\overline{MX}$ es su bisectriz exterior.

Demostración. a) Por construcción.
b) $\angle KAB = \angle CAM$ por construcción de simediana, y $\angle ACM = \angle AKB$ pues son ángulos que abarcan el mismo arco. Luego basta aplicar el criterio AA de semejanza.



c) Los triángulo ΔAMB y ΔACK son semejantes por el criterio AA, pues $\angle AMB = 180 - \angle AMC = 180 - \angle ABK = \angle ACK$
Y claramente $\angle ABM = \angle AKC$ por ser ángulos que abarcan un mismo arco.

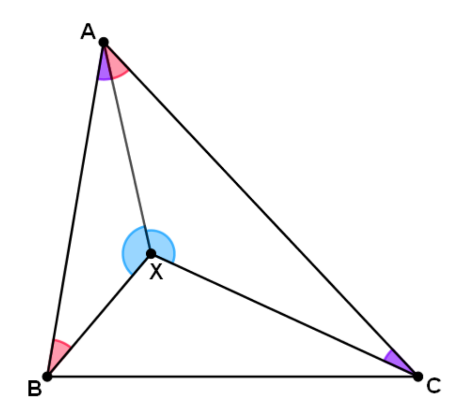


Luego, aplicando el apartado b y la semejanza anterior: $\dfrac{AB}{BK} = \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AC}{CK}$

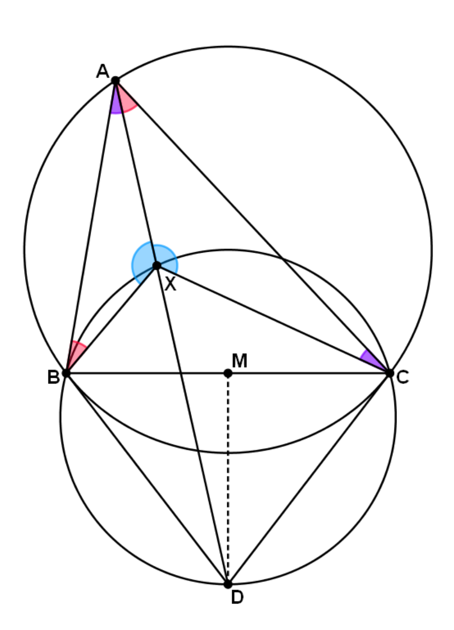
Problemas propuestos: Problemas #13 y #14 de **[Prob5]**.

15.5 Simedianas y semejanzas espirales.

15.5.1 Proposición. Simedianas y semejanzas espirales.
Dado un triángulo ΔABC, sea X el centro de la semejanza espiral que envía $A \to C$ y $B \to A$. Entonces AX es la A-simediana del triángulo.



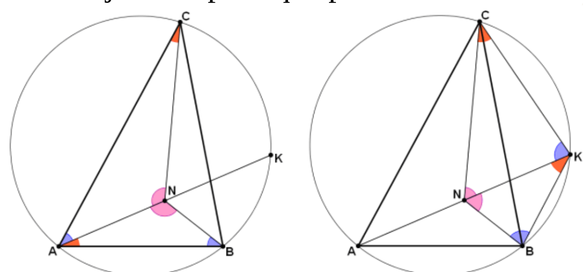
Demostración. En primer lugar, determinamos la A-simediana del triángulo por el método de las tangentes (ver 15.4.5). Esto es, sean BD y CD las rectas tangentes a (ABC) por B y por C respectivamente. La A-simediana del triángulo es la semirrecta AD.
Sea $X = (ABC) \cap (BCD)$. Vamos a demostrar que X es el centro de la semejanza que envía $A \to C$ y $B \to A$.
$\angle ABX = \angle BXD - \angle XAB$ Por el el Teorema del Ángulo Exterior.
$\angle BXD = \angle BCD$ por ser ángulos que abarcan el mismo arco de circunferencia.
$\angle BCD = \angle BAC$ por ser CD recta tangente a (ABC)
Luego $\angle ABX = \angle BAC - \angle XAB = \angle XAC$.



De la misma forma se demuestra que $\angle XAB = \angle XCA$, y por tanto ΔXBA y ΔXAC son triángulos directamente semejantes, tal y como queríamos ver.

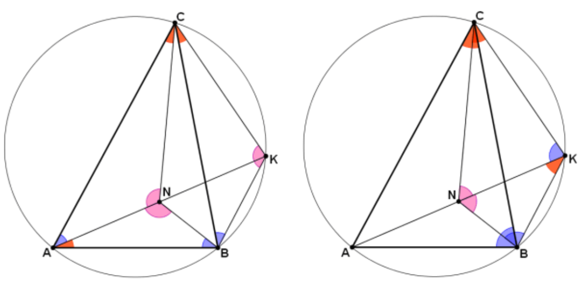
Fuente:

15.5.2 Corolario. Punto medio de la simediana.
Dado un triángulo ΔABC, sea K el punto de corte entre su A-simediana y su circunferencia circunscrita. Sea N el punto medio de $\overline{AK}$. Se cumple:
a) N es el centro de la semejanza espiral que pasa $\overline{BA}$ a $\overline{AC}$.
b) N es el centro de una semejanza espiral que pasa BK a $\overline{KC}$.



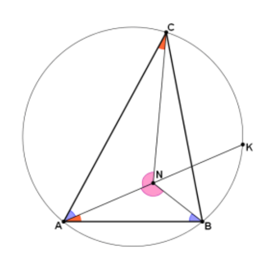
Demostración. a) Aplicando 15.4.6f sabemos que BC es la C-simediana de ΔACK, luego $\angle ACN = \angle BCK = \angle BAK$, y también es la B-simediana de ΔBAK, luego $\angle NBA = \angle KBC = \angle KAC$.
Luego $\Delta ABN \approx \Delta CBK \approx \Delta CAN$ con la misma orientación, tal y como queríamos ver.

b) BC es la C-simediana de ΔACK, luego $\angle NCK = \angle ACB = \angle AKB$, y de la misma forma, puesto que BC es la B -simediana de ΔAKB, $\angle NBK = \angle ABC = \angle CKA$.



15.5.3 Corolario. Simediana y semejanza espiral.
Sean A, B y C tres puntos no alineados. Sea N el centro de la semejanza espiral que pasa $A \to C$ y $B \to A$ y, ($\overline{BA} \to \overline{AC}$). Entonces AN es la A-simediana de ΔABC (y por tanto la K-simediana de ΔBCK).

Además, si K el punto simétrico de N respecto a A, se cumple:
a) El cuadrilátero ABKC es cíclico.
b) El punto N es el centro de la semejanza espiral que envía $\overline{BK}$ a $\overline{KC}$.
c) El punto B es el centro de la semejanza espiral que envía $\overline{AN}$ a $\overline{CK}$,
d) El punto C es el centro de la semejanza espiral que envía $\overline{AN}$ a $\overline{BK}$.

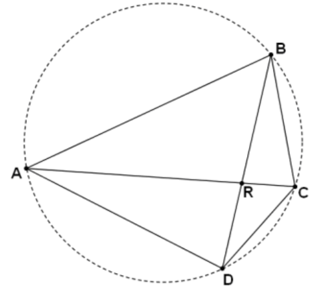


Fuente: "On a special center of spiral similarity", Jafet Baca

15.6 Simedianas y cuadriláteros armónicos.

Los cuadriláteros armónicos ABCD se definieron en 12.6.1 como aquellos cuadriláteros cíclicos que cumplen la condición $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

15.6.1 Teorema. Caracterización de cuadriláteros armónicos mediante simedianas.
Sea ABCD un cuadrilátero cíclico y sea R el punto de corte de sus diagonales. Son equivalentes:



a) $ABCD$ es armónico, es decir,
$$AB \cdot CD = BC \cdot AD$$

b) AR es la A-simediana de ΔDAB.
c) BR es la B-simediana de ΔABC.
d) CR es la C-simediana de ΔBCD.
e) DR es la D-simediana de ΔCDA.

Demostración. Demostraremos $a) \Leftrightarrow d)$
Utilizaremos la proposición 10.4.14: En todo cuadrilatero cíclico se cumple:
$$\frac{AR}{CR} = \frac{AB}{CD} \cdot \frac{AD}{BC}$$

$\Rightarrow$ Por ser ABCD armónico, $AB \cdot CD = BC \cdot AD \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{CD}$

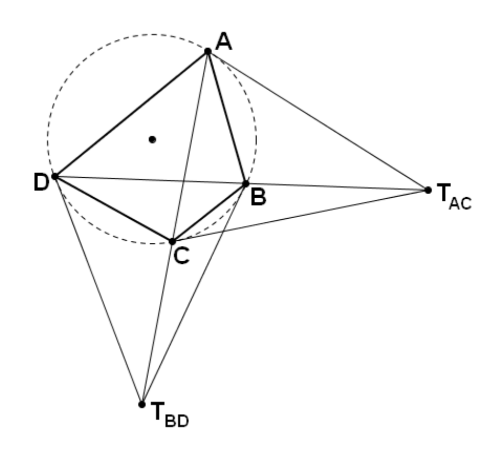
De lo que se deduce $\dfrac{AR}{CR} = \dfrac{AB}{CD} \cdot \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{AD}{CD} \cdot \dfrac{AD}{CD} = \left(\dfrac{AD}{CD}\right)^2$

Y por lo tanto se cumple la caracterización 15.4.6 de simediana.

$\Leftarrow$ Supongamos que DR es la D-simediana del triángulo ΔADC. Entonces, por 15.4.6, y nuevamente por 10.4.14,

$\dfrac{AR}{RC} = \left(\dfrac{AD}{CD}\right)^2$, luego $\dfrac{AB}{CD} \cdot \dfrac{AD}{BC} = \left(\dfrac{AD}{CD}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = AD \cdot BC$

15.6.2 Teorema. Caracterización de cuadriláteros armónicos mediante tangentes. Sea ABCD un cuadrilátero cíclico. Como es habitual, denotamos por AA la recta tangente a la circunferencia circunscrita del cuadrilátero por el punto A. Sean $T_{AC} = AA \cap CC$ y $T_{BD} = BB \cap DD$.



a) $ABCD$ es armónico, es decir,

$$AB \cdot CD = BC \cdot AD$$

b) $T_{AC} \in BD$.

c) $T_{BD} \in AC$.

Demostración. Sea $R = BD \cap AC$. Vamos a demostrar $a) \Leftrightarrow b)$.

$a) \Rightarrow b)$ Si ABCD es armónico, aplicando el Teorema anterior tendremos que $DR = DB$ es la D-simediana de ΔCDA. Pero por 15.4.4, la D-simediana de ΔCDA es DT_{AC}, luego $DR = DB = DT_{AC}$, o dicho con otras palabras, $T_{AC} \in BD$.

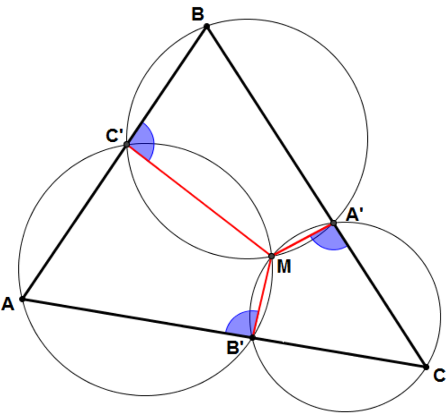
$b) \Rightarrow a)$ Por 15.4.4 sabemos que DT_{AC} es la D-simediana de ΔCDA. Si $T_{AC} \in BD$ entonces $DR = DB = DT_{AC}$ y DR es la D-simediana de ΔCDA. Luego aplicamos el Teorema anterior.

15.7 Los Puntos de Miquel.

15.7.1 Lema. Punto de Miquel de un triángulo.
Sea un triángulo ABC y tres puntos arbitrarios en cada lado: $A' \in BC$, $B' \in AC$ y $C' \in AC$. Se cumple:

a) Las tres circunferencias circunscritas a los triángulos $BC'A'$, $AC'B'$ y $CB'A'$ se encuentran en un punto común M, que se denomina "**Punto de Miquel**".

b) Los ángulos que determinan este punto M con los lados son iguales, como se indica en la siguiente figura:



Demostración: Las circunferencias circunscritas a los triángulos BC'A' y AB'C' cortan en C' y en un segundo punto M. Los cuadriláteros BA'MC' y AC'MB' son cíclicos, luego tienen ángulos opuestos suplementarios: $\angle C'MA' = 180 - B$ y $\angle C'MB' = 180 - A$

La suma de los tres ángulos alrededor de M es un ángulo completo:

$$\angle C'MA' + \angle C'MB' + \angle A'MB' = 360$$

por lo que

$180 - B + 180 - A + \angle A'MB' = 360 \Rightarrow \angle A'MB' - A - B = 0 \Rightarrow$

$\angle A'MB' - (A + B) = 0 \Rightarrow \angle A'MB' - (180 - C) = 0 \Rightarrow \angle A'MB' - 180 + C = 0 \Rightarrow$

$\angle A'MB' + C = 180$

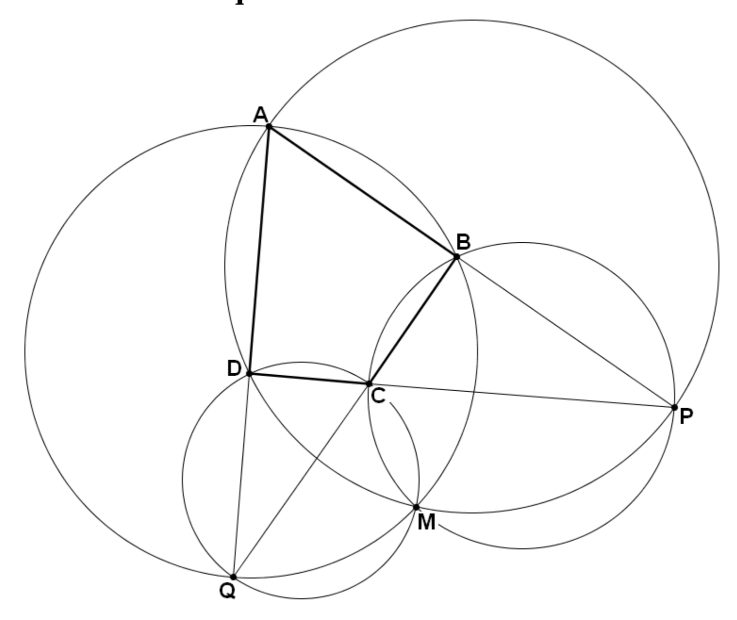
Por lo tanto el cuadrilátero A'CB'M también es cíclico. Puesto que una circunferencia queda determinada por tres puntos, su circunferencia circunscrita será la circunferencia circunscrita al triángulo A'B'C, de lo que se deduce que M pertenece a esta última, tal y como queríamos ver.

La propiedad de los ángulos se deduce fácilmente aplicando encadenadamente la propiedad fundamental de los cuadriláteros cíclicos (el ángulo exterior por un vértice es igual al ángulo interior por el vértice opuesto). Luego:

$$\angle MA'C = \angle BC'M = \angle AB'M$$

Nota biográfica: Auguste Miquel (1816-1851) matemático francés.

15.7.2 Teorema. Punto de Miquel de un cuadrilátero.
Dado un cuadrilátero $ABCD$ y siendo $P = AB \cap CD$ y $Q = AD \cap BC$, las cuatro circunferencias circunscritas (PAD), (PBC), (QAB) y (QCD) pasan por un mismo punto M, llamado "**Punto de Miquel**" del cuadrilátero.

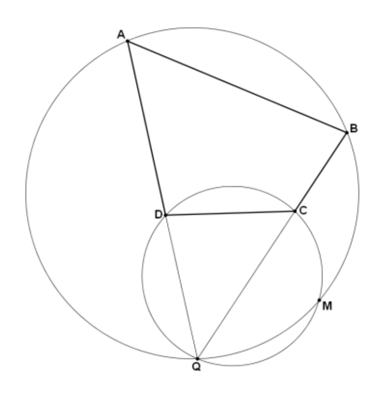


Demostración. Que las cuatro circunferencias pasan por un punto común M es una consecuencia directa del Teorema de Miquel para triángulos (15.7.1).

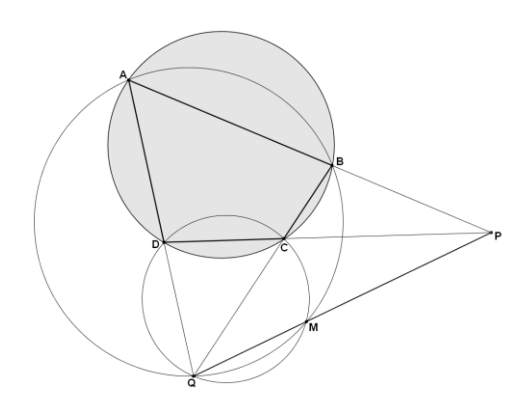
(Acabar)

Problema propuesto: Problema #8 de **[Prob5]**.

15.7.3 Teorema. Propiedades del Punto de Miquel.
Dado el cuadrilátero ABCD, sea $Q = AD \cap BC$, y sea M el otro punto de corte de las circunferencias circunscritas (QDC) y (QAB), es decir, el Punto de Miquel asociado al cuadrilátero.
a) M es el centro de la semejanza espiral que envía $D \to C$ y $A \to B$.
b) M es el centro de la semejanza espiral que envía $D \to A$ y $C \to B$.



c) Siendo $P = AB \cap CD$, entonces $M \in PQ \Leftrightarrow$ ABCD es cíclico.



Demostración.

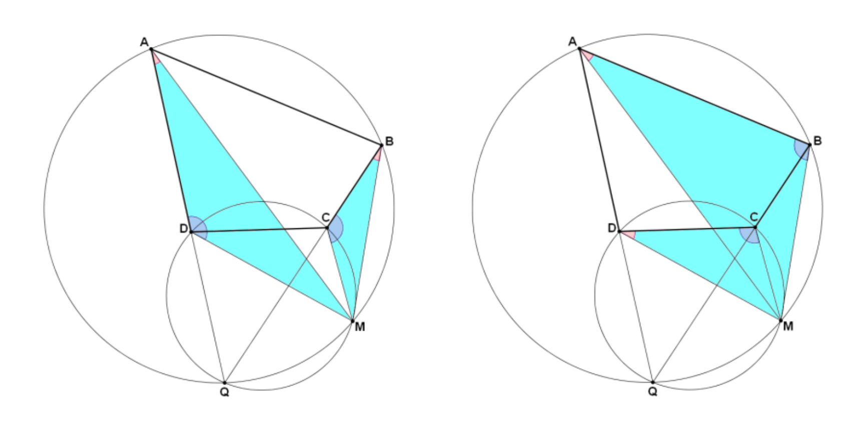
a) Tenemos dos cuadriláteros cíclicos ABMQ y DCMQ, luego

$\angle BAM = \angle BQM = \angle CQM = \angle CDM$

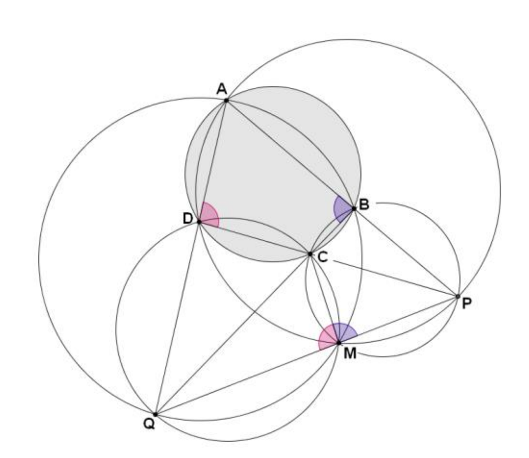
$\angle ABM = 180 - \angle AQM = 180 - \angle DQM = \angle DCM$

Luego $\Delta MCD \approx \Delta MBA$

b) De la misma manera demostramos que $\Delta ABM \approx \Delta DCM$



c) $\angle QMC = 180 - \angle QDC = \angle CDA$ y $\angle PMC = 180 - \angle PBC = \angle CBA$, luego $\angle ADC$ y $\angle ABC$ son suplentarios $\Leftrightarrow$ $\angle QMC$ y $\angle PMC$ son suplementarios, y esta condición equivale a que Q, M y P están alineados por 3.4.4.

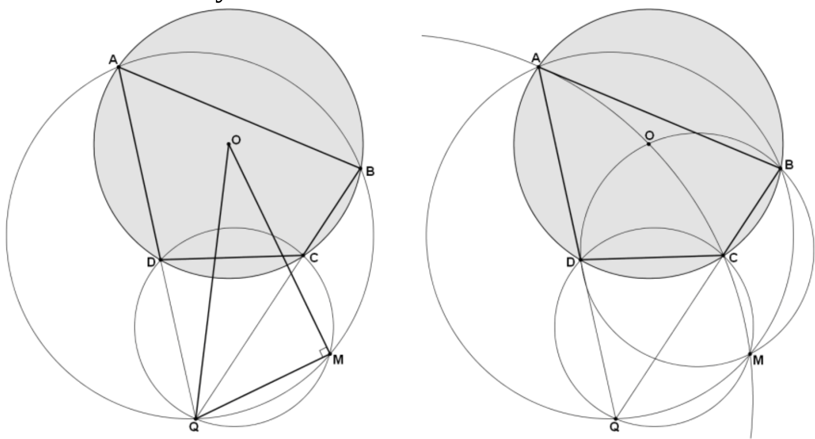


15.7.4 Teorema. Punto de Miquel en cuadriláteros cíclicos.

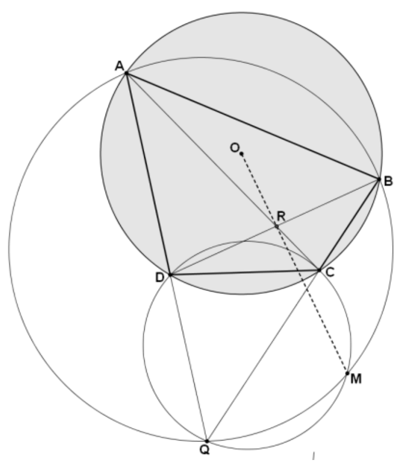
Dado un cuadrilátero cíclico ABCD con centro O, sea $Q = AD \cap BC$, y sea M el otro punto de corte de las circunferencias circunscritas (QDC) y (QAB), es decir, el Punto de Miquel asociado al cuadrilátero. Entonces:

a) $QM \perp OM$

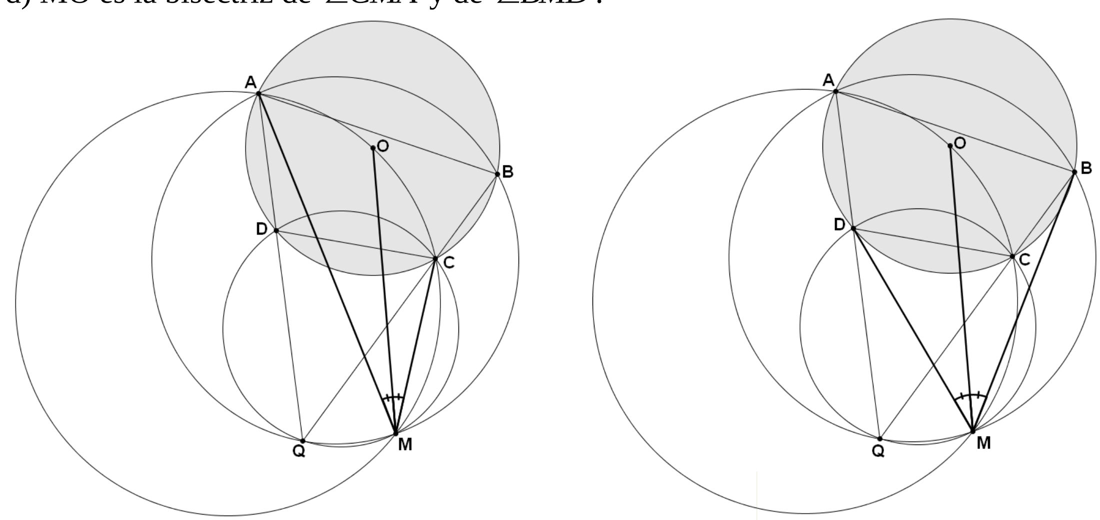
b) Los cuadriláteros AOCM y BODM son cíclicos.



c) M es el inverso de $R = AC \cap BD$ respecto al circuncírculo de ABCD. En particular, las rectas AC, BD y OM con concurrentes en R.

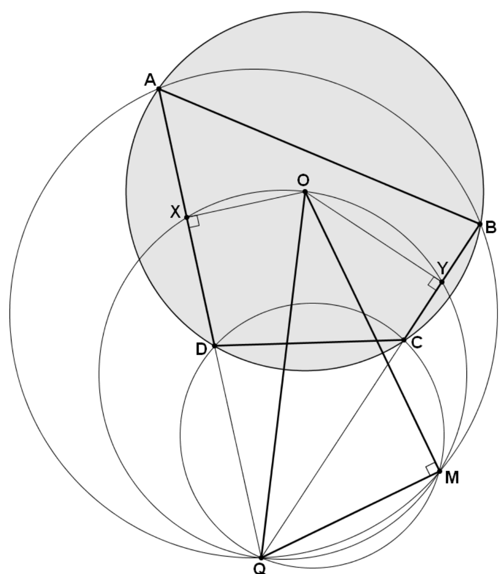


d) MO es la bisectriz de $\angle CMA$ y de $\angle BMD$.



Demostración.

a) Sean X e Y los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. La semejanza espiral de centro M que envía $D \to C$ y $A \to B$ envía $X \to Y$, luego será la misma semejanza espiral que envía $D \to X$ e $C \to Y$, y por tanto las circunferencias (QDC) y (QXY) se cortarán en Q y en M. Luego los puntos X, Y, M, Q pertenecen a una misma circunferencia ϖ. Pero $\angle QXO = \angle QYO = 90º$, luego X e Y pertenecen a la circunferencia de diámetro QO, que tiene que ser forzosamente ϖ, con lo que, finalmente, llegamos a la conclusión de que los puntos X, O, Y, M y Q pertenecen a la circunferencia de diámetro OQ. En particular, $\angle QMO = 90º$, como queríamos ver.



b) En primer lugar demostraremos que OBMD es cíclico. Sea $\alpha = \angle DOB$

$\angle DAB = \alpha/2$ Por el Teorema del Ángulo Central

$\angle DCB = 180 - \angle DAB = 180 - \alpha/2$ por ser ABCD cíclico.

$\angle QMB = 180 - \angle QAB = 180 - \angle DAB = 180 - \alpha/2$ por ser ABMQ cíclico.

Por otro lado, $\angle DCQ = 180 - \angle DCB = 180 - (180 - \alpha/2) = \alpha/2$

$\angle QMD = \angle QCD = \alpha/2$ por ser DCMQ cíclico.

Luego, finalmente, $\angle DMB = \angle QMB - \angle QMD = 180 - \alpha/2 - \alpha/2 = 180 - \alpha$, es decir, $\angle DMB$ y $\angle DOB$ son suplementarios, y por tanto OBMD es cíclico.

Veamos ahora que AOCM es cíclico. El razonamiento es similar al anterior. Sea $\alpha = \angle AOC$.

$\angle ABC = \alpha/2$

$\angle ADC = 180 - \angle ABC = 180 - \alpha/2$.

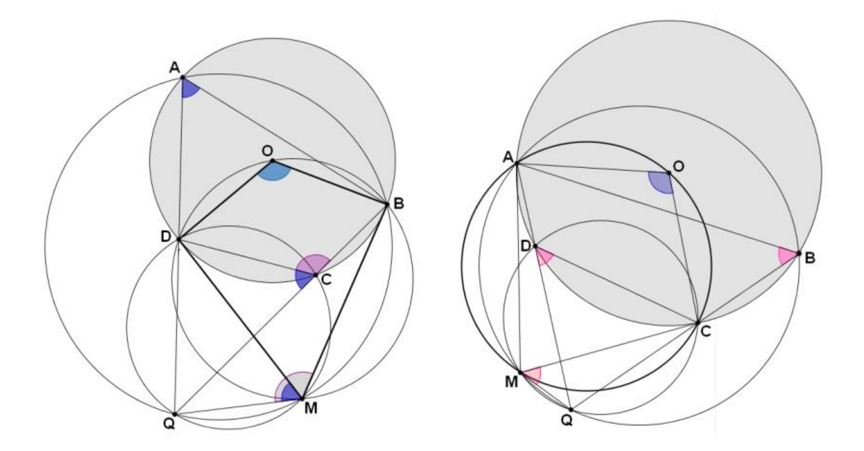
$\angle QDC = 180 - \angle ADC = 180 - (180 - \alpha/2) = \alpha/2$.

$\angle CMQ = \angle QDC = \alpha/2$

$\angle QMA = 180 - \angle ABQ = 180 - \angle ABC = 180 - \alpha/2$

$\angle AMC = \angle AMQ - \angle CMQ = 180 - \alpha/2 - \alpha/2 = 180 - \alpha$

Luego $\angle AMC$ y $\angle AOC$ son suplementarios.



c) La circuferencia AOCM es la imagen de la recta AC, y la circunferencia BODM es al imagen de la recta BD, luego su punto de corte M diferente de O será la imagen de la intersección $R = AC \cap BD$.

d) Acabamos de ver que los puntos AOCM son puntos de una misma circunferencia a la que llamaremos ϖ. Los arcos AO y OC de dicha circunferencia tienen la misma longitud, pues $\overline{AO} = \overline{OC}$ pues A y C pertenecen a la circunferencia de centro O. Luego $\angle AMO = \angle OMC$ pues son ángulos que abarcan arcos iguales.
Con un razonamiento similar se demuestra que $\angle DMO = \angle OMB$.

Problema propuesto: Problema #24 de **[Prob5]**.

Bibliografía. Todo el apartado 15.7 y parte el 15.1 se basan en el documento "**Cyclic Quadrilaterals, The Big Picture**", de Yufei Zhao

Volumen III: Geometría analítica

16 Fundamentos de los conjuntos numéricos.

16.1 Teoría de conjuntos.

16.1.1 Definición. Elementos, conjuntos, inclusión.
La definición de conjunto es complicada, por no decir imposible. La propuesta tradicional de definir un conjunto como “una colección de elementos” es una pura falacia pues "colección" es un sinónimo de "conjunto". Así pues, dejaremos sin definir qué es un conjunto y supondremos que todo el mundo entiende qué es un conjunto de elementos.
Tenemos por un lado los “**elementos**”, que escribiremos con letras minúsculas x, y, z... Y por otro lado los “**conjuntos**”, que escribiremos con letras mayúsculas A, B, C... y una relación entre ambos llamada **inclusión**: $x \in A$, y su negación: $x \notin A$

Subconjuntos.
Diremos que $A \subset B$ cuando $x \in A \Rightarrow x \in B$.
Diremos que $A = B$ cuando tienen los mismos elementos, es decir $x \in A \Leftrightarrow x \in B$
Claramente $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

El conjunto vacío.
Definimos por $\varnothing$ el conjunto que no tiene elementos. Se cumple $\varnothing \subset A$ para cualquier conjunto A.

El conjunto universal. Conjunto complementario.
En ciertos contextos puede tener sentido hablar del conjunto universal Ω, formado por todos los elementos. En este contexto, dado un conjunto A, tiene sentido definir su conjunto complementario $\overline{A}$, formado por todos los elementos del conjunto universal que no están en A:

$$\overline{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

Intersección e unión de conjuntos.
Definimos la intersección de dos conjuntos por $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
y la unión de dos conjuntos por $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Conjunto complementario.
Dados dos conjuntos A y B, definimos $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Producto de dos conjuntos.
Dados dos conjuntos A y B definimos $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

Definición. Relación.
Una **relación** R en un conjunto A es un subconjunto R de $A \times A$. Dados dos elementos $x, y \in A$, diremos que se cumple xRy cuando $(x, y) \in R$.

16.2 Funciones.

16.2.1 Definición. Función. Dominio y Codominio.

Dados dos conjuntos A y B, una función $f : A \to B$ es un subconjunto de $A \times B$ que cumple dos condiciones adicionales:

a) Para todo $a \in A$ existe un $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$
b) Si $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in f$ y $a_1 = a_2$ entonces $b_1 = b_2$.

Notación: Si $(x, y) \in f$ se suele escribir $x \mapsto y$, o $y = f(x)$

Al conjunto A le diremos **dominio** de la función, y al conjunto B **codominio**.

16.2.2 Definición. Imagen. Rango. Función suprayectiva.

Dada una función $f : A \to B$ y un subconjunto de su dominio $S \subset A$, llamaremos **imagen** de S a

$$\mathrm{f}(S) = \{y \in B \mid \exists x \in S, (a, y) \in f\} \subset B$$

Definimos el **rango** de la función como $\mathrm{f}(A)$.
Diremos que una función f es **suprayectiva** si $\mathrm{f}(A) = B$, es decir, cuando todo elemento de B es imagen de al menos un elemento de A.

16.2.3 Definición. Subconjunto preimagen.

Dada una función $f : A \to B$ y un subconjunto $S \subset B$, llamaremos **preimagen** de S a

$$\mathrm{f}^{-1}(S) = \{x \in A \mid \exists y \in S, (a, y) \in f\} \subset A$$

16.2.4 Definición. Composición de funciones.

Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$ cumpliendo $f(A) \subset C$, tiene sentido definir la composición $f \circ g : A \to D$ de la siguiente forma:
$(x, y) \in f \circ g \Leftrightarrow \exists z \in g(A) \mid (x, z) \in g \wedge (z, y) \in f$

16.2.5 Definición. La función identidad.

Dado cualquier conjunto A, definimos la función Identidad de la siguiente forma:

$$Id : A \to A$$
$$x \mapsto x$$

16.2.6 Definición. Función inyectiva.

Diremos que una función $f : A \to B$ es inyectiva si
$(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in f$ y $b_1 = b_2$ entonces $a_1 = a_2$

Es decir, cuando ningún elemento del codominio es imagen de más de un elemento del dominio.

16.2.7 Definición. Función inversa.

Si una función $f : A \to B$ es inyectiva, entonces tiene sentido definir su función inversa

$$f^{-1} : f(A) \to A$$

De la siguiente forma:

$$(y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in f$$

16.2.8 Proposición.

Para cualquier función inyectiva $f : A \to B$, se cumple $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id$

16.2.9 Definición. Biyección. Transformación.

Una biyección es una función $f : A \to B$ inyectiva y suprayectiva.

Una transformación es una biyección de un conjunto en sí mismo.

16.3 Relaciones de orden.

16.3.1 Definición. Relaciones de orden y relaciones de orden estricto.
Diremos que un conjunto Ω es un **conjunto ordenado** cuando esté dotado de una relación $\leq$ (ver ????) que cumple las siguientes condiciones:
a) **Reflexiva**: $x \leq x$.
b) **Antisimétrica**: $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces x=y.
c) **Transitiva**: $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

Diremos que la relación < es un **orden estricto** si es una relación asimétrica y transitiva:
a) **Asimétrica**: Nunca ocurre $x < y$ y $y < x$ a la vez.
b) **Transitiva**: $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

Diremos que Ω está **totalmente ordenado** cuando, para todo $x, y \in \Omega$, se cumple $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

16.3.2 Teorema.
Sea X un conjunto. Entonces:
a) Dada una relación $\leq$ de orden en X, entonces la relación

$$x < y \text{ si y sólo si } x \leq y \text{ y } x \neq y$$

es un orden estricto en X.

b) Dada una relación < de orden estricto en X, entonces la relación

$$x \leq y \text{ si y sólo si } x < y \text{ o } x = y$$

es un orden parcial en X.

Demostración.

16.3.3 Definición. Minimal, cota inferior, mínimo, ínfimo.
Sea X un subconjunto de un conjunto ordenado Ω.
Se llama **cota inferior** de X a un elemento $x \in \Omega$ tal que $x \leq y$ para todo $y \in X$.
Se llama **mínimo** de X a una cota inferior que esté en X.
Se llama **ínfimo** de X a la cota inferior $x \in \Omega$ tal que si x' es otra cota inferior, $x \leq x'$.
Es decir:

$x \leq y$ para todo $y \in X$

Si $x' \leq y$ para todo $y \in X$, entonces $x \leq x'$.

Y de la misma manera:
Se llama **cota superior** de X a un elemento $x \in \Omega$ tal que $y \leq x$ para todo $y \in X$.
Se llama **máximo** de X a una cota superior que esté en X.
Se llama **supremo** de X a la cota superior $x \in \Omega$ tal que si x' es otra cota superior, $x' \leq x$. Es decir:

$y \leq x$ para todo $y \in X$

Si $y \leq x'$ para todo $y \in X$, entonces $x' \leq x$.

Se dice que X **no tiene extremos** si no tiene ni máximo ni mínimo.

16.3.4 Proposición. Unicidad del mínimo, máximo, ínfimo y supremo.
Sea X un subconjunto de un conjunto ordenado Ω.
Si existe el mínimo de X, es necesariamente único. Se denotará por $Min(X)$.
Si existe el ínfimo de X, es necesariamente único. Se denotará por $Inf(X)$.
Y, si existen, también serán únicos el máximo $Max(X)$ y el supremo $Sup(X)$.

Demostración. Supongamos que x e y son mínimos de X.
Se tiene que ambos son cotas inferiores de X, luego $x \leq y$ y $y \leq x$, y por tanto $x = y$.
Supongamos ahora que x e y son ínfimos de X. Aplicando la definición nuevamente se cumple $x \leq y$ y $y \leq x$, y por tanto $x = y$.

16.3.5 Definición. Conjunto denso.
Sea Ω un conjunto totalmente ordenado. Se dice que un subconjunto X es **denso** en Ω si, para cada dos elementos $x < y$ de Ω existe z de X tal que $x < z < y$. Diremos que un conjunto es denso cuando lo sea entendido como subconjunto de sí mismo, es decir, cuando para todo $x, y \in \Omega$ con $x < y$, existirá un $z \in \Omega$ tal que $x < z < y$.

16.4 Completación mediante cortes de Dedekind.

16.4.1 Definición. Conjunto completo.
Diremos que un conjunto totalmente ordenado Ω es **completo** si es denso y si para cada subconjunto no vacío y acotado superiormente existe supremo.

16.4.2 Definición. Completación.
Dado un conjunto totalmente ordenado Ω, denso y sin extremos, diremos que Ω' es una completación de Ω si
a) Ω' es un conjunto totalmente ordenado, completo y sin extremos.
b) $\Omega \subset \Omega'$ y el orden de Ω' restringido a Ω es el orden de Ω.
c) Ω es denso en Ω'.

16.4.3 Definición. El Axioma del Conjunto Potencia.
Dado cualquier conjunto X, no necesariamente ordenado, suponemos que existe el conjunto de todos los subconjuntos de X, es decir, $x \in P(X)$ si y sólo si x es un subconjunto de X. La existencia de $P(X)$ es un axioma que añadimos a la teoría de conjuntos.
Es muy fácil comprobar que en $P(X)$ las inclusiones $A \subseteq B$ y $A \subset B$ forman relaciones de orden:

$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ (relación de orden)
$A < B \Leftrightarrow A \subset B$ (relación de orden estricto)

Notación: En esta sección usaremos el símbolo $A \subseteq B$ para denotar la inclusión y el símbolo $A \subset B$ para denotar la **inclusión estricta**, es decir,
$A \subseteq B$ no implica necesariamente $A \neq B$
$A \subset B$ implica necesariamente $A \neq B$

16.4.4 Definición. Segmento inicial.
Se llama segmento inicial de un conjunto totalmente ordenado Ω a un subconjunto propio ($X \neq \Omega$ y $X \neq \varnothing$) de Ω tal que

$$\forall x \in X, \forall y \in \Omega, y < x \Rightarrow y \in X$$

16.4.5 Proposición. Los conjuntos A_x.
Sea Ω un conjunto totalmente ordenado y $x \in \Omega$. Definimos

$$A_x = \{ y \in \Omega \mid y < x \}$$

A_x no está vacío si y sólo si x no es el mínimo de Ω, y en ese caso, A_x es un segmento inicial.

Demostración.
$\Rightarrow$ Si A_x no está vacío entonces existe $y \in \Omega$ con $y < x$, luego x no puede ser cota inferior y por tanto no puede ser el mínimo de Ω.
$\Leftarrow$ Si x no es el mínimo de Ω entonces existe algún $y \in \Omega$ tal que $y < x$, por tanto $y \in A_x$ y $A_x \neq \varnothing$.

Supongamos que x no es el mínimo de Ω. Claramente es propio pues $x \notin A_x$ y acabamos de ver que $A_x \neq \emptyset$. Sea $y \in A_x$ y sea $z \in \Omega$ con $z < y$.
$y \in A_x \Rightarrow y < x \Rightarrow z < y < x \Rightarrow z < x \Rightarrow z \in A_x$

16.4.6 Definición. Corte de Dedekind.
En un conjunto totalmente ordenado Ω, llamaremos **Corte de Dedekind** a todo segmento inicial no vacío $A \subset \Omega$ que no tenga máximo. Es decir, que cumpla las siguientes condiciones:
a) $A \neq \emptyset$
b) $A \neq \Omega$
c) $\forall x \in A, \forall y \in \Omega, y < x \Rightarrow y \in A$
d) $\forall x \in A, \exists y \in A, x < y$

16.4.7 Proposición.
En un conjunto totalmente ordenado Ω, denso y sin extremos,
a) A_x es un corte de Dedekind
b) Se cumple $x < y \Leftrightarrow A_x \subset A_y$.

Demostración.
a) En 16.4.5 hemos visto que es un segmento inicial. Solo queda ver que no tiene máximo.
Sea $y \in A_x$. Entonces $y < x$. Puesto que Ω es denso, existirá un $z \in \Omega$ tal que $y < z < x$. Luego $z \in A_x$ y puesto que $y < z$, se cumplirá $y \in A_x$.
b) $\Rightarrow$ Sea $x < y$. Sea $z \in A_x$. Luego $z < x$, por tanto $z < x < y$ de lo que se deduce $z < y$ y $z \in A_y$. La inclusión es estricta, pues, por ser Ω denso, existirá $z \in \Omega$ tal que $x < z < y$, luego $z \in A_y$, pero $z \notin A_x$, pues $z < x$ y $x < z$ son incompatibles.
$\Leftarrow$ Supongamos que $A_x \subset A_y$. Si $x = y$ entonces $A_x = A_y$ contradiciendo la hipótesis. Si $y < x$, acabamos de ver que entonces $A_y \subset A_x$, contradiciendo nuevamente la hipótesis, luego la única posibilidad aceptable es $x < y$.

16.4.8 Proposición. Completación mediante cortes de Dedekind.
Sea Ω un conjunto totalmente ordenado, denso y sin extremos. Sea $\overline{\Omega} \subset P(\Omega)$ el conjunto de todos los cortes de Dedekind de Ω.

Definimos la inmersión canónica de Ω en $\overline{\Omega}$ como la siguiente función:

$$i : \Omega \to \overline{\Omega}$$
$$x \mapsto A_x$$

Esta función es una completación de Ω, a la que llamaremos **completación mediante cortes de Dedekind**.

Demostración.

i) Esta función está bien definida, pues en 16.4.7a hemos comprobado que A_x es un corte de Dedekind.

ii) Esta función mantiene el orden: $x < y \Leftrightarrow i(x) < i(y)$ (16.4.7b)

iii) Esta función es inyectiva: $i(x) = i(y) \Rightarrow x = y$. Se deduce directamente del apartado anterior: Si $x \neq y$, o bien $x < y \Rightarrow A_x \subset A_y \Rightarrow A_x \neq A_y$, o bien $x > y \Rightarrow A_y \subset A_x \Rightarrow A_x \neq A_y$.

iv) $i(\Omega)$ es denso en $\overline{\Omega}$.
Sean $A, B \in \overline{\Omega}$, con $A < B$, es decir $A \subset B$. Sea $x \in B - A$. El conjunto B no tiene máximo, luego existirá $y \in B$ tal que $x < y$. Claramente $y \notin A$, pues $x < y \in A \Rightarrow x \in A$ contradiciendo la hipótesis. Veamos que $A < A_y < B$.
$A_y < B$: Si $z \in A_y \Rightarrow z < y \in B$, y por ser B segmento inicial, $z \in B$. La inclusión es estricta, pues $y \in B$ pero $y \notin A_y$.
$A < A_y$: Si $z \in A$, supongamos que $y < z$. Por ser A un segmento inicial, $y \in A$, contradiciendo la hipótesis $y \notin A$. Si $z = y$, igualmente llegamos a $y \in A$, contradiciendo la hipótesis, luego la única posibilidad aceptable es $z < y$, y por tanto $z \in A_y$. La inclusión es estricta, pues $x < y \Rightarrow x \in A_y$, pero $x \notin A$.

v) $\overline{\Omega}$ es un conjunto totalmente ordenado.
Sean $A, B \in \overline{\Omega}$, con $A \neq B$. Supongamos que no sucede $A \subset B$, es decir, existe un elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$. Veamos que, entonces, $B \subset A$.
Sea $y \in B$. Entonces $y \neq x$. Si $x < y \in B$, por ser B intervalo inicial, $x \in B$, contradiciendo la hipótesis. Luego el único caso aceptable es $y < x \in A$, y por ser A un intervalo inicial, $y \in A$. Es decir, $B \subset A$, pues estamos suponiendo $A \neq B$.

vi) $\overline{\Omega}$ es completo.
Sea S un conjunto acotado superiormente de elementos de $\overline{\Omega}$, es decir, existirá un $A \in \overline{\Omega}$ tal que $X \leq A$ para todo $X \in S$. Sea $S' = \bigcup_{X \in S} X$. Veamos que S' es el supremo de S.
- S' es un corte de Dedekind.
a) $S' \neq \emptyset$, pues es la unión de conjuntos no vacíos.
b) $S' \neq \Omega$, pues $S' \subseteq A \neq \Omega$, por ser A un corte de Dedekind.
c) $\forall x \in S', \forall y \in \Omega, y < x \Rightarrow y \in S'$: Si $x \in S'$ y $y \in \Omega$ con $y < x$, existirá un $X \in S$ tal que $x \in X$, y por ser X un corte de Dedekind, $y \in X$ y por tanto $y \in S'$.
d) $\forall x \in S', \exists y \in S', x < y$. Sea $x \in S'$. Luego existirá un $X \in S$ tal que $x \in X$, y por ser X un corte de Dedekind, no estará acotado superiormente, es decir, existirá un $y \in X$ tal que $x < y$. Claramente $y \in S'$.

- S' es el supremo de S.
Está claro que si $X \in S$, $X \subseteq S' = \bigcup_{X \in S} X \Rightarrow X \leq S'$, luego S' es cota superior de S.
Supongamos que existe un $Y \in \overline{\Omega}$ tal que $X \leq Y$ para todo $X \in S$. Entonces claramente $S' = \bigcup_{X \in S} X \subseteq Y \Rightarrow S' \leq Y'$.

vii) $\overline{\Omega}$ no tiene extremos.
Veamos que no tiene máximo, con un razonamiento similar se demuestra que tampoco tiene mínimos.
Supongamos que existe un $X \in \overline{\Omega}$ tal que $Y \leq X$ para todo $Y \in \overline{\Omega}$. El conjunto X es un corte de Dedekind, luego es propio: $X \neq \Omega$, y por tanto existirá un $x \in \Omega - X$.
Entonces $X \subseteq A_x$, donde A_x es un corte de Dedekind, llegando a contradicción.
Veamos que, efectivamente, $X \subseteq A_x$. Sea $y \in X$. Entonces $y \neq x$, y si $x < y$, por ser X un segmento inicial, llegaríamos a $x \in X$, absurdo, por lo tanto la única posibilidad aceptable es $y < x \Rightarrow y \in A_x$.

16.4.16 Teorema. Unicidad de las completaciones.
Sea Ω un subconjunto denso en un conjunto totalmente ordenado Ω', y supongamos que ni Ω ni Ω' tienen extremos.

Hemos visto que podemos considerar $\Omega \subset \overline{\Omega}$ mediante la inmersión

$$x \mapsto A_x = \{ y \in \Omega \mid y < x \} \subset \Omega$$

De la misma forma, podemos considerar $\Omega' \subset \overline{\Omega'}$ mediante la inmersión

$$x \mapsto A'_x = \{ y \in \Omega' \mid y < x \} \subset \Omega'$$

Está claro que $A_x \subseteq A'_x$.
Entonces existe un isomorfismo $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \subset & \Omega' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\Omega} & \overset{f}{\to} & \overline{\Omega'} \end{array}$$

Demostración.

Definimos la función $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ de la siguiente manera:

$$\text{Si } B \in \overline{\Omega},\ f(B) = \bigcup_{x \in B} A'_x \subset \Omega'$$

Y definimos la función inversa $g : \overline{\Omega'} \to \overline{\Omega}$ de la siguiente manera:

$$\text{Si } B' \in \overline{\Omega'},\ g(B') = B' \cap \Omega \subset \Omega$$

i) La función f está bien definida, es decir, $f(B)$ es un corte de Dedekind.

ii) La función f preserva inclusiones: $A < B \Leftrightarrow f(A) < f(B)$

es una propiedad de la teoría de conjuntos.

iii) La función g está bien definida, es decir, $g(B)$ es un corte de Dedekind.

Veamos en primer lugar que esta función está bien definida, es decir, que $B'\cap\Omega$ es un corte de Dedekind de Ω.

- $g(B')$ no está vacío: Puesto que $B'\subset\Omega'$ es un corte de Dedekind, no puede estar vacío, y puesto que no tiene máximo, no puede constar de un solo elemento, pues en dicho caso ese elemento sería el máximo. Luego existen $x<y\in B'$. Puesto que Ω es denso en Ω', existirá un $z\in\Omega$ tal que $x<z<y$. Por ser segmento inicial, $z\in B'$, y por tanto $z\in B'\cap\Omega$.
- $g(B')$ es un segmento inicial: Sea $x\in g(B')$, esto es, $x\in B'\cap\Omega$. Sea $y\in\Omega$ tal que $y<x$. Luego entendiendo x e y como elementos de Ω', por ser B’ un segmento inicial deducimos que $y\in B'$, luego $y\in B'\cap\Omega=f(B')$.
- $g(B')$ es propio: B’ es propio en Ω', luego existe $x\in\Omega'-B'$. B’ no tiene extremos, luego existirá $y\in\Omega'$ tal que $x<y$. Por ser Ω denso en Ω', existirá un $z\in\Omega$ tal que $x<z<y$. Está claro que $z\notin B'$, pues $z\in B'\Rightarrow x\in B'$. Luego $z\in\Omega-g(B')$.
- $g(B')$ no tiene máximo: Supongamos que $m\in g(B')=B'\cap\Omega$ es cota superior de $B'\cap\Omega$. Puesto que B' no tiene máximo, existirá un $x\in B'$ tal que $m<x$. Por densidad de Ω en Ω', existirá un $y\in\Omega$ tal que $m<y<x$. Luego por ser B’ segmento inicial, $y\in B'\Rightarrow y\in B'\cap\Omega=g(B')$. Luego m no puede ser máximo de $g(B')$, porque $m<y$ con $y\in g(B')$.

- Si $B\in\overline{\Omega}$, $g(f(B))=B$.

$$g(f(B))=f(B)\cap\Omega=\left(\bigcup_{x\in B}A'_x\right)\cap\Omega=\bigcup_{x\in B}\left(A'_x\cap\Omega\right)=\bigcup_{x\in B}A_x=A$$

Las dos primeras igualdades son definiciones. La tercera es una propiedad de la teoría de conjuntos. La cuarta se basa en la igualdad

$x\in B\Rightarrow A'_x\cap\Omega=A_x$

En efecto, $y\in A'_x\cap\Omega\Leftrightarrow y\in\Omega\wedge y<x\Leftrightarrow y\in A_x$

La última igualdad se demostró en ????.

- Si $B'\in\Omega'$, $f(g(B'))=B'$.

Desarrollando la igualdad: $B'=f(g(B'))=\bigcup_{x\in g(B')}A'_x=\bigcup_{x\in B'\cap\Omega}A'_x$.

$\subseteq$. Si $x\in B'$, al no tener máximo, existirá un $y\in B'$, $x<y$. Por densidad de Ω en Ω', existirá un $z\in\Omega$ tal que $x<z<y$. Por ser B’ segmento inicial, $z\in B'$. Luego $x\in A'_z$, con $z\in B'\cap\Omega$. Luego $x\in\bigcup_{x\in B'\cap\Omega}A'_x$.

$\supseteq$ Sea $x\in\bigcup_{x\in B'\cap\Omega}A'_x$, es decir, existe un $y\in B'\cap\Omega$ tal que $x\in A'_y$, esto es, $x<y$. Por ser $B'\cap\Omega$ un segmento inicial, $x\in B'\cap\Omega\subseteq B'$.

Así pues, hemos demostrado que f y g son funciones inversas la una de la otra.

Es obvio que f (y lo mismo g) preserva inclusiones. Además, como es biyectiva, preserva también los contenidos estrictos. Por tanto f es un isomorfismo.
Finalmente, demostrar que la restricción de f a Ω es la inclusión de Ω en Ω' es equivalente a decir $f(A_x)=A'_x$ para todo $x\in\Omega$. Como g es la inversa de f, es equivalente a decir $f(A'_x)=A_x$, que es evidente.

16.4.17 Teorema.
Sea Ω' una completación de un conjunto totalmente ordenado Ω denso y sin extremos. Entonces existe un isomorfismo $\overline{\Omega} \to \Omega'$ que restringido a Ω es la identidad.

Demostración. Aplicando el teorema anterior, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \subset & \Omega' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\Omega} & \stackrel{f}{\to} & \overline{\Omega'} \end{array}$$

En el que la columna de la derecha es un isomorfismo, por lo que su función inversa también será un isomorfismo. Basta tomar $h \circ f \circ g$ como en el esquema siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \subset & \Omega' \\ \downarrow g & & \uparrow h \\ \overline{\Omega} & \stackrel{f}{\to} & \overline{\Omega'} \end{array}$$

16.5 Estructuras algebraicas.

16.5.1 Definición. Operación binaria.

Una operación binaria sobre un conjunto de elementos G es una función

$$\circ : G \times G \to G$$
$$(a,b) \mapsto \circ(a,b) = a \circ b$$

16.5.2 Definición. Grupo.

Un grupo es un conjunto $(G,\circ,i)$ de elementos G junto con una operación binaria $\circ$ y un elemento $i \in G$ llamado "**elemento neutro**" cumpliendo las siguientes propiedades:

G1. El conjunto G es un conjunto cerrado para la operación binaria.
G2. Propiedad asociativa: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
G3. Existencia y unicidad de elemento neutro: $i \circ x = x \circ i = x \quad \forall x \in G$.
G4. Existencia y unicidad de elemento inverso:
$\forall x \in G \quad \exists! y \in G$ tal que $x \circ y = y \circ x = i$

Diremos que el grupo es **conmutativo o abeliano** si, además, se cumple
$a \circ b = b \circ a$ para todo $a,b \in G$

16.5.3 Proposición.

El conjunto de transformaciones de un conjunto con la composición de funciones tiene estructura de grupo.

16.5.4 Definición. Anillo de división. Cuerpo.

Un anillo de división es un conjunto $(K,+,\cdot,0,1)$ de elementos K junto con dos operaciones binarias $a+b$ (llamada "**suma**") y $a \cdot b$ (llamada "**producto**") y dos elementos diferentes, El cero 0 y el uno 1, cumpliendo las siguientes propiedades:

C1. $(K,+,0)$ es un grupo abeliano.
C2. $(K-\{0\},\cdot,1)$ es un grupo (no necesariamente conmutativo).
C3. Propiedad distributiva: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ para todo $a,b,c \in K$.

Diremos que $(K,+,\cdot,0,1)$ es un **cuerpo** si, además, el producto $a \cdot b$ es conmutativo.

16.6 Cuerpos ordenados.

16.6.1 Definición. Cuerpo ordenado.
Un cuerpo ordenado (K,P) es un cuerpo K junto con un subconjunto P de elementos de K, a los que llamaremos "**positivos**", cumpliendo las siguientes propiedades:

a) Si $a,b \in P$, entonces $a+b \in P$ y $a \cdot b \in P$.
b) Para cualquier elemento $a \in K$, sucede uno y sólo uno de los siguientes resultados:
$$a \in P,\ a = 0,\ -a \in P$$

16.6.2 Proposición. Algunas propiedades elementales de un cuerpo ordenado.
En todo cuerpo ordenado (K,P) se cumple las siguientes propiedades:
a) $1 \in P,\ 0 \notin P$.
b) K tiene característica 0.
c) Para cualquier $a \in K$, se cumple $a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 \in P$.

Demostración.
a) En K se cumple $1 \neq 0$. Si $1 \notin P$ entonces $-1 \in P$, pero entonces $(-1)\cdot(-1) = 1 \in P$, contradiciendo la hipótesis. Luego $1 \in P$. $0 \notin P$ se deduce directamente de 16.6.1b.
b) Puesto que $1 \in P$, entonces $1+1+...+1 \in P$, y por tanto $1+1+...+1 \neq 0$ ya que $0 \notin P$.
c) Sea $a \neq 0$, entonces $a \in P$ o $-a \in P$. Si $a \in P$ entonces $a^2 = a \cdot a \in P$ claramente. Si $-a \in P$, entonces $(-a)^2 = (-a)\cdot(-a) \in P$, pero $(-a)^2 = a^2$, luego también $a^2 \in P$.
Recíprocamente, si $a^2 \in P$, entonces $a = 0 \Rightarrow a^2 = 0 \cdot 0 = 0 \notin P$, absurdo, luego $a \neq 0$.

16.6.3 Proposición. Orden en un cuerpo ordenado.
Dados dos elementos a y b de un cuerpo ordenado (K,P) diremos $a > b$ cuando $a - b \in P$.
Esta definición cumple las condiciones de orden estricto y con ella K está totalmente ordenado, además, $a \in P \Leftrightarrow a > 0$.

Demostración.
- Propiedad asimétrica: $a > b$ y $b > a$ equivale a $a - b \in P$ y $b - a \in P$, que son incompatibles por 16.6.1b.
- Propiedad Transitiva: $a < b$ y $b < c$ equivale a $b - a \in P$ y $c - b \in P$, luego $c - a = c + 0 - a = c + (b - b) - a = (c - b) + (b - a) \in P \Rightarrow c > a$
- Es un orden total: Si $a \neq b \in K$, o bien $a - b \in P \Rightarrow a > b$, o bien $-(a-b) \in P \Rightarrow b - a \in P \Rightarrow b > a$
- $a \in P \Leftrightarrow a = a - 0 \in P \Leftrightarrow a > 0$.

16.6.4 Proposición.
El orden definido en 16.6.3 cumple las siguientes propiedades:
a) Si $a > b$ y $c \in K$ entonces $a + c > b + c$.
b) Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$.
c) Si $a > b$ y $c \in P$ entonces $ac > bc$.
d) Dados $a,b \in K$, sucede una y sólo una de las siguientes igualdades:
$$a > b\ ,\ a = b,\ b > a$$

Demostración.
a) $a > b \Rightarrow a - b \in P \Rightarrow a + c - (b + c) = a - b \in P$.
b)
$$\left. \begin{array}{l} a > b \Rightarrow a - b \in P \\ b > c \Rightarrow b - c \in P \end{array} \right\} \Rightarrow a - c = (a - b) + (b - c) \in P \Rightarrow a > c$$
c)
$$\left. \begin{array}{l} a > b \Rightarrow a - b \in P \\ c \in P \end{array} \right\} \Rightarrow ac - bc = (a - b)c \in P \Rightarrow ac > bc$$
d) Basta aplicar la condición b) de la definición (16.2.1) con $a - b$:
$$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$$
$$a - b \in P \Leftrightarrow a > b$$
$$-(a - b) \in P \Leftrightarrow b - a \in P \Leftrightarrow b > a$$

16.6.5 Proposición.
Si a y b son positivos, entonces $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

Demostración.
$\Rightarrow$ Supongamos que $a < b$. Entonces $a^2 = a \cdot a < a \cdot b < b \cdot b = b^2$, aplicando dos veces 16.6.4c.
$\Leftarrow$ Supongamos que $a^2 < b^2$. Si $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ contradiciendo la hipótesis. Si $b < a$, aplicando la primera parte de esta demostración llegaríamos a $b^2 < a^2$, contradiciendo nuevamente la hipótesis $a^2 < b^2$. La única opción válida es $a < b$.

16.6.6 Definición. Orden entre tres elementos de un cuerpo ordenado.
En un cuerpo ordenado (K, P) definimos la siguiente relación de orden:
$$a * b * c \Leftrightarrow \begin{cases} a < b < c \\ \quad o \\ c < b < a \end{cases}$$

16.6.5 Proposición. Inmersión canónica de los naturales en un cuerpo ordenado.

Demostración.
Sea (K, P) un cuerpo ordenado.
En primer lugar definimos la inmersión
$$\begin{array}{l} i : IN \to K \\ 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \end{array}$$

16.6.6 Proposición. Inmersión canónica de los racionales en un cuerpo ordenado.
El más pequeño de los subcuerpos de un cuerpo ordenado (K, P) conteniendo 1 es isomorfo al cuerpo de los números racionales Q.

16.6.7 Proposición.

En un cuerpo ordenado (K, P), si $a < b$ entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$, y por lo tanto todo cuerpo ordenado es denso.

Demostración.

$$a = \frac{2a}{2} = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = \frac{2b}{2} = b$$

16.6.8 Definición. Valor absoluto.
Dado un elemento x de un cuerpo ordenado (K,P), definimos su valor absoluto, al que denotaremos por $|x|$, de la siguiente forma:

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \in P \\ -x & si\ x \notin P \end{cases}$$

16.6.9 Proposición. Propiedades del valor absoluto.
El valor absoluto cumple las siguientes propiedades:
a) $|x| \in P$ para todo $x \in K$, y $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
b) $|x| = |-x|$
c) $-|x| \le x \le |x|$
d) $|x| \le y \Leftrightarrow -y \le x \le y$
e) $|x+y| \le |x| + |y|$

Demostración. a) trivial, teniendo en cuenta que $-0 = 0$.
b) Si $x = 0 \notin P \Rightarrow |x| = -x = -0 = 0$, y $-x = -0 = 0 \notin P \Rightarrow |-x| = -0 = 0$
Si $x \in P \Rightarrow |x| = x$, y $-x \notin P \Rightarrow |-x| = |--x| = |x| = x$
Si $x \notin P \Rightarrow |x| = -x$, y $-x \in P \Rightarrow |-x| = -x$
c)

16.6.7 Proposición. Todo cuerpo ordenado es un espacio métrico.
Dados dos elementos x, y de un cuerpo ordenado (K,P), definimos $d(x,y) = |x-y|$, y esta función es una métrica en K (ver 5.1.5).

Demostración.

16.7 Continuidad en cuerpos ordenados.

16.7.1 Definición. Cuerpos ordenados arquimedianos.
Diremos que un cuerpo ordenado (K,P) cumple el **axioma de Arquímedes**, y diremos que es un **cuerpo arquimediano**, cuando para cualquier $a>0$ de K exista un $n \in K$ natural tal que $n>a$.

Observamos que este axioma es el equivalente numérico del axioma geométrico homólogo definido en 4.4.1.

16.7.2 Definición. Axioma de Dedekind para cuerpos ordenados.
Diremos que un cuerpo ordenado (K,P) cumple el axioma de Dedekind cuando, dada una partición $K=\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_1 \neq \varnothing$, $\Sigma_2 \neq \varnothing$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$, en la que cumple

$$a \in \Sigma_1, b \in \Sigma_2 \Rightarrow a<b$$

Entonces existirá un único elemento $c \in K$ tal que

$$a \in \Sigma_1, b \in \Sigma_2 \Rightarrow a \leq c \leq b$$

Observamos que este axioma es el equivalente numérico del axioma geométrico homólogo definido en 4.2.5.

16.7.3 Proposición.
Si se cumple el Axioma de Dedekind se cumple el Axioma de Arquímedes.

Demostración.

16.7.4 Proposición.
Si (K,P) es un cuerpo ordenado cumpliendo el Axioma de Arquímedes, entonces es isomorfo a un subcuerpo de IR, y en este caso será isomorfo a IR si y sólo si cumple el Axioma de Dedekind.

16.7.5 Proposición. Cuerpo ordenado no Arquimediano.
Sea el conjunto $\Omega(t)$ de funciones algebraicas obtenido mediante el conjunto de polinomios con coeficientes racionales en t y las cinco operaciones de suma, resta, multiplicación, división y la operación $\sqrt{1+\omega^2}$, donde ω es cualquier función de $\Omega(t)$.
Hilbert demuestra que este conjunto "numérico" es no arquimediano.

16.8 Cuerpos pitagóricos y euclídeos.

16.8.1 Definición. Cuadrados. Raíces cuadradas.

Diremos que $a \in K$ es un **cuadrado** cuando exista al menos un elemento $b \in K$ tal que $b^2 = a$, al que llamaremos raíz cuadrada de a. Es decir, $a \in K$ será un cuadrado cuando existan raíces cuadradas de a.

16.8.2 Proposición. La raíz cuadrada de un número.

a) Si b es solución de $x^2 = a$, también lo es $-b$.
b) Si existen raíces cuadradas de $a \in K$, con $a \neq 0$, entonces también existen raíces cuadradas positivas de a, y definiremos **la raíz cuadrada de a**, a la que denotaremos por $\sqrt{a}$, como la solución **positiva** de la ecuación $x^2 = a$.

Demostración.
a) Si b satisface $b^2 = a$, entonces $-b$ también. En efecto,

$$(-b)^2 = (-b)\cdot(-b) = b \cdot b = b^2 = a$$

b) Si $a \neq 0$, y b satisface $b^2 = a$, entonces $b \neq 0$, pues en caso contrario tendríamos $a = b^2 = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow a = 0$, llegando a contradicción.
Luego, si b satisface $b^2 = a$, y o bien $b \in P$, y por lo tanto ya tenemos una raíz cuadrada positiva de a, o bien, como acabamos de ver, $-b \in P$ también es una raíz cuadrada de a.

16.8.3 Definición. Valor absoluto.

Dado un elemento a de un cuerpo ordenado (K, P), definimos $|a| \in K$ de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \in P \\ -a & si\ a \notin P \\ 0 & si\ a = 0 \end{cases}$$

Claramente, si $a \neq 0 \Rightarrow |a| \in P$

16.8.4 Proposición.

Para cualquier $a \in K$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Demostración.
Es la pura definición de los conceptos implicados.

16.8.5 Definición. Cuerpo pitagórico.

Diremos que un cuerpo ordenado (K, P) es **pitagórico** cuando exista $\sqrt{1+a^2}$ para todo $a \in K$.

Por ejemplo, Q no es un cuerpo pitagórico, pues no se cumple para $a = 1$.

16.8.6 Proposición.

En un cuerpo (K,P) es pitagórico si y sólo si la suma de dos cuadrados es también un cuadrado, es decir, si existe $\sqrt{a^2+b^2}$ para cualquier $a,b\in K$ con $a\neq 0$ o $b\neq 0$.

Demostración. Sea un cuerpo pitagórico, y sean $a,b\in K$, con $a\neq 0$. Entonces $a^2+b^2=a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)=a^2\left(1+c^2\right)$, con $c=\frac{b}{a}\in K$, luego $\sqrt{a^2+b^2}=|a|\sqrt{1+c^2}\in K$.
Si $a=0$ entonces $b\neq 0$ y el razonamiento es similar.
El recíproco es obvio pues es un caso particular cuando $a=1$.

16.8.7 Definición. Cuerpo euclídeo.
Diremos que un cuerpo ordenado (K,P) es **euclídeo** cuando todo número positivo sea un cuadrado, es decir, exista $\sqrt{a}$ para todo $a>0$. Claramente todo cuerpo euclídeo será también pitagórico.

16.9 Los números naturales.

16.9.1 Definición. Los números naturales.

Damos por supuesto la existencia del conjunto de números naturales

$$IN = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Junto con las operaciones "**suma**":

$$IN \times IN \to IN$$
$$(a, b) \mapsto a + b$$

y "**producto**":

$$IN \times IN \to IN$$
$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

y un **orden total** :

Para todo $n, m \in IN$, $n \leq m$ o $m \leq n$

Cumpliendo las siguientes propiedades:

1. (a + b) + c = a + (b + c)
2. a + b = b + a
3. a + 0 = a
4. (a · b) · c = a · (b · c)
5. a · b = b · a
6. a · 1 = a
7. a · (b + c) = (a · b) + (a · c)
8. Si a < b, entonces a + c < b + c
9. Si a < b and $c \neq 0$, entonces a · c < b · c
10. Si a < b and b < c, entonces a < c
11. Se verifica una y sólo una de las siguientes condiciones: a < b o a = b o b < a
12. El "**Principio de la buena ordenación**": Todo subconjunto de IN tiene mínimo, es decir, para todo subconjunto $S \subseteq IN$, existirá un $m \in S$ tal que, para todo $n \in S$, se cumple $m \leq n$.

16.10 Los números enteros.

16.10.1 Definición. Los números enteros.
El conjunto de números enteros Z se puede construir sobre la base de los números naturales como el conjunto de clases de equivalencia:

$$Z = (IN \times IN)/\sim \text{ donde } (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a + d = c + d$$

Cada una de estas clases de equivalencia las podemos representar de la forma $[a-b]$

Para todos los efectos, podemos suponer definido el conjunto de los números enteros:

$$Z = \{ ...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...\}$$

Como una ampliación natural de los números naturales: $IN \subset Z$, en el que hemos ampliado igualmente las operaciones de suma, producto y orden total:

Suma:

$$\begin{aligned} &Z \times Z \to Z \\ &(a,b) \mapsto a + b \end{aligned}$$

Con el que $(Z,+)$ es un grupo abeliano.

Producto:

$$\begin{aligned} &Z \times Z \to Z \\ &(a,b) \mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

Cumpliendo las propiedades asociativa, conmutativa y siendo el 1 elemento neutro.

La suma y el producto se relacionan mediante la **propiedad distributiva**:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

El conjunto de números enteros está **totalmente ordenado**:

$$\text{Para todo } n,m \in IN ,\ n \le m \text{ o } m \le n$$

Y se cumple el "**Principio de la buena ordenación**": Todo subconjunto de Z acotado inferiormente tiene mínimo.

16.10.2 Proposición.
Todo subconjunto no vacío de Z acotado superiormente tiene máximo.

Demostración. Sea $S \subset Z$, $S \neq \emptyset$. Si S está acotado superiormente, $-S = \{-x \mid \mathrm{x} \in \mathrm{S}\}$ estará acotado inferiormente y por lo tanto, aplicando el Principio de la buena ordenación, tendrá un mínimo m. El elemento $-m$ será el máximo de S.

16.11 Los números racionales.

16.11.1 Definición. El conjunto de fracciones.
Consideremos el conjunto de pares ordenados $(m,n)\in Z\times Z^{+}$.
Estos elementos se denominan **fracciones** y se suelen escribir de la forma habitual "numerador-barra-denominador": $(m,n)=\dfrac{m}{n}$

En el conjunto de fracciones definimos la relación ~: $(\mathrm{a},\mathrm{b})\sim(\mathrm{c},\mathrm{d})\Leftrightarrow \mathrm{a}\cdot\mathrm{d}=\mathrm{b}\cdot c$

Esta relación formaliza la idea de dos fracciones "iguales": $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$

La relación ~ define una relación de equivalencia en el conjunto de fracciones.

Definimos el conjunto de números racionales como el conjunto de clases de equivalencia determinadas por la relación anterior:

$$Q=\left(Z\times Z^{+}\right)/\sim$$

En Q definimos dos operaciones:

Suma de números racionales:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$$

Producto de números racionales.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Observamos que hemos definido estas dos operaciones sobre fracciones, pero es fácil demostrar que están bien construidas, es decir, que el resultado no depende del representante que tomemos. Con estas dos operaciones, $(Q,+,\cdot)$ tiene estructura de cuerpo.

16.11.2 Definición. Ordenación de números racionales.
Definimos un orden en el conjunto de los números racionales de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d\le b\cdot c$$

El conjunto Q dotado de este orden es un conjunto totalmente ordenado, en el que se cumplen, además, las siguientes propiedades:

- Compatibilidad del orden con la suma:
    Si $x\le y$ entonces, para todo $z\in Q$, $x+z\le y+z$

- Compatibilidad del orden con el producto por elementos positivos:
    Si $x\le y$ e $z>0$ entonces $x\cdot z\le y\cdot z$

16.11.3 Definición. Inmersión canónica de Z en Q.
Podemos considerar el conjunto de números enteros como un subconjunto de los números racionales mediante la siguiente inmersión, llamada "**inmersión canónica**":

$$i : Z \to Q$$
$$n \mapsto i(n) = \left[\frac{n}{1}\right]$$

Esta función está bien definida y es inyectiva: $\left[\frac{n}{1}\right] = \left[\frac{m}{1}\right] \Leftrightarrow n \cdot 1 = m \cdot 1 \Leftrightarrow n = m$

No es suprayectiva, por ejemplo si $\left[\frac{1}{2}\right] = i(m) = \left[\frac{m}{1}\right] \Rightarrow 1 \cdot 1 = 2m$ imposible.

Además, esta inmersión mantiene el orden, es compatible con las operaciones y envía el 0 al 0 y el 1 al 1, luego podemos considerar Z como el subconjunto de Q de los números racionales que se pueden escribir mediante fracciones con denominador 1: $m = \frac{m}{1} \in Q$

16.11.4 Proposición.
Si a, b, c y d no son cero, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} > \frac{d}{c}$

Demostración. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < cb \Leftrightarrow \frac{d}{c} < \frac{b}{a}$

16.11.5 Proposición.
a) Para todo $r \in Q$ existirá un $n \in IN$ tal que $n > r$ (es decir, el conjunto de números racionales es arquimediano).
b) Para todo $r, s \in Q$ existirá un $n \in IN$ tal que $n \cdot s > r$.
c) Para todo $r \in Q$ positivo existirá un $n \in IN$ tal que $0 < \frac{1}{n} < r$.
d) Para todo $r \in Q$ positivo existirá un $n \in IN$ tal que $n - 1 \le r < n$.

Demostración.
a) Si $a \le 0$ basta tomar $n = 1$. Supongamos que $a > 0$, luego $r = \frac{a}{b}$ con $a, b > 0$.

Luego existirá un $n \in IN$ tal que $n \cdot b > a$, y por lo tanto $n \cdot b > a \cdot 1$, es decir, $\frac{n}{1} > \frac{a}{b}$.

b) El razonamiento es similar, la desigualdad $\frac{na}{b} > \frac{c}{d}$ se convierte en $n(ad) > bc$ en IN, que siempre tiene solución en n.

c) Basta tomar $r' = \frac{1}{r} > 0$ y aplicar el apartado a. Existirá un $n \in IN$ tal que $0 < \frac{1}{r} < n \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < r$ por 16.11.4.
d)

16.11.6 Proposición. El conjunto de números racionales es incompleto.
En Q no existe solución a la ecuación $x^2 = 2$.

Demostración.
a) El cuadrado de un número par es par.
Si n es par entonces se puede escribir como $n = 2m$ para cierto número natural m.
Luego $n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$ es par.

b) El cuadrado de un número impar es impar.
Si n es impar se puede escribir como $n = 2m+1$ para cierto número natural n. Luego $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 2m + 1 = 2(2m^2 + m) + 1$ es impar.

c) Si el cuadrado de un número es par, entonces ese número es par.
Supongamos que n^2 es par. Si n fuera impar, entonces por el lema anterior, n^2 sería impar, llegando a contradicción. Luego n tiene que ser par.

d) En Q no existe solución a la ecuación $x^2 = 2$.
Supongamos que existe una fracción simplificada $\frac{m}{n}$ tal que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$
para ciertos naturales m y n.
Entonces $2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow \mathrm{m}^2$ es par.
Por el apartado anterior deducimos que m es par, y por tanto podemos escribir $m = 2p$ para cierto número natural p. Pero entonces:
$2n^2 = m^2 = (2p)^2 = 4p^2 \Rightarrow n^2 = 2p^2 \Rightarrow \mathrm{n}^2$ es par y por lo tanto n es par.
Es decir, m y n son ambos pares, luego la fracción m/n no es irreductible, llegando a contradicción.

16.11.7 Lema.
Si a y b son positivos:
a) Si $a < b$ entonces $a^2 < b^2$
b) $a^2 < b^2$, entonces $a < b$.

Demostración.
a) $a < b$ entonces $a^2 = a \cdot a < b \cdot a < b \cdot b = b^2$.
b) ????

16.11.8 Teorema. Propiedad arquimediana.
Dados dos números racionales $a > 0$ y $b > 0$, existirá un número natural n tal que $na > b$.

Demostración. Supongamos que $a = \frac{p}{q}$ y $b = \frac{r}{s}$ para ciertos p, q, r y s naturales.

Tomando $n = 2qr$, está claro que $nqs = 2qrps > qr \Rightarrow na > b$

16.11.9 Teorema. Caracterización de los cuerpos arquimedianos.
Sea F un cuerpo ordenado. Es equivalente:

a) F es arquimediano.

b) Para cada $x \in F$, existe un $n \in N$ tal que $x < n$, es decir, los números naturales no están acotados superiormente.

c) Para cada $x \in F$, existen $n, m \in Z$ tales que $x < n$ $m < x$ y es decir, los números enteros no están acotados, ni superiormente ni inferiormente.

d) $Inf\left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\} = 0$

e) $Inf\left\{\frac{1}{2^n}, n \in N\right\} = 0$

16.12 Los números reales.

16.12.1 Definición. Conjunto de los números reales.
Definimos IR como la completación de Q mediante cortes de Dedekind, tal y como se desarrolló en el apartado 16.4.

16.12.2 Definición. La inmersión canónica de Q en IR.
Podemos considerar el conjunto de números racionales como un subconjunto de los números reales mediante la inmersión canónica definida en 16.4.5 y 16.4.10:

$$Q \to IR$$
$$p \mapsto A_p = \{ q \in Q \mid q < p \}$$

16.12.3 Proposición. Suma de números reales.
Cada número real es un corte de Dedekind de Q, es decir, un subconjunto infinito de números racionales, por lo que debemos ahora construir una suma y un producto adecuada para estos elementos.

Dados dos cortes de Dedekind $A, B \in IR$, definimos su suma $A+B$ de la siguiente forma:

$$A+B = \{p+q \mid \mathrm{p} \in \mathrm{A}, q \in B\} \subset Q$$

La suma así definida es un corte de Dedekind:

a) $A+B \neq \varnothing$: Se deduce directamente de $A \neq \varnothing$ y $B \neq \varnothing$.
b) $\forall x \in A+B, \forall y \in Q, y < x \Rightarrow y \in A+B$:
Si $x \in A+B$, entonces $x = a+b$ con $a \in A$ y $b \in B$. Sea $y \in Q$ con $y < a+b$. Entonces $y-b < a \in A \Rightarrow y-b \in A$ por ser A un corte de Dedekind. Luego $y = y-b+b \in A+B$.
c) $\forall x \in A+B, \exists y \in A+B, x < y$:
Si $x \in A+B$, entonces $x = a+b$ con $a \in A$ y $b \in B$. Luego, al no tener A y B máximo, existirá un $a' \in A$ con $a < a'$ y un $b' \in B$ con $b < b'$. Luego $x = a+b < a'+b < a'+b' \in A+B$.
d) $A+B \neq Q$:

16.12.4 Proposición.
Existe un $\alpha \in IR$, $\alpha > 0$, tal que $\alpha^2 = 2$.

Demostración.
Sea $S = \{x \in IR, x > 0, x^2 < 2\} \subset IR$.
$1^2 = 1 < 2$, luego $1 \in S$ y por tanto $S \neq \emptyset$.
Para cualquier $x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 2^2 = 4 > 2$, luego si $y \in S$, $y^2 < 2 < x^2 \Rightarrow y < x$ (14.6.5)
Luego S está acotado superiormente y no está vacío, luego por completitud de IR, S tendrá un supremo. Sea $\alpha = Sup(S) \in IR$. Vamos a ver que $\alpha^2 = 2$.
Supongamos que $\alpha^2 < 2$.
Entonces $2 - \alpha^2 > 0$
También $\alpha > 0$ (????) luego $2\alpha + 1 > 0$, y por tanto $\frac{2-\alpha^2}{2\alpha+1} > 0$
Luego (por ????) existirá un $n \in IN$ tal que
$0 < \frac{1}{n} < \frac{2-\alpha^2}{2\alpha+1} \Rightarrow 0 < \frac{2\alpha+1}{n} < 2 - \alpha^2$

Por otro lado, $\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} = \alpha^2 + \frac{1}{n}\left(2\alpha + \frac{1}{n}\right)$
Puesto que $0 < \frac{1}{n} < 1$ entonces
$\alpha^2 + \frac{1}{n}\left(2\alpha + \frac{1}{n}\right) < \alpha^2 + \frac{1}{n}(2\alpha + 1) = \alpha^2 + \frac{2\alpha+1}{n} < \alpha^2 + 2 - \alpha^2 = 2$
Es decir $\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 < 2 \Rightarrow \alpha + \frac{1}{n} \in S$, pero $\alpha < \alpha + \frac{1}{n}$, luego α no puede ser el supremo de S, llegando a contradicción.

Supongamos que $\alpha^2 > 2$. En este caso
$\alpha^2 - 2 > 0$ y $2\alpha > 0$, luego $0 < \frac{\alpha^2 - 2}{2\alpha}$.
Sea $n \in IN$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \frac{\alpha^2-2}{2\alpha} \Rightarrow 0 < \frac{2\alpha}{n} < \alpha^2 - 2$

Luego
$\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} < \alpha^2 - (\alpha^2 - 2) + \frac{1}{n^2} = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 \Rightarrow \left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$.
Sea $\beta = \alpha - \frac{1}{n} < \alpha$ cumple $\beta^2 > 2$, luego β es cota superior de S (por 14.6.5), contradiciendo nuevamente la hipótesis $\alpha = Sup(S)$.
La única posibilidad que queda aceptable es que $\alpha^2 = 2$, tal y como queríamos ver.

16.12.5 Definición. Funciones trigonométricas.
Definimos las funciones trigonométricas de forma analítica, es decir, independientemente del concepto geométrico de ángulo. Estas funciones están definidas para todo $x \in IR$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

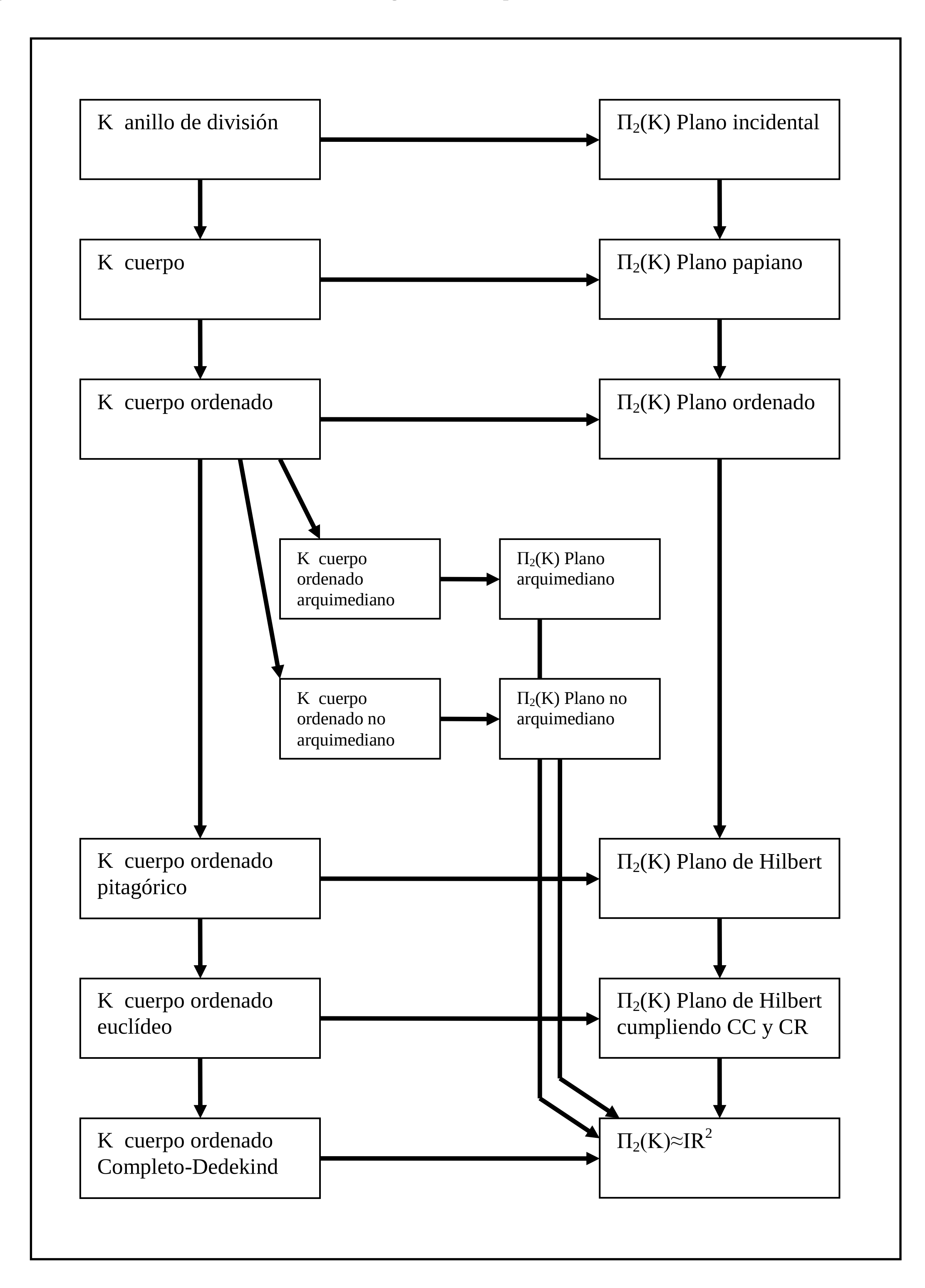
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Definimos la función tangente como cociente de las funciones anteriores:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

17 Planos cartesianos.

En esta unidad estudiaremos la relación entre ciertas propiedades aritméticas de K y ciertas propiedades geométricas de su plano cartesiano K^2, de forma progresiva. La guía de lectura de esta unidad es el siguiente esquema:



17.1 Plano cartesiano sobre un cuerpo.

17.1.1 Definición. El plano cartesiano $\Pi_2(K)$.
Dado un cuerpo K, el plano cartesiano $\Pi_2(K)$ sobre el cuerpo K será el plano cuyos puntos son los elementos $(a,b)\in K^2 = K\times K$ y las rectas serán los conjuntos de la forma $ax+by+c=0$ para ciertos $a,b,c\in K$ con $(a,b)\neq(0,0)$.

Dado un punto $P=(x,y)$ de $\Pi_2(K)$, diremos que los números x e y de K son las **coordenadas cartesianas** del punto.

17.1.2 Proposición. Pendiente de una recta.
Las rectas de un plano cartesiano $\Pi_2(K)$ se clasifican en dos grupos diferentes:

a) $y=mx+n$, con $m,n\in K$. (llamadas "**rectas con pendiente m**")

b) $x=k$ con $k\in K$. (llamadas "**rectas verticales**")

Y los valores $m,n,k\in K$ determinan unívocamente la recta.
En el primer caso, al valor m le llamaremos "**pendiente de la recta**", y si m=0 diremos que se trata de una recta "**horizontal**". En particular, el "eje de abscisas" $y=0$ es una recta horizontal.
En el segundo caso diremos que se trata de una recta "**vertical**". En particular, el "eje de ordenadas" $x=0$ es una recta vertical. A las rectas verticales les llamaremos "rectas con pendiente infinita", y escribiremos $m=\infty$, pero, como siempre que utilizamos el símbolo infinito, debemos tener muy claro que ∞ no es ningún elemento de K, es sólo un símbolo que denota un caso particular de recta.

$$rectas \rightarrow \begin{cases} Verticales \rightarrow m=\infty \\ No\ verticales \rightarrow \begin{cases} Horizontales \rightarrow m=0 \\ No\ horizontales \rightarrow 0\neq m\in K \end{cases} \end{cases}$$

Demostración.
Dada una recta $ax+by+c=0$, si $b=0$ entonces $a\neq 0$ y la ecuación se puede escribir como $x=\frac{-c}{a}\in K$.
Si, por el contrario, $b\neq 0$, entonces podemos escribir la ecuación de la forma

$$y=\frac{-a}{b}x+\frac{-c}{b}$$

17.1.3 Proposición. Recta que pasa por dos puntos.
Dados dos puntos distintos $A=(a_1,a_2)$ y $B=(b_1,b_2)$,
a) Si $a_1 \neq b_1$, ambos puntos pasarán por la recta r de ecuación asociada

$$y = mx + n, \text{ con } m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \text{ y } n = a_2 - m a_1$$

y es la única recta que contiene ambos puntos.

b) Si $a_1 = b_1$, ambos puntos pasarán por la recta vertical de ecuación asociada $x = a_1$
y es la única recta que contiene ambos puntos.

Demostración.
a) Si $a_1 \neq b_1$, sustituyendo vemos que $A, B \in r$:
$ma_1 + n = ma_1 + a_2 - ma_1 = a_2$

$$mb_1 + n = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} b_1 + a_2 - \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} a_1 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(b_1 - a_1) + a_2 = b_2 - a_2 + a_2 = b_2$$

Supongamos que los puntos A y B pertenecen a dos rectas $y = mx + n$, $y = m'x + n'$.
Entonces

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = ma_1 + n \\ b_2 = mb_1 + n \end{array}\right\} \Rightarrow b_2 - a_2 = mb_1 + n - (ma_1 + n) = mb_1 + n - ma_1 - n =$$

$$mb_1 - ma_1 = m(b_1 - a_1) \Rightarrow m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

Pero esto mismo lo podemos hacer para la segunda ecuación $y = m'x + n'$, llegando a
$m' = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$, y por tanto $m = m'$. Y entonces:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = ma_1 + n \\ a_2 = ma_1 + n' \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = ma_1 + n - (ma_1 + n') = ma_1 + n - ma_1 - n' = n - n' \Rightarrow n = n'$$

b) Si $a_1 = b_1$, claramente ambos puntos satisfacen la ecuación $x = a_1$, y claramente es la única recta vertical que pasa por ambos.

17.1.4 Proposición.
El plano cartesiano $\Pi_2(K)$ es un plano incidental.

Demostración.
- Axioma I1. Es la proposición anterior 17.1.3.
- Axioma I2. En todo cuerpo K hay al menos dos números diferentes, el 0 y el 1. Por lo tanto, para una recta vertical $x = k$ tendremos al menos los puntos $(k,0)$ y $(k,1)$ diferentes, y para una recta del tipo $y = mx + n$ tendremos, al menos, los puntos $(0,n)$ y $(1, m+n)$

- Axioma I3. Nuevamente tenemos en cuenta que en todo cuerpo K se cumple $0 \neq 1$.
Los puntos $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ y $C = (0,1)$ son claramente diferentes y no son colineales. Efectivamente, ninguna recta vertical $x = a$ puede contener a B y C a la vez, pues entonces $1 = a = 0$, y ni tampoco ninguna recta de la forma $y = mx + n$, pues

entonces $0 = m \cdot 0 + n \Rightarrow n = 0$ y $0 = m \cdot 1 + 0 = m \Rightarrow m = 0$, pero entonces $1 = 0 \cdot 0 + 0 = 0$, absurdo.

17.1.5 Proposición.
Todo plano cartesiano $\Pi_2(K)$ cumple siempre el Postulado de la Única Paralela, es decir, es siempre un **plano afín** (ver 1.2.20).

Demostración.
Sea $A = (a, b)$ un punto del plano cartesiano y sea r una recta, tal que $A \notin r$.
Si la recta es vertical, es decir, $x = k$ para cierto $k \in K$, entonces $A \notin r \Rightarrow k \neq a$, y por tanto $A \in s$ donde s es la recta vertical $x = a$, y ambas rectas son claramente paralelas, pues $\begin{cases} x = k \\ x = a \end{cases}$ implica $k = a$
Si, por el contrario, se trata de una recta con pendiente m, es decir, de la forma $y = mx + n$, $A \notin r \Rightarrow b \neq ma + n$, tomaremos la recta s de ecuación $y = mx + n'$ con $n' = b - ma$.
Claramente el punto A pertenece a s: $ma + b - ma = b$, y las rectas son paralelas, pues $\begin{cases} y = mx + n \\ y = mx + n' \end{cases} \Rightarrow n = n' \Rightarrow n = b - ma \Rightarrow b = ma + n$ llegando a contradicción.

17.2 Plano cartesiano sobre un cuerpo ordenado.

17.2.1 Definición. Orden entre tres puntos.

En un plano cartesiano $\Pi_2(K)$ sobre un cuerpo ordenado (K,P) definimos la siguiente relación de orden:

Dados tres puntos $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$ y $C=(c_1,c_2)$,

$$A*B*C \Leftrightarrow \begin{cases} a_1*b_1*c_1 \text{ y están alineados en una recta con pendiente m} \\ a_2*b_2*c_2 \text{ y están alineados en una recta vertical} \end{cases}$$

17.2.2 Proposición.

Dados tres puntos $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$ y $C=(c_1,c_2)$, se cumplirá $A*B*C$ si y sólo si existe un $\lambda\in K$, $0<\lambda<1$ tal que

$$b_i=\lambda a_i+(1-\lambda)c_i \quad i=1,2$$

Demostración.

$\Rightarrow$Supongamos que $A*B*C$. Supongamos en primer lugar que están alineados en una recta no vertical $y=mx+n$. Entonces $a_1<b_1<c_1$. Sea $\lambda=\dfrac{c_1-b_1}{c_1-a_1}$.

Entonces

$$\lambda a_1+(1-\lambda)c_1=\frac{c_1-b_1}{c_1-a_1}a_1+\left(1-\frac{c_1-b_1}{c_1-a_1}\right)c_1=$$
$$=\frac{c_1-b_1}{c_1-a_1}a_1+\frac{b_1-a_1}{c_1-a_1}c_1=\frac{(c_1-b_1)a_1+(b_1-a_1)c_1}{c_1-a_1}=\frac{(c_1-a_1)b_1}{c_1-a_1}=b_1$$

Y también:

$$\lambda a_2+(1-\lambda)c_2=\lambda(ma_1+n)+(1-\lambda)(mc_1+n)=$$
$$\lambda ma_1+mc_1+n-\lambda mc_1=m(\lambda a_1+c_1-\lambda mc_1)+n=$$
$$=m(\lambda a_1+(1-\lambda)c_1)+n=mb_1+n=b_2$$

Si la recta es vertical, $a_2<b_2<c_2$. Sea $\lambda=\dfrac{c_2-b_2}{c_2-a_2}$.

Se cumplirá claramente $b_2=\lambda a_2+(1-\lambda)c_2$.

$\lambda a_1+(1-\lambda)c_1=\lambda a_1+(1-\lambda)a_1=a_1=b_1$ puesto que $a_1=b_1=c_1$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $b_i=\lambda a_i+(1-\lambda)c_i$ $i=1,2$ para cierto $\lambda\in K$ con $0<\lambda<1$.

$$b_1=\lambda a_1+(1-\lambda)c_1\Rightarrow b_1=\lambda a_1+c_1-\lambda c_1\Rightarrow b_1-c_1=\lambda(a_1-c_1)\Rightarrow\lambda=\frac{b_1-c_1}{a_1-c_1}$$

Y de la misma forma $\lambda=\dfrac{b_2-c_2}{a_2-c_2}$, luego

$$\frac{b_1-c_1}{a_1-c_1}=\frac{b_2-c_2}{a_2-c_2}\Rightarrow\frac{a_2-c_2}{a_1-c_1}(b_1-c_1)=b_2-c_2\Rightarrow mb_1-mc_1+c_2=b_2\Rightarrow$$
$$mb_1+n=b_2$$

Con $m=\frac{a_2-c_2}{a_1-c_1}$ y $n=-mc_1+c_2$, es decir, el punto B pertenece a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ (ver 17.1.3), es decir, los tres puntos están alineados.

Proposición.
Todo plano incidental cartesiano $\Pi_2(K)$ sobre un cuerpo ordenado (K,P), dotado de la relación de orden anterior, es un plano ordenado, es decir, satisface los axiomas B1 a B4 definidos en 2.1.1 y 2.1.4.

Demostración.
Axioma B1. Trivial.
Axioma B2.
Sean $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$ dos puntos diferentes.
Supongamos que $a_1 \neq b_1$. Sea $y=mx+n$ la ecuación asociada a la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Podemos suponer que $a_1 < b_1$ (en caso contrario el razonamiento sería similar).
Tomando los valores $a_3=a_1-1$, $a_4=\frac{a_1+b_1}{2}$, y $a_5=b_1+1$, los puntos asociados respectivos C, D y E cumplirán $C*A*B$, $A*D*B$, y $A*B*E$.
Nota: Aquí utilizamos que $1/2 \in K$ puesto que K tiene característica 0 (ver ????).

Si $a_1=b_1$, entonces la recta es vertical, se cumplirá $a_2 \neq b_2$ y tomando los elementos $b_3=a_2-1$, $b_4=\frac{a_2+b_2}{2}$, y $b_5=b_2+1$, obtendremos puntos C, D y E cumpliendo $C*A*B$, $A*D*B$, y $A*B*E$.

Axioma B3.

Teorema. Continuidad en planos cartesianos sobre cuerpos ordenados.
Un plano cartesiano $\Pi_2(K)$ sobre un cuerpo ordenado (K,P) cumplirá el Axioma de Arquímedes (4.4.1) o el Axioma de Dedekind (4.2.5) si y sólo si el cuerpo K cumple los axiomas equivalentes de Arquímedes (????) o de Dedekind (????)

Proposición. Plano de Hilbert no arquimediano.

Observación: Hilbert dedicó el capítulo 2 del Grundlagen a probar la independencia y no contradicción de su sistema axiomático. En particular demostró la independencia del Axioma de Arquímedes del resto, y para ello se valió de un modelo de geometría plana no arquimediana, es decir, un modelo de plano en el que se satisfacen todos los axiomas del Grundlagen pero no se cumple el Axioma de Arquímedes.
Además, Hilbert demuestra que en esta geometría no se cumple la Proposición 1.38 de Los Elementos de Euclides ("Dos triángulos o dos paralelogramos teniendo igual base e igual altura tienen áreas iguales"). Esto implica que la Proposición 1.38 no se puede demostrar sin el Axioma de Arquímedes.

17.3 Plano cartesiano sobre un cuerpo pitagórico.

17.3.1 Definición. Distancia "al cuadrado" y congruencia de segmentos.
Dado un plano cartesiano $\Pi_2(K)$ sobre un cuerpo no necesariamente ordenado, definimos la distancia "**al cuadrado**" entre dos puntos $A=(a_1,a_2)$ y $B=(b_1,b_2)$ de la siguiente manera:

$$\tilde{d}(A,B)=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\in K$$

Diremos que dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son **congruentes** cuando sus extremos "están a la misma distancia":

$$\overline{AB}\cong\overline{CD}\Leftrightarrow\tilde{d}(A,B)=\tilde{d}(C,D)$$

17.3.2 Proposición.
La congruencia entre segmentos que acabamos de definir es una relación de equivalencia.

Demostración.
Las propiedades simétrica, reflexiva y transitiva se cumplen claramente puesto que se trasladan a las propiedades homónimas en el cuerpo K.

Proposición.
En un plano cartesiano $\Pi_2(K)$ sobre un cuerpo ordenado K, dado un punto $P=(a_1,a_2)$, una recta $y=mx+n$ a la que pertenece P, y un valor $d\in K$,
Si existe $\sqrt{d}$ y existe $\sqrt{1+m^2}$, entonces existirá un valor m' positivo para el cual el punto $Q=(b_1,b_2)$, con $b_1=a_1+m'$ y $b_2=mb_1+n$ cumplirá $\tilde{d}(P,Q)=d$.

Demostración.

$$\tilde{d}(P,Q)=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(b_1-a_1)^2+(mb_1+n-ma_1-n)^2=$$

$$(b_1-a_1)^2+(mb_1-ma_1)^2=(b_1-a_1)^2+m^2(b_1-a_1)^2=$$

$$(1+m^2)(b_1-a_1)^2=d\Rightarrow(b_1-a_1)^2=\frac{d}{1+m^2}\Rightarrow b_1-a_1=\sqrt{\frac{d}{1+m^2}}$$

$$\Rightarrow b_1=a_1+\sqrt{\frac{d}{1+m^2}}$$

El valor buscado es $m'=\sqrt{\frac{d}{1+m^2}}=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{1+m^2}}$, que existirá por hipótesis.

Definición. Distancia en un plano cartesiano sobre un cuerpo pitagórico.
Dado un plano cartesiano $\Pi_2(K)$, donde K es un cuerpo pitagórico, tiene sentido definir la distancia entre dos puntos $A=(a_1,a_2)$ y $B=(b_1,b_2)$ de la siguiente manera:

$$d(A,B)=\sqrt{\tilde{d}(A,B)}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\in K$$

Puesto que en la proposición 17.4.6 hemos garantizado la existencia de dicha raíz cuadrada.

Proposición.
Todo plano cartesiano $\Pi_2(K)$ sobre un cuerpo pitagórico K cumple el axioma de congruencia C2.

Demostración.
Sea $\overline{AB}$ un segmento y $\overrightarrow{CD}$ una semirrecta. Sean $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$, $C=(c_1,c_2)$ y $D=(d_1,d_2)$.
Queremos demostrar que existe un único punto $E=(e_1,e_2)\in\overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{AB}\cong\overline{CD}$.

Vamos a suponer que la recta $\overleftrightarrow{CD}$ no es vertical. Entonces se podrá escribir de la forma $y=mx+n$, y la semirrecta $\overrightarrow{CD}$ serán aquellos puntos de la recta anterior para los que $x\geq c_1$.
Sea $d=d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\Rightarrow D=d^2=\tilde{d}(A,B)$.
Se cumplen las condiciones de la proposición ????, por lo que existirá un m' positivo para el cual el punto $E=(e_1,e_2)\in\overleftrightarrow{CD}$ con $e_1=c_1+m'$ y $e_2=me_1+n$ cumplirá $\tilde{d}(C,E)=D$, es decir, $(e_1-c_1)^2+(e_2-c_2)^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$
Y por tanto

$$\sqrt{(e_1-c_1)^2+(e_2-c_2)^2}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

Es decir, $d(C,E)=d(A,B)$, y por tanto $\overline{AB}\cong\overline{CD}$, tal y como queríamos ver.

Si la recta es vertical basta tomar el punto $E=(c_1,c_2+d)$.

Proposición.
Si un plano cartesiano $\Pi_2(K)$ sobre un cuerpo ordenado K cumple el axioma de congruencia C2, entonces K es pitagórico.

Demostración.
Sea $a\in K$. Tomamos los puntos $A=(0,0)$ y $B=(a,1)$, $C=A$ y $D=(1,0)$.
$d(A,B)=\sqrt{(a-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{a^2+1}$.
La semirrecta $\overrightarrow{CD}$ tendrá por ecuación $y=0$ y por tanto $E=(e,0)$ para cierto $e\in P$.
$d(C,E)=\sqrt{(e-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{e^2}=|e|=e$
Luego existirá un cierto $e\in P$ tal que $e=\sqrt{a^2+1}$, y por tanto el cuerpo K es pitagórico.

Corolario.
Un plano cartesiano $\Pi_2(K)$ sobre un cuerpo ordenado K cumple el axioma de congruencia C2 si y sólo si K es pitagórico.

Definición. Ángulos rectos, agudos y obtusos.
Sea $\alpha = \angle ABC$ un ángulo, definido por las dos semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ de vértice común A. Sea m la pendiente de $\overrightarrow{AB}$ y m' la pendiente de $\overrightarrow{AC}$, si existen.
Diremos que α es **recto** cuando una de ellas sea horizontal y la otra vertical, o cuando, en caso contrario, $m\,m' = -1$.
Diremos que un ángulo es **agudo** cuando esté contenido en un ángulo recto, y diremos que un ángulo es **obtuso** cuando un ángulo recto esté contenido en él.

Definición. Tangente de un ángulo. Ángulos congruentes.
Sea $\alpha = \angle ABC$ un ángulo, definido por las dos semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ de vértice común A. Sea m la pendiente de $\overrightarrow{AB}$ y m' la pendiente de $\overrightarrow{AC}$, si existen.
Definimos la tangente del ángulo α, y escribiremos $\tan\alpha$, como:

$$\tan\alpha = \begin{cases} \infty & \textit{si el ángulo es recto} \\ \left|\dfrac{m'-m}{1+m\,m'}\right| & \textit{si el ángulo es agudo} \\ -\left|\dfrac{m'-m}{1+m\,m'}\right| & \textit{si el ángulo es obtuso} \end{cases}$$

Con las convenciones $\dfrac{\infty - m}{1+\infty\cdot m} = \dfrac{1}{m}$ y $\dfrac{m'-\infty}{1+\infty\cdot m'} = \dfrac{1}{m'}$

Diremos que dos ángulos son **congruentes** cuando tengan la misma tangente asociada.

17.4 Plano cartesiano sobre un cuerpo euclídeo.

17.4.1 Proposición.
Dado un plano cartesiano sobre un cuerpo ordenado K, son equivalentes:
a) En el plano se cumple el Postulado de la Intersección Circunferencia-Circunferencia. (4.3.14)
b) En el plano se cumple el Postulado de la Intersección Circunferencia-Recta (4.3.12)
c) K es un cuerpo euclídeo.

Demostración.
$a \Rightarrow b$ se demostró en general para cualquier plano de Hilbert en 4.3.17.
$b \Rightarrow a$. Sea $a \in K$ positivo. Sean $O=(0,0)$, $A=(a,0)$ y $A'=(a+1,0)$.
Consideremos la recta vertical que pasa por A, es decir, aquella que tiene asociada la ecuación $x=a$.
Consideremos también la circunferencia de centro $C=\left(\frac{a+1}{2},0\right)$ y radio $\frac{a+1}{2}$.
Claramente la recta tiene un punto en el interior de la circunferencia pues

$$d(A,C)=\sqrt{\left(a-\frac{a+1}{2}\right)^2+0^2}=\sqrt{\left(\frac{2a-(a+1)}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}=\left|\frac{a-1}{2}\right|<\frac{a+1}{2}$$

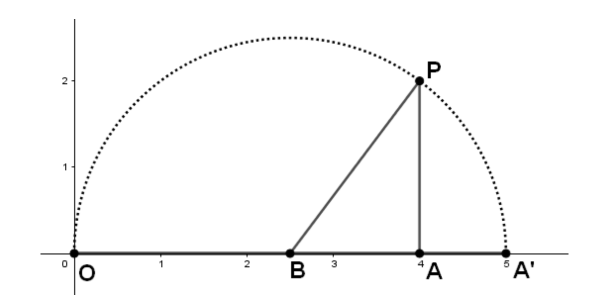
Luego, por hipótesis, la circunferencia y la recta se cortarán al menos en un punto $P=(a,p_2)$, para cierto $p_2 \in K$.
Los puntos de la circunferencia están caracterizados de la siguiente manera:

$$\frac{a+1}{2}=d(P,C)=\sqrt{\left(a-\frac{a+1}{2}\right)^2+p_2{}^2}=\sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+p_2{}^2}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{a+1}{2}\right)^2=\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+p_2{}^2\Rightarrow p_2{}^2=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=\frac{(a+1)^2-(a-1)^2}{4}=$$

$$=\frac{a^2+2a+1-(a^2-2a+1)}{4}=\frac{4a}{4}=a$$

Luego el elemento $p_2 \in K$ es una raíz cuadrada de a.



17.4.2 Corolario.
En un plano cartesiano sobre un cuerpo ordenado K el Postulado de la Intersección Circunferencia-Circunferencia (4.3.14) y el Postulado de la Intersección Circunferencia-Recta (4.3.12) son equivalentes.

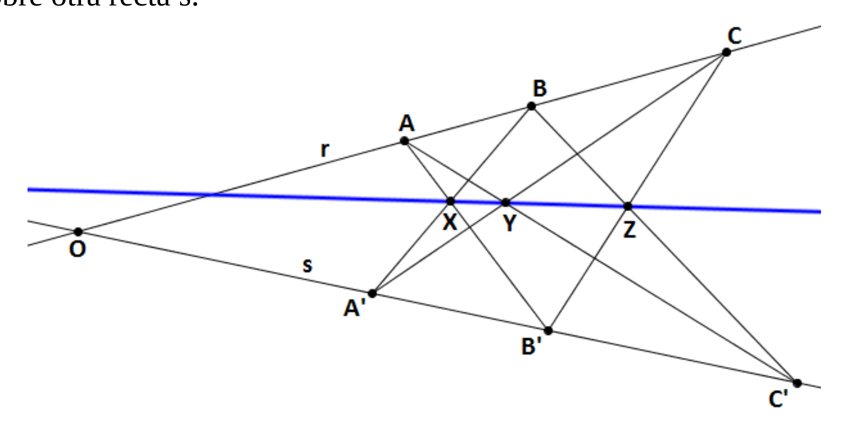
Demostración.
Se deduce directamente de la proposición anterior.

17.5 Plano cartesiano sobre un anillo de división.

Estamos desarrollando los planos cartesianos sobre cuerpos, pero una lectura atenta de los argumentos utilizados en 17.1 nos permite ver que no todas las propiedades de los cuerpos son necesarias para dotar a $\Pi_2(K)$ de estructura de plano incidental: No hemos tenido la necesidad en ningún momento de utilizar la conmutatividad del producto de elementos de K. Así pues, es perfectamente factible construir un plano incidental analítico sobre un cuerpo sin exigir la conmutatividad del producto, es decir, sobre un anillo de división. Y encontraremos una relación sorprendente: La conmutatividad de K está directamente relacionada con la verificación en dicho plano del Postulado de Pappus.

17.5.1 Proposición.
Se puede definir el plano cartesiano $\Pi_2(K)$ sobre un anillo de división K tal y como hicimos en el apartado 17.1, y cumplirá todos los axiomas de plano incidental.

17.5.2 Teorema. En el plano proyectivo real se cumple el Postulado de Pappus.
En el plano $P_2(IR)$ sean A, B, C puntos distintos sobre una recta r y A’,B’,C’ puntos distintos sobre otra recta s.



Demostración.
Entre los puntos A, B y C al menos dos de ellos no serán el punto O de intersección de las dos rectas. Supongamos que son A y B.
De la misma forma, entre A’, B’ y C’ al menos dos no serán el punto O. Supongamos que son A’ y B’.
Tomamos la referencia $\{A, B, A'; B'\}$. Entonces $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $A'=(0,0,1)$ y $B'=(1,1,1)$.
$C\in AB: z=0 \Rightarrow C=(a,b,0)$ Pero $C\neq A \Rightarrow b\neq 0$ luego dividiendo por b nos queda $C=(a,1,0)$.
$C'\in A'B': x=y \Rightarrow C'=(c,c,d)$ Pero $C'\neq A' \Rightarrow c\neq 0$ luego dividiendo por c nos queda $C'=(1,1,d)$.

$$\left.\begin{array}{l} AB': y=z \\ A'B: 0=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow X = AB'\cap A'B=(0,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} AC':0=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & d \end{vmatrix} \Leftrightarrow z=d\,y \\ A'C:0=\begin{vmatrix} x & 0 & a \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x=a\,y \end{array}\right\} \Rightarrow Y = AC'\cap A'C=(a,1,d)$$

$$\left.\begin{array}{l} CB':0=\begin{vmatrix} x & a & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} -a(y-z)+(x-z)=0 \\ -ay+az+x-z=0 \\ \dfrac{(a-1)z+x}{a}=y \end{array} \\ C'B:0=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & d & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow z=d\,x \end{array}\right\} \Rightarrow Z=CB'\cap C'B=\left(1,\frac{(a-1)d+1}{a},d\right)$$

Veamos que su determinante es cero, independientemente de a y d:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & ((a-1)d+1)/a \\ 1 & d & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 1 \\ d & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & ((a-1)d+1)/a \end{vmatrix} =$$

$$=-(ad-d)+\left(a\frac{(a-1)d+1}{a}-1\right)=d-ad+(a-1)d+1-1=$$

$$=d-ad+ad-d+1-1=0$$

Luego los tres puntos están alineados.

17.5.3 Teorema. Planos proyectivos analíticos papianos.
El Postulado de Pappus proyectivo (12.3.1) no se cumple en todo plano proyectivo analítico $P_2(K)$ sobre un anillo de división K arbitrario.
En general, en un plano proyectivo analítico $P_2(K)$ se cumplirá el Postulado de Pappus proyectivo (y en cuyo caso diremos que el plano es "**papiano**") si y sólo si K es un anillo de división conmutativo, es decir, un cuerpo.

Demostración.

17.6 El cuerpo de segmentos de un plano axiomático afín.

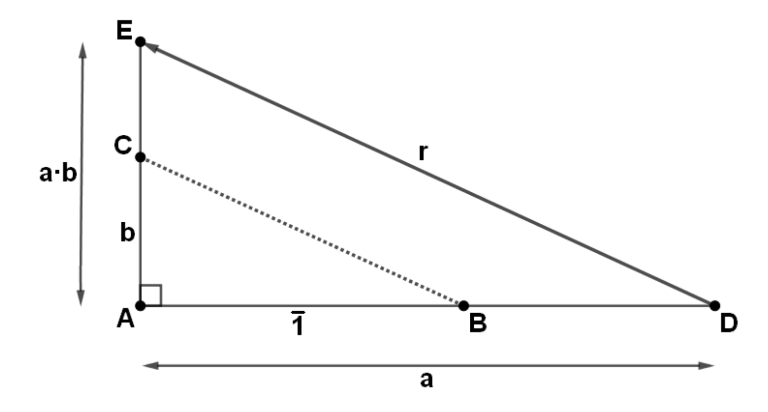
17.6.1 Definición. Plano afín.
Un **plano afín** es un plano de Hilbert en el que se cumple, además, el Postulado de la única paralela.

En el apartado 3.2 definimos una suma de segmentos que es compatible con la congruencia. En este apartado vamos a añadir la definición de una multiplicación de segmentos igualmente compatible con la congruencia, pero para la que vamos a necesitar suponer el Postulado de la única paralela y tres teoremas que se deducen de éste:

- Recíproco del Teorema de los ángulos alternos (6.3.6).
- Todo paralelogramo tiene sus lados opuestos congruentes (7.1.2c).
- Postulado de Pappus (12.3.2).

17.6.2 Definición. Multiplicación de segmentos.
En un plano afín en el que hemos fijado un segmento al que llamaremos "**segmento unidad**" y que denotaremos por $\bar{1}$, podemos definir una multiplicación de dos segmentos a y b como el segmento $a \cdot b$ definido de la siguiente forma:

Sea α un ángulo recto (su existencia quedó demostrada en 3.5.6).
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha = \angle ABC$ con $\overline{AB} \cong \bar{1}$ y $\overline{AC} \cong b$.
Sea D el único punto de $\overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AD} \cong a$. Supongamos que $D \neq B$.
Sea r la única recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ que pasa por D.
Sea E su punto de corte con $\overleftrightarrow{AC}$ ($\overleftrightarrow{BC}$ es la única recta paralela a r que pasa por C, y $\overleftrightarrow{BC} \neq \overleftrightarrow{AC}$, luego $\overleftrightarrow{AC}$ no puede ser paralela a r)
Finalmente, definimos $a \cdot b = \overline{AE}$.



Si $D = B$ entonces $a \cong \bar{1}$ y definimos $a \cdot b = b$, es decir, que $\bar{1} \cdot b = b$ por definición.

17.6.3 Proposición.
La multiplicación de segmentos definida en 3.6.1 cumple las siguientes propiedades:

a) Es compatible con la relación de equivalencia de la congruencia de segmentos:

$$\left.\begin{array}{l} a \cong a' \\ b \cong b' \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot b \cong a' \cdot b'$$

Este resultado justifica el poder definir una multiplicación en el conjunto de clases de equivalencia de los segmentos congruentes: $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$

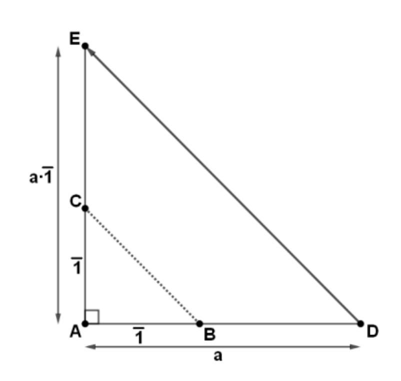
b) $\bar{1} \cdot b = b$ y $a \cdot \bar{1} = a$.
c) Propiedad conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$.
d) Propiedad distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
e) Propiedad asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
f) Para todo a existe un b tal que $a \cdot b = \bar{1}$.

Demostración.
a) Construimos el producto $a \cdot b$ mediante un triángulo rectángulo y puntos A, B, C, D y E, en el que $a \cdot b = \overline{AE}$ y construimos el producto $a' \cdot b'$ mediante otro triángulo rectángulo y puntos A', B', C', D' y E', en el que $a' \cdot b' = \overline{A'E'}$

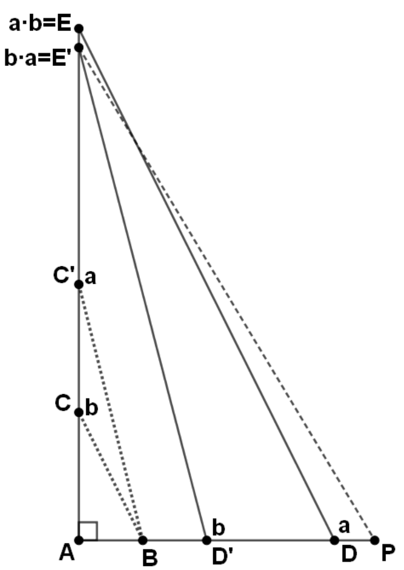
Los triángulos rectángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son congruentes por SAS ya que $\overline{AB} \cong \bar{1} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{AC} \cong b \cong b' \cong \overline{A'C'}$. Luego $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.
Por otro lado $\overleftrightarrow{B'C'} // \overleftrightarrow{D'E'}$ por construcción, luego $\angle E'D'A' \cong \angle C'B'A'$, y por el mismo razonamiento, de $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{DE}$ se deduce $\angle EDA \cong \angle CBA$. Aquí estamos utilizando el Postulado "Recíproco del Teorema de los ángulos alternos", que en 6.3.6 se demostrará que es una consecuencia directa del Postulado de la única paralela.

De todo esto llegamos a $\angle E'D'A' \cong \angle C'B'A' \cong \angle CBA \cong \angle EDA \Rightarrow \angle E'D'A' \cong \angle EDA$, y por lo tanto, por el criterio ASA (3.8.2), deducimos que $\Delta ADE \cong \Delta A'D'E'$, y por tanto $a \cdot b = \overline{AE} \cong \overline{A'E'} = a' \cdot b'$.

b) $\bar{1} \cdot b = b$ es por definición. Veamos ahora $a \cdot \bar{1} = a$.
Construimos la figura asociada al producto $a \cdot \bar{1}$. El triángulo ΔABC es isósceles en A, luego $\angle ABC \cong \angle ACB$ por 3.1.9. Puesto que $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$, tendremos que $\angle ADE \cong \angle ABC$ y $\angle AED \cong \angle ACB$, de lo que deducimos que $\angle ADE \cong \angle AED$ y por lo tanto, por 3.8.3, $a \cong \overline{AD} \cong AE = a \cdot \bar{1}$



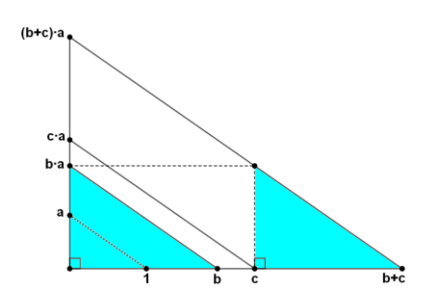
c) Construimos el esquema ABCDE para el producto $a \cdot b$ y superponemos el esquema ABC'D'E' para el producto $b \cdot a$. Queremos demostrar que $E = E'$.
Por construcción se cumple $BC // DE$ y $BC' // D'E'$.
Trazamos la (única) recta paralela a BC que pasa por E'. Sea P su punto de corte con AB.

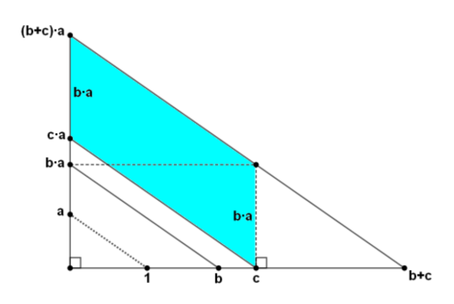


Se cumple $BC' // D'E'$ y $BC // PE'$ luego podemos aplicar el Postulado de Pappus para deducir que $D'C // PC'$, y por tanto $\angle APC' \cong \angle AD'C$ y $\angle AC'P' \cong \angle ACD'$

Pero $AD' \cong b \cong AC$, luego $\Delta AD'C$ es isósceles en A, y por tanto $\angle AD'C \cong \angle ACD'$.
Luego $\angle APC' \cong \angle AD'C \cong \angle ACD' \cong \angle AC'P' \Rightarrow \angle APC' \cong \angle AC'P'$, es decir, el triángulo $\Delta APC'$ es isósceles en A, y en consecuencia $\overline{AP} \cong AC' \cong a$. Pero $a \cong \overline{AD}$, y por tanto $P = D$.
Finalmente, puesto que $E'P // BC$ se deduce que $E'D // BC$, pero por construcción también $BC // DE$, tenemos dos rectas paralelas a BC que pasan por un mismo punto D, aplicando el Postulado de la única paralela se llega a $DE = DE'$, E y E' son los puntos de corte de la recta con AC, y puesto que dos rectas diferentes sólo se pueden cortar en un único punto, $E = E'$, tal y como queríamos ver.

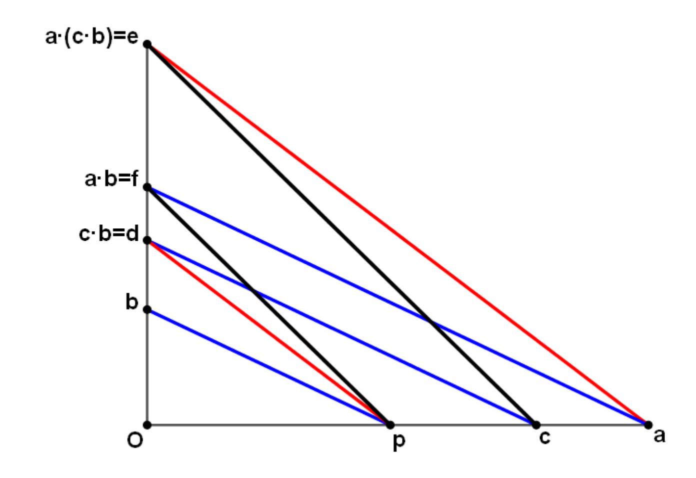
d) Vamos a demostrar que $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ siguiendo el razonamiento de Hilbert en el Grunder (página 32), de donde se deduce $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ aplicando la propiedad conmutativa que acabamos de demostrar.
Construimos $(b+c) \cdot a$, $b \cdot a$ y $c \cdot a$ en un mismo diagrama. Trazamos la perpendicular por c a la base del triángulo rectángulo. Claramente el triángulo sombreado de la derecha tiene base b, y comparte los mismos ángulos que el triángulo sombreado de la izquierda, por lo tanto, por el criterio ASA, son congruentes. Así pues, la altura del triángulo de la derecha es $b \cdot a$. Ahora bien, nos aparece en la parte superior un paralelogramo:





Y puesto que todo paralelogramo tiene sus lados opuestos congruentes (7.1.2c), llegamos a la igualdad deseada: $(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$.

e) En el triángulo rectángulo fijamos $p \cong \bar{1}$ y determinamos los puntos $d = c\cdot b$ y $e = a\cdot d = a\cdot(c\cdot b)$.
Por otro lado, determinamos el punto $f = a\cdot b$.



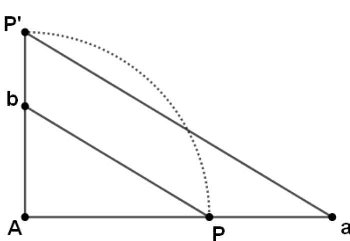
Los puntos d, f, e por un lado y los puntos p, c y a por otro satisfacen las condiciones del Postulado de Pappus, luego los segmentos pf y ce son paralelos, es decir,

$$a\cdot(c\cdot b) = e = c\cdot(a\cdot b)$$

Aplicando la propiedad conmutativa ya demostrada anteriormente se llega a

$$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$$

f) En el triángulo rectángulo con ángulo recto en A, sea $\overline{AP} \cong \overline{AP'} \cong \bar{1}$. Para un segmento a determinado, trazamos la recta $\overline{aP'}$ y su paralela por P. Sea b su punto de corte con $\overleftrightarrow{AP'}$.



Claramente $a\cdot b = \overline{AP'} \cong \bar{1}$, puesto que la paralela a $\overline{bP}$ por a corta $\overline{Ab}$ en P'.

Fuente: Johan Alm "From Geometry To Number"

18 Planos afines.

18.1 Espacios afines.

18.1.1 Definición. Espacio afín de dimensión n sobre un cuerpo K.

Un espacio afín de dimensión n sobre un cuerpo K es una terna $(P,\vec{V},+)$, donde P es un conjunto no vacío, a cuyos elementos se les llama puntos, $\vec{V}$ es un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K y + es una aplicación $P\times\vec{V}\rightarrow P$ que cumple las propiedades siguientes:

a) Para cada par de puntos A,B, existe un único vector $\vec{v}$ tal que $B=A+\vec{v}$, y se le representa por $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$.

b) $A+\vec{0}=A$.

c) $(A+\vec{v})+\vec{w}=A+(\vec{v}+\vec{w})$

18.1.2 Definición. Variedades lineales de dimensión k.

Una variedad lineal de dimensión k en un espacio afín $(P,V,+)$ es un conjunto de puntos de la forma

$$L=P+\vec{L}=\left\{A+\vec{v}\ ,\vec{v}\in\vec{L}\ \right\}$$

Donde $\vec{L}$ es un subespacio vectorial de $\vec{V}$ de dimensión k, llamado espacio director de la variedad.

A las variedades de dimensión 0 las llamamos **puntos**, a las de dimensión 1, rectas, a las de dimensión 2, **planos** y a las de dimensión n-1, **hiperplanos**.

18.1.3 Proposición.

a) $p+v=p+w\Leftrightarrow v=w$

b) $p=p+v\Leftrightarrow v=0$

Demostración.

a) Se deduce de la condición 18.9.1a

b) Basta aplicar el apartado anterior teniendo en cuenta que $p=p+0$

18.2 El plano afín canónico A_2(IR).

18.2.1 Definición. Plano afín canónico $A_2(IR)$.

Definimos el plano afín canónico $A_2(IR)$ como el espacio afín $(P,\vec{V},+)$, con:

- $P = IR^2$ entendido como plano cartesiano (ver ????)
- $\vec{V} = IR^2$ entendido como espacio vectorial sobre IR.
- La aplicación + está definida de la siguiente manera:

$$+: IR^2 \times IR^2 \to IR^2$$

$$(p_1, p_2) + (v_1, v_2) \mapsto (p_1 + v_1, p_2 + v_2)$$

18.2.2 Definición. Rectas en el plano afín.

Definimos las rectas en el plano afín $A_2(IR)$ como las variedades afines de dimensión 1 en el plano, es decir, todo conjunto de la forma

$$P + < \vec{v} > = \{P + \lambda\vec{v} \mid \lambda \in IR\}$$

Para cierto vector no nulo $\vec{v} = (v_1, v_2) \in IR \times IR$.

al punto P le llamaremos **punto base** de la recta y al vector $\vec{v}$, **vector director** de la misma. Ni el punto base ni el vector director de una recta son únicos. Sin embargo, el subespacio vectorial $< \vec{v} >$ se denomina **espacio base** de la recta, y sí es único.

Dados dos puntos $A, B \in A_2(IR)$, $A \neq B$, definimos la recta que pasa por A y B, $\overleftrightarrow{AB}$ como

$$\overleftrightarrow{AB} = A + < \overrightarrow{AB} >$$

La proposición siguiente garantiza que las rectas, así definidas, cumplen los axiomas de incidencia.

18.2.3 Proposición. El plano afín A_2(IR) cumple el Axioma I1.

a) Si $A \in B + \langle \vec{v} \rangle$, entonces $B + \langle \vec{v} \rangle = A + \langle \vec{v} \rangle$.

b) Si $A, B \in C + < \vec{v} >$ y $A \neq B$, entonces $C + \langle \vec{v} \rangle = C + < \overrightarrow{AB} >$.

c) Si $A, B \in C + < \vec{v} >$ y $A \neq B$, entonces $C + \langle \vec{v} \rangle = A + < \overrightarrow{AB} >$

d) Si $A, B \in A_2(IR)$, $A \neq B$, entonces $A + < \overrightarrow{AB} >$ es la única recta que contiene A y B.

Demostración. a) $A \in B + \langle \vec{v} \rangle \Rightarrow \exists \lambda \mid A = B + \lambda\vec{v} \Rightarrow B = A - \lambda\vec{v}$

$\subset$ Si $P \in B + \langle \vec{v} \rangle$, $P = B + \phi\vec{v}$ para cierto $\phi \in IR$. Luego

$P = B + \phi\vec{v} = A - \lambda\vec{v} + \phi\vec{v} = A - (\lambda - \phi)\vec{v} \in A + \langle \vec{v} \rangle$.

$\supset$ Si $P \in A + \langle \vec{v} \rangle$, $P = A + \phi\vec{v}$ para cierto $\phi \in IR$. Luego

$P = A + \phi\vec{v} = B + \lambda\vec{v} + \phi\vec{v} = B + (\lambda + \phi)\vec{v} \in B + \langle \vec{v} \rangle$.

b) $A \neq B \in C + < \vec{v} > \Rightarrow A = C + \lambda_1\vec{v}, B = C + \lambda_2\vec{v}, \lambda_1 \neq \lambda_2$. Luego

$\overrightarrow{AB} = (\lambda_2 - \lambda_1)\vec{v}$, $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, luego $< \overrightarrow{AB} > = < \vec{v} >$ y por tanto $C + \langle \vec{v} \rangle = C + < \overrightarrow{AB} >$.

c) Es la consecuencia directa de las dos propiedades anteriores.

d) Claramente $A = A + 0\overrightarrow{AB} \in A + < \overrightarrow{AB} >$ y $B = A + 1\overrightarrow{AB} \in A + < \overrightarrow{AB} >$, luego la recta contiene ambos puntos, y es la única recta que contiene a ambos, pues si $A, B \in P + < \vec{v} >$, aplicando el lema anterior llegamos a $P + < \vec{v} > = A + < \overrightarrow{AB} >$.

18.2.4 Proposición.

a) Tres puntos $A, B, C \in A_2(IR)$ son colineales si, y sólo si existen $\alpha, \beta \in IR$, no ambos cero, tales que

$$0 = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

b) Tres puntos $A, B, C \in A_2(IR)$ son colineales si, y sólo si existen $a, b, c \in IR$ no todos cero, tales que $a + b + c = 0$ y $aA + bB + cC = 0$.

Demostración. a) Supongamos que $A, B, C \in A_2(IR)$ son colineales. Luego $C \in \overleftrightarrow{AB} = A + < \overrightarrow{AB} >$ y por tanto $C = A + \lambda\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = C - A = \lambda\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AC} - \lambda\overrightarrow{AB} = 0$

Recíprocamente, si $\vec{0} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, no ambos cero, supongamos que $\alpha \neq 0$. Entonces $\vec{0} = \overrightarrow{AB} + \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{-\beta}{\alpha}\overrightarrow{AC} \Rightarrow B = A + \overrightarrow{AB} = A + \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{AC} \in \overleftrightarrow{AC}$.

b) Supongamos que existen $a, b, c \in IR$ no todos cero, tales que $a + b + c = 0$ y $aA + bB + cC = 0$.

Entonces:

$a = -b - c \Rightarrow 0 = aA + bB + cC = (-b - c)A + bB + cC =$

$-bA - cA + bB + cC = b(B - A) + c(C - A) = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$

donde b y c no pueden ser ambos cero, puesto que entonces a también lo sería.

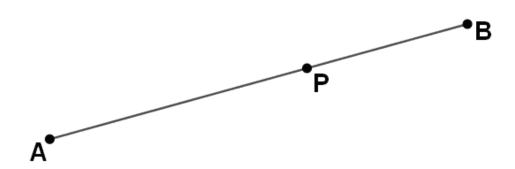
Finalmente, el resultado se deduce de aplicar el apartado a.

El argumento anterior es reversible, por lo que se demuestra también el recíproco.

18.2.5 Proposición. División de segmentos con coordenadas cartesianas.

Dados dos puntos diferentes $A \neq B \in A_2(IR)$, todo punto P de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ queda unívocamente determinado de la forma $P = (1 - \lambda)A + \lambda B$.

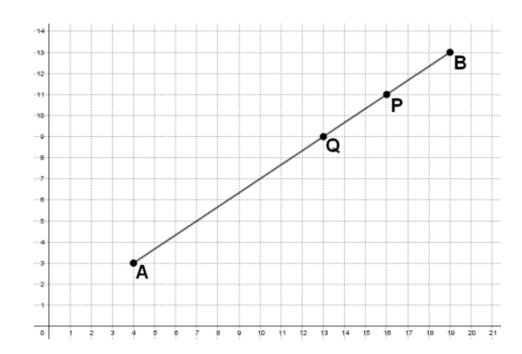
Y en este caso diremos que **el punto P divide el segmento AB en la razón λ,** es decir, $\lambda = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$, donde estamos utilizando distancias con signo.



Demostración.

$P = (1 - \lambda)A + \lambda B \Leftrightarrow P = A - \lambda A + \lambda B = A + \lambda(B - A) = A + \lambda\overrightarrow{AB} \in \overleftrightarrow{AB}$

18.2.6 Ejemplo.
Sea $A=(4,3)$ y $B=(19,13)$. Los puntos $P=(1/5)A+(1-1/5)B=(16,11)$ y $Q=(2/5)A+(1-2/5)B=(13,9)$ pertenecen a $\overleftrightarrow{AB}$:



18.2.7 Ejemplo. Punto medio de un segmento.
Si $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x_2,y_2)$, el punto medio M del segmento PQ tendrá por coordenadas:

$$M=\frac{P+Q}{2}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

18.2.8 Definición. Orden en el plano afín $A_2(IR)$.
Dados tres puntos $A,B,C\in A_2(IR)$, diremos que B está entre A y C, y escribiremos $A*B*C$, cuando

$$B=A+\lambda\overrightarrow{AC} \text{ con } 0<\lambda<1$$

18.2.9 Proposición.
El orden así definido cumple los axiomas de un plano ordenado.

Demostración. a) Si $B=A+\lambda\overrightarrow{AC}$ con $0<\lambda<1$, entonces $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BA}=\lambda\overrightarrow{CA}$ y por tanto $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}-\lambda\overrightarrow{CA}=(1-\lambda)\overrightarrow{CA}\Rightarrow B=C+(1-\lambda)\overrightarrow{CA}$
$0<\lambda<1\Rightarrow 0<1-\lambda<1$, de lo que se deduce que $C*B*A$.

18.3 Espacios vectoriales euclídeos.

18.3.1 Definición. Espacio vectorial euclídeo de dimensión n.
Un espacio vectorial euclídeo V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo ordenado **pitagórico** K sobre el que hay definido un **producto escalar**, que es una aplicación $V \times V \to K$ que cumple las propiedades siguientes:

a) $v \cdot v$ es un cuadrado (en particular $v \cdot v \geq 0$) y $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
b) $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$
c) $(\alpha v) \cdot w = \alpha (v \cdot w) = v \cdot (\alpha w)$
d) $u \cdot v = v \cdot u$

Definimos la norma de un vector $\vec{v}$ como $\|\vec{v}\| = \sqrt{v \cdot v}$ (la existencia de dicha raíz cuadrada queda garantizada por la condición a, y entendemos que tomamos la raíz cuadrada positiva).

Diremos que dos vectores v, w son **ortogonales** cuando $v \cdot w = 0$, y lo denotaremos como $v \perp w$.

18.3.2 Teorema. Desigualdad de Cauchy-Schwarz.
Si v y w son dos vectores de un espacio vectorial euclídeo, entonces

$$|v \cdot w| \leq \|v\| \, \|w\|$$

y se da la igualdad si y sólo si v y w son linealmente dependientes.

Demostración.

18.3.3 Proposición.
En todo espacio vectorial euclídeo se cumple:
a) $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
b) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
c) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$

Demostración.
b) Aplicaremos la Desigualdad de Cauchy-Schwarz (18.3.2)
$$(v + w) \cdot (v + w) = (v + w) \cdot v + (v + w) \cdot w = v \cdot v + w \cdot v + v \cdot w + w \cdot w =$$
$$= v \cdot v + 2v \cdot w + w \cdot w \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2v \cdot w \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|v \cdot w|$$
$$\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v \cdot w\| = (\|v\| + \|w\|)^2$$
Luego
$$(v + w) \cdot (v + w) \leq (\|v\| + \|w\|)^2 \Rightarrow$$
$$\|v + w\| = \sqrt{(v + w) \cdot (v + w)} \leq \|v\| + \|w\|$$

18.3.4 Definición. El producto escalar canónico en IR^2.
En IR^2 definimos el producto escalar canónico $v \cdot w$ de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} v=(v_1,v_2) \\ w=(w_1,w_2) \end{array}\right\} \Rightarrow v\cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

Del que se deduce el módulo (o norma o longitud) canónico:

$$v=(v_1,v_2) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$$

18.4 Espacios afines euclídeos.

18.4.1 Definición. Espacio afín euclídeo.

Un espacio afín euclídeo es un espacio afín $(P,\vec{V},+)$ en el que $\vec{V}$ es un espacio vectorial euclídeo.

18.4.3 Definición. Distancia entre dos puntos.

Dados dos puntos $A,B\in A_2(IR)$, definimos la distancia entre A y B como la norma del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$dist(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|$$

18.4.4 Definición. Coseno determinado por dos vectores.

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, definimos

$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

18.4.5 Proposición. Justificación geométrica de la definición de coseno.

Dado un punto $A\in A_2(IR)$, sean $B=A+\vec{u}$ y $C=A+\vec{v}$. Entonces los tres puntos así definidos estarán alineados si y sólo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.
Supongamos que son linealmente independientes.
En el triángulo ΔABC tendremos $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ y $\overrightarrow{BC}=\vec{v}-\vec{u}$,
Luego $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=(\vec{v}-\vec{u})\cdot(\vec{v}-\vec{u})=\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{u}-2\vec{v}\cdot\vec{u}=|\vec{v}|^2+|\vec{u}|^2-2\vec{v}\cdot\vec{u}$, es decir

$\left|\overline{BC}\right|^2=\left|\overline{AB}\right|^2+\left|\overline{AC}\right|^2-2\vec{v}\cdot\vec{u}$

Si comparamos esta expresión con el Teorema del coseno:

$\left|\overline{BC}\right|^2=\left|\overline{AB}\right|^2+\left|\overline{AC}\right|^2-2\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|\cos(\angle A)$

Tiene sentido definir el coseno del ángulo $\angle A$ como

$$\cos(\angle A)=\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|}=\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

La definición anterior se puede extender al caso de dos vectores linealmente dependientes (es decir, tres puntos alineados) si convenimos que el coseno de un ángulo nulo es uno y el coseno de un ángulo llano es –1.

19 Planos proyectivos analíticos.

19.1 Planos proyectivos sobre un cuerpo.

19.1.1 Definición. El plano proyectivo real.

Definimos el **plano proyectivo real** $P_2(IR)$ como el conjunto $IR^3 - \{(0,0,0)\}$ bajo la siguiente relación de equivalencia:

$$(a,b,c) \cong (d,e,f) \Leftrightarrow \exists \lambda \in IR - \{0\} \mid (a,b,c) = \lambda(d,e,f)$$

$$P_2(IR) = \frac{IR^3 - \{(0,0,0)\}}{IR - \{0\}}$$

Es decir, los elementos de $P_2(IR)$ serán los subespacios vectoriales de dimensión 1 de IR^3.

Definimos las **rectas del plano proyectivo** como los subconjuntos solución de una ecuación homogénea de la forma

$$Ax + By + Cz = 0$$

donde $(A,B,C) \neq (0,0,0)$.

Esta definición está bien construida porque no depende del representante escogido del punto:

$$(x,y,z) = \lambda(x',y',z'), \lambda \neq 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0 \Leftrightarrow A\lambda x' + B\lambda y' + C\lambda z' = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda(Ax' + By' + Cz') = 0 \Leftrightarrow Ax' + By' + Cz' = 0$$

Diremos que dos ecuaciones homogéneas son equivalentes cuando tengan asociados los mismos conjuntos de soluciones. Se establece una biyección perfecta entre el conjunto de rectas del plano proyectivo y el propio $P_2(IR)$, pues dos ecuaciones homogéneas serán equivalentes si y sólo si sus coeficientes son múltiples:

$$Ax + By + Cz = 0 \equiv A'x + B'y + C'z = 0 \Leftrightarrow (A,B,C) = k(A',B',C')$$

19.1.2 Proposición. Caracterización de tres puntos alineados.

Tres puntos $A = (a_1,a_2,a_3)$, $B = (b_1,b_2,b_3)$ y $C = (c_1,c_2,c_3)$ están alineados si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Demostración.

19.1.3 Proposición. Recta que pasa por dos puntos.

Dos puntos A y B diferentes determinarán una única recta $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por ambos.

Demostración. Sean $A=(x_1,y_1,z_1)$ y $B=(x_2,y_2,z_2)$. Basta tomar el producto mixto de ambos vectores:

$$r_{AB} = A\times B=(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)=\left(y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1\right)$$

Es fácil comprobar que el vector r_{AB} es ortogonal a A y B, y por tanto, considerado como recta del plano, contiene a ambos puntos.
Además es único salvo homotecias:
Puesto que los vectores A y B no son proporcionales, la matriz $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$ tendrá rango 2, y por lo tanto el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un sistema compatible indeterminado de rango 2.

19.1.4 Corolario. Ecuación de los puntos de una recta.
Dados dos puntos $A=(a_1,b_1,c_1)$ y $B=(a_2,b_2,c_2)$, los puntos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ quedarán determinados por la ecuación lineal homogénea

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \\ y & b_1 & b_2 \\ z & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Demostración.

19.1.5 Proposición. Punto de intersección de dos rectas.
Dos rectas diferentes r y s tienen un único punto de corte. Por lo tanto, en el plano proyectivo no hay paralelismo de rectas.

Demostración. Es exactamente el mismo razonamiento de 2.2.2: Dadas las rectas $r=(r_1,r_2,r_3)$ y $s=(s_1,s_2,s_3)$, consideradas como vectores, nuevamente el producto mixto $P=r\times s$ nos dará un vector ortogonal a ambos, es decir, un punto que pasa por ambas rectas.

Otra manera de ver esto mismo es observar que, dadas dos rectas $Ax+By+Cz=0$ y $A'x+B'y+C'z=0$ diferentes, es decir, $(A,B,C)\neq k(A',B',C')$, el sistema lineal asociado:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2, luego es siempre compatible indeterminado.

19.1.6 Proposición. El cuadriángulo completo fundamental.
Los puntos $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$ y $D=(1,1,1)$ de $P_2(IR)$ forman un **cuadriángulo completo**, es decir, no hay ningún subgrupo de tres que esté alineado. Además, los puntos diagonales: $P=AB\cap CD$, $Q=AD\cap BC$ y $R=AC\cap BD$ no están alineados, formando lo que se denomina "**triángulo diagonal**" asociado al cuadriángulo.

Demostración. Por la caracterización 2.2.2 es fácil ver que no hay ningún grupo de tres que sea colineal. Veamos los puntos diagonales:

$$\left.\begin{array}{l} AB: z=0 \\ CD: x=y \end{array}\right\} \Rightarrow P=AB\cap CD=(1,1,0)$$
$$\left.\begin{array}{l} AD: y=z \\ BC: x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q=AD\cap BC=(0,1,1)$$
$$\left.\begin{array}{l} AC: y=0 \\ BD: x=z \end{array}\right\} \Rightarrow R=AC\cap BD=(1,0,1)$$

Los puntos P, Q y R no están alineados:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1=2\neq 0$$

19.2 La inmersión del plano cartesiano en el proyectivo.

19.2.1 Definición.
Definimos la inmersión canónica del plano cartesiano $\Pi_2(K)$ en el plano proyectivo $P_2(K)$ de la siguiente manera:

$$i:\Pi_2(K)\to P_2(K)$$
$$(x,y)\mapsto i(x,y)=\left[(x,y,1)\right]$$

Es claramente una función inyectiva pues

$$\left[(x,y,1)\right]=\left[(x',y',1)\right]\Rightarrow (x,y,1)=k(x',y',1)\Rightarrow k=1\Rightarrow x=x',\ y=y'$$

Esta función no es suprayectiva, pues todo punto proyectivo de la forma $\left[(x,y,0)\right]$ no será imagen de ningún punto del plano cartesiano.

La imagen de la recta $r: Ax+By+C=0$ es $i(r)=\{Ax+By+Cz=0\wedge z\neq 0\}$. En efecto, si $P=(x,y)\in\Pi_2(K)$ satisface $Ax+By=C$ entonces $i(P)=(x,y,1)$ y claramente satisface $Ax+By+Cz=0$ y $z\neq 0$.
Recíprocamente, si $P=(x,y,z)\in P_2(K)$ satisface $Ax+By+Cz=0$, y $z\neq 0$, entonces $P=(x,y,z)=\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},\frac{z}{z}\right)=i\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)$, y $A\frac{x}{z}+B\frac{y}{z}+C=Ax+By+Cz=0$

19.2.2 Definición. La recta del infinito.
Los puntos proyectivos que no son imagen de un punto cartesiano son aquellos de la forma $(x,y,0)$, es decir, son aquellos asociados a la recta proyectiva $z=0$. A esta recta la llamaremos "**recta del infinito**" y se denotará por r_∞. Al resto le llamaremos "**rectas propias**" del plano proyectivo.

19.2.3 Proposición. Paralelismo e inmersión canónica.
Dos rectas cartesianas r y s de $\Pi_2(K)$ serán paralelas si y sólo su sus imágenes proyectivas se cortan en la recta del infinito.

19.3 El plano cartesiano como subconjunto del proyectivo.

19.3.1 Proposición.
Dado un plano proyectivo $P_2(K)$, y fijada una recta $L_\infty : Ax + By + Cz = 0$, a la que llamaremos "**recta del infinito**", el conjunto

$$P_2(K) - L_\infty$$

Tiene estructura de plano cartesiano, isomorfo a $\Pi_2(K)$.

19.4 Referencias proyectivas.

19.4.1 Definición. Referencia proyectiva. Coordenadas homogéneas de un punto.
Una referencia proyectiva, o sistema de coordenadas homogéneas, de $P_2(IR)$ es un conjunto ordenado de cuatro puntos $(P_1, P_2, P_3; P_4) \subset P_2(IR)$ tales que, si $P_i = \left\lfloor \overrightarrow{v_i} \right\rfloor$, se cumple:

a) $\left\{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \right\}$ forman una base de IR^3.
b) $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$.

Dado un sistema de coordenadas homogéneas $(P_1, P_2, P_3; P_4)$, cualquier punto $P \in P_2(IR)$ tendrá una única presentación salvo homotecias de la forma

$$P = \left\lfloor a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2} + c\overrightarrow{v_3} \right\rfloor$$

Diremos que (a,b,c) son las **coordenadas proyectivas**, o coordenadas homogéneas del punto P bajo la referencia $(P_1, P_2, P_3; P_4)$, y escribiremos

$$P = a\,P_1 + b\,P_2 + c\,P_3$$

En particular, $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$, $P_3 = (0,0,1)$ y $P_4 = (1,1,1)$.

Al punto P_4 se le suele llamar **punto unidad** de la referencia.

19.4.2 Ejemplo.
Cualquier triángulo ABC del plano afín, junto con cualquier punto D que no pertenezca a dicho triángulo forman una referencia proyectiva $(A, B, C; D)$.

En efecto, pongamos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ y $D = (d_1, d_2)$.Estos puntos, considerados dentro del plano proyectivo, serán $A = (a_1, a_2, 1)$, $B = (b_1, b_2, 1)$, $C = (c_1, c_2, 1)$ y $D = (d_1, d_2, 1)$.
Puesto que A, B y C no están alineados, por 19.1.2 tenemos

$$0 \neq \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Luego existirán a, b y c únicos para los que

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomando ahora $A = a(a_1, a_2)$, $B = b(b_1, b_2)$, $C = c(c_1, c_2)$, se cumplen las condiciones exigidas para una referencia proyectiva.

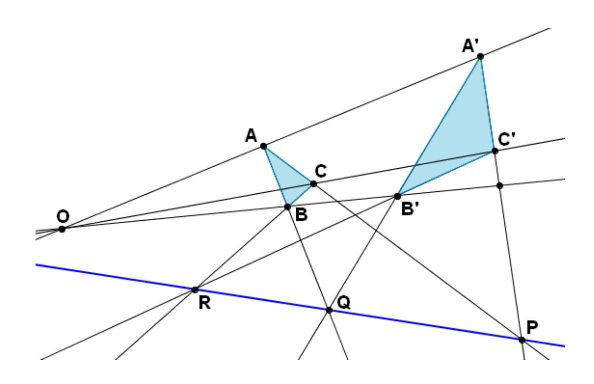
En general, las coordenadas (x, y, z) de cualquier punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ del plano proyectivo, serán las soluciones del sistema lineal compatible determinado

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

19.5 El Teorema de Desargues.

En esta sección demostraremos que todo plano proyectivo analítico es arguesiano, es decir, se cumple el Postulado de Desargues (12.4.2).

19.5.1 Teorema. Teorema de Desargues.
Si dos triángulos tienen un centro de perspectiva, es decir, existe $O = AA' \cap BB' \cap CC'$, entonces los puntos $P = AC \cap A'C'$, $Q = AB \cap A'B'$ y $R = BC \cap B'C'$ están alineados.

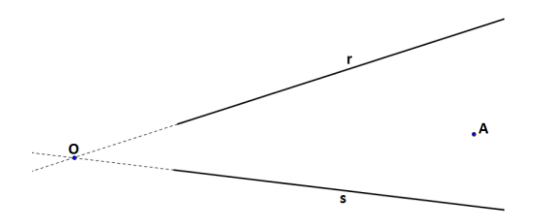


Demostración.
Sea el punto $R' = BC \cap PQ$. Queremos demostrar que $R = R'$ (Pues entonces $R = R' \in PQ$ y por tanto están alineados).
Consideremos la homología φ de centro O, eje central PQ y $\varphi(A) = A'$.
Entonces
$\varphi(B) = ((AB \cap PQ) \vee A') \cap OB = B'$
$\varphi(C) = ((AC \cap PQ) \vee A') \cap OC = C'$
luego φ envía la recta BC a $B'C'$.
Tenemos que R' es un punto fijo pues pertenece a PQ, y por otro lado $R' \in BC \Rightarrow \varphi(R') \in \varphi(BC) = B'C'$.
Por tanto, $R' = \varphi(R') \in \varphi(BC) = B'C' \Rightarrow R' = BC \cap B'C' = R$

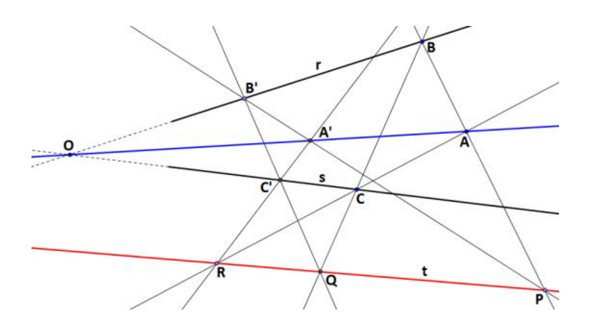
A dos triángulos de un plano en la configuración de Desargues se les llama, por razones obvias, homólogos.

19.5.2 Teorema. Recíproco del teorema de Desargues.
El recíproco del teorema de Desargues es su dual, por el teorema de Desargues se cumple si y sólo si se cumple su recíproco.

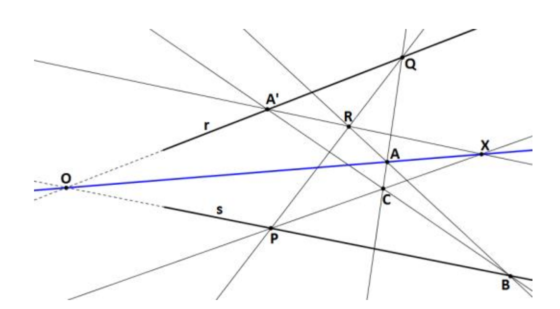
19.5.3 Aplicación. Determinación de recta con punto inaccesible (Por Desargues y por Pappus).
El recíproco del teorema de Desargues nos permite un método para localizar la recta que pasa por el punto de intersección de dos rectas cuando éste es inaccesible por cualquier motivo, por ejemplo, cuando caiga fuera del papel.
Tenemos dos rectas r y s tales que su punto O de intersección es inaccesible, y un punto $A \notin r \cup s$. Queremos determinar la recta AO.



Nuestro objetivo será construir dos triángulos homólogos ABC y A’B’C con centro en O. Por el teorema de Desargues, la recta buscada será AA’.
Sea $B \in r$ y $C \in s$ tales que ABC sea un triángulo. Marcamos los lados del triángulo y una recta t cualquiera. Sea $P = AB \cap t$, $Q = BC \cap t$ y $R = AC \cap t$.
Marcamos un punto cualquiera $B' \in r$. Sea $C' = B'Q \cap s$. Por último, el punto $A' = PB' \cap RC'$ completa el triángulo A’B’C’ homólogo a ABC con centro O y eje t.



El Teorema de Pappus permite un método alternativo para encontrar la recta:
Sean $A', Q \in r$ y $P, B \in s$. Sean $R = AB \cap PQ$ y $C = A'B \cap AQ$



Las ternas (A’BC) y (PQR) cumplen las condiciones del teorema de Pappus, luego los puntos $A'Q \cap BP = r \bigcap s = O$, $BR \cap CQ = A$ y $A'R \cap CP$, al que denominaremos X estarán alineados. Luego sólo hay que trazar la recta que pasa por A y $A'R \cap CP$.

19.5.4 Proposición.
Si tenemos tres rectas r_1, r_2 y r_3 coincidentes en un punto O, una perspectiva de centro P

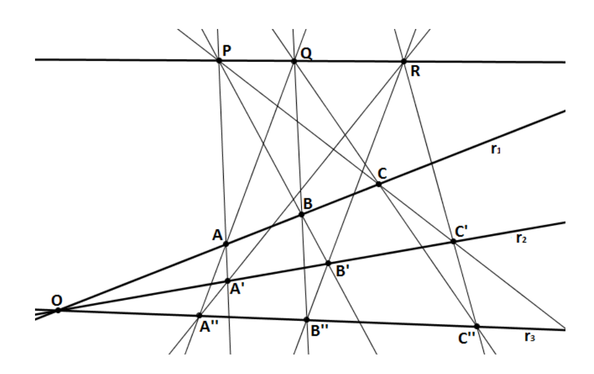
$$f : r_1 \to r_2, A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$$

y una perspectividad de centro R

$$g : r_2 \to r_3, A' \mapsto A'', B' \mapsto B'', C' \mapsto C''$$

entonces existe un punto Q en la recta PR tal que $g \circ f$ es la perspectividad de centro Q.

Demostración.



Aplicamos tres veces el teorema de Desargues:

Los triángulos AA'A'' y BB'B'' tienen un centro de perspectiva O, luego los puntos $P = AA' \cap BB'$, $R = A'A'' \cap B'B''$ y $Q_1 = AA'' \cap BB''$ están alineados.

De la misma forma, los triángulos BB'B'' y CC'C'' tienen un centro de perspectiva O, luego los puntos $P = BB' \cap CC'$, $R = B'B'' \cap C'C''$ y $Q_2 = BB'' \cap CC''$ están alineados.

Pero puesto que $Q_1, Q_2 \in PR$ y $Q_1, Q_2 \in BB''$ y $PR \neq BB''$, entonces $Q_1 = Q_2$

Y por último, los triángulos AA'A'' y CC'C'' tienen un centro de perspectiva O, luego los puntos $P = AA' \cap CC'$, $R = A'A'' \cap C'C''$ y $Q_3 = AA'' \cap CC''$ están alineados. Y con el mismo razonamiento anterior se comprueba que $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$ es el punto buscado.

20 Coordenadas baricéntricas.

20.1 Coordenadas baricéntricas absolutas y homogéneas.

20.1.1 Proposición. Coordenadas baricéntricas absolutas de un punto.

Sean tres puntos $A, B, C \in A_2(IR)$ no colineales. Todo punto P del plano tendrá asociado una única terna de escalares (x, y, z) tal que

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \text{ con } x + y + z = 1$$

Los escalares x, y, z no dependen del origen O escogido, dependen únicamente de los puntos A, B y C, y se denominan **coordenadas baricéntricas absolutas** del punto P respecto del triángulo de referencia baricéntrica (A, B, C).

Demostración.

Primera versión.

Tenemos que $\left\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ forman una referencia afín, y por tanto para todo punto P del plano existirán dos únicos escalares y, z tales que

$$\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$$

Luego

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} - y\overrightarrow{OA} - z\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OA} + z\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} =$$

$$(1 - y - z)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{OA} + z\overrightarrow{AC} =$$

$$(1 - y - z)\overrightarrow{OA} + y(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + z(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) = (1 - y - z)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$$

Denotando $x = 1 - y - z$, nos queda

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \text{ con } x + y + z = 1$$

Segunda versión.

Consideramos los puntos $A, B, C \in A_2(IR) \subset A_3(IR)$ mediante la inmersión siguiente:

$A = (a_1, a_2) = (a_1, a_2, 1)$, $B = (b_1, b_2) = (b_1, b_2, 1)$ y $C = (c_1, c_2) = (c_1, c_2, 1)$.

Estos tres vectores son linealmente independientes. Efectivamente, si existe una combinación lineal

$$a\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

entonces $a + b + c = 0$ y se cumplen las condiciones de la proposición 20.1.4b, luego serían puntos colineales, contradiciendo la hipótesis.

Por lo tanto, para $P = (p_1, p_2) = (p_1, p_2, 1)$, existirán $x, y, z \in IR$ únicos tales que

$$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y estos números cumplen las condiciones exigidas.

20.1.2 Proposición.
La expresión $P=(x,y,z)$ anterior la hemos obtenido mediante la ecuación vectorial $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ para $O=(0,0,0)$, pero es independiente del origen O que tomemos.

Demostración. Supongamos que tomamos otro origen O' y otras coordenadas
$\overrightarrow{O'P}=x'\overrightarrow{O'A}+y'\overrightarrow{O'B}+z'\overrightarrow{O'C}$
Se tiene que

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{O'P}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}-\left(x'\overrightarrow{O'A}+y'\overrightarrow{O'B}+z'\overrightarrow{O'C}\right)=$$
$$=x\left(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'A}\right)+y\left(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'B}\right)+z\left(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'C}\right)-x'\overrightarrow{O'A}-y'\overrightarrow{O'B}-z'\overrightarrow{O'C}=$$
$$=x\overrightarrow{OO'}+x\overrightarrow{O'A}+y\overrightarrow{OO'}+y\overrightarrow{O'B}+z\overrightarrow{OO'}+z\overrightarrow{O'C}-x'\overrightarrow{O'A}-y'\overrightarrow{O'B}-z'\overrightarrow{O'C}=$$
$$=x\overrightarrow{OO'}+y\overrightarrow{OO'}+z\overrightarrow{OO'}+x\overrightarrow{O'A}-x'\overrightarrow{O'A}+y\overrightarrow{O'B}-y'\overrightarrow{O'B}+z\overrightarrow{O'C}-z'\overrightarrow{O'C}=$$
$$=(x+y+z)\overrightarrow{OO'}+\left(x-x'\right)\overrightarrow{O'A}+\left(y-y'\right)\overrightarrow{O'B}+\left(z-z'\right)\overrightarrow{O'C}=$$
$$=\overrightarrow{OO'}+\left(x-x'\right)\overrightarrow{O'A}+\left(y-y'\right)\overrightarrow{O'B}+\left(z-z'\right)\overrightarrow{O'C}$$

Luego

$$\left(x-x'\right)\overrightarrow{O'A}+\left(y-y'\right)\overrightarrow{O'B}+\left(z-z'\right)\overrightarrow{O'C}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{O'P}-\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{O'P}-\overrightarrow{O'P}=\vec{O}$$

y por tanto $x-x'=y-y'=z-z'=0$, es decir $x=x', y=y', z=z'$.

20.1.3 Proposición. Coordenadas baricéntricas homogéneas de un punto.
Llamaremos coordenadas baricéntricas homogéneas de un punto a cualquier terna (x',y',z') de escalares proporcional a la terna de coordenadas baricéntricas absolutas (x,y,z) de dicho punto.

Notación: Las coordenadas baricéntricas absolutas de un punto se escriben separando sus componentes por comas: $P=(a,b,c)$ y cumplen $a+b+c=1$. Las coordenadas baricéntricas homogéneas se escriben separando sus componentes con dos puntos: $P=(a:b:c)$, y basta que cumplan $a+b+c\neq 0$.
Dado cualquier punto en coordenadas homogéneas $P=(a:b:c)$, siempre podremos determinar sus coordenadas absolutas de la siguiente manera:

$$P=(a:b:c)\Rightarrow P=\left(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}\right)$$

Observación: Cuando escribamos $(a:b:c)=(a':b':c')$ se entiende que estas dos ternas son proporcionales:

$$(a:b:c)=(a':b':c')\Leftrightarrow(a:b:c)=k(a':b':c') \text{ para cierto escalar } k.$$

Nota histórica.
Las coordenadas homogéneas se pueden considerar como una extensión de las coordenadas baricéntricas, que fueron introducidas por **August Ferdinand Möbius** (1790-1868) en su tratado "Barizentrische Calcul" del 1827. Las coordenadas homogéneas aparecen por primera vez en 1830 en el artículo “Ueber ein neues Coordinatensystem” de **Julius Plücker**.

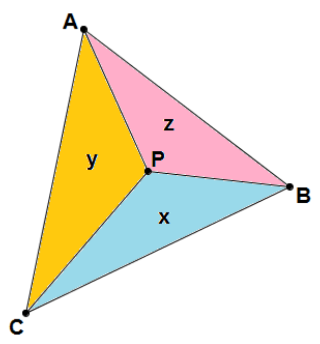
20.1.4 Definición. Inmersión baricéntrica del plano afín en el proyectivo.
Dado en el plano afín $A_2(IR)$ un triángulo de referencia ΔABC, hemos visto que todo punto queda determinado de forma unívoca mediante sus coordenadas baricéntricas homogéneas $P=(a:b:c)$, que se pueden considerar como puntos del plano $P_2(IR)$, obteniendo así una función inyectiva:

$$i: A_2(IR) \to P_2(IR)$$

Los únicos puntos del plano proyectivo que no pertenecen al afín serán aquellos que cumplan $x+y+z=0$. A esta recta proyectiva la llamaremos "**recta del infinito**".

20.1.5 Proposición. Interpretación geométrica de las coordenadas baricéntricas.

Si $P = xA + yB + zC$ entonces $x=\frac{[\Delta PBC]}{[\Delta ABC]},\ y=\frac{[\Delta PCA]}{[\Delta ABC]},\ z=\frac{[\Delta PAB]}{[\Delta ABC]}$



En donde $[\Delta ABC]$ denota el área del triángulo ΔABC y suponemos áreas con signo.

Demostración. $P = xA + yB + zC \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \quad \forall O$ luego para $O = P$

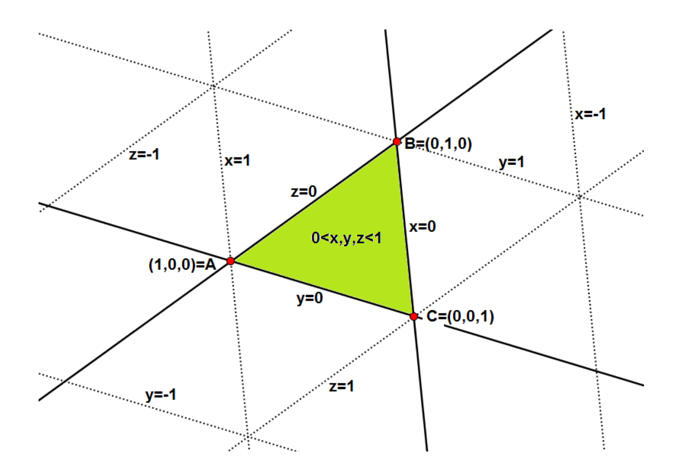
$$\vec{0} = \overrightarrow{PP} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = (1-y-z)\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} =$$
$$= \overrightarrow{PA} - y\overrightarrow{PA} - z\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + y\left(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}\right) + z\left(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}\right) =$$
$$= \overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$$

Multiplicando vectorialmente por $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = y\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = z\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} \Rightarrow$$
$$z = \frac{\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}} = \frac{2\cdot[\Delta PAB]}{2\cdot[\Delta ABC]} = \frac{[\Delta PAB]}{[\Delta ABC]}$$

Y con el mismo razonamiento deducimos los valores de x e y.

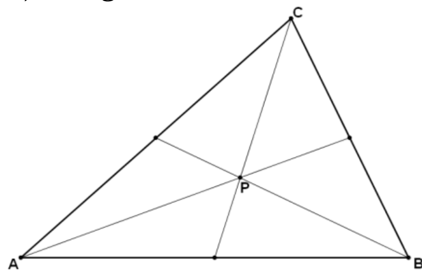
20.1.6 Proposición. Interpretación visual de las coordenadas baricéntricas.
De la misma forma que en la proposición anterior, para todo $P = xA + yB + zC$ del plano, con $x + y + z = 1$, podemos localizar la posición del punto observando los distintos valores de las coordenadas:



20.1.7 Proposición. Coordenadas baricéntricas del baricentro.
Sea ΔABC un triángulo. El baricentro del triángulo tiene por coordenadas baricéntricas

$$(1:1:1)$$

Demostración. Sabemos que las medianas del triángulo determinan seis triángulos internos de igual área (11.5.3). Luego, si P es el baricentro del triángulo,



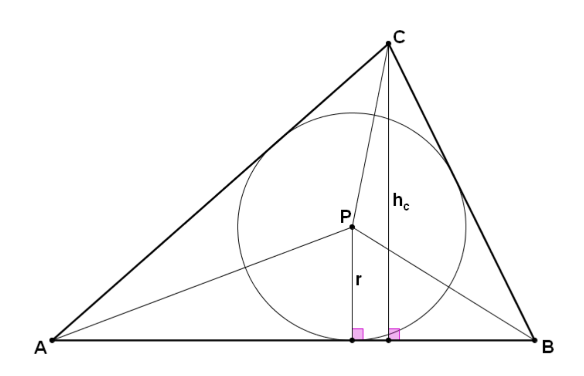
$x = \frac{[\Delta BPC]}{[\Delta ABC]} = \frac{(1/3)[\Delta ABC]}{[\Delta ABC]} = \frac{1}{3}$, y de la misma manera, $y = \frac{1}{3}$ y $z = \frac{1}{3}$.

Y por tanto $P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = (1:1:1)$

20.1.8 Proposición. Coordenadas baricéntricas del incentro.
Sea ΔABC un triángulo, y denotamos por a, b y c las longitudes de los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$. Entonces el incentro del triángulo tiene por coordenadas baricéntricas

$$(a:b:c)$$

Demostración. Sabemos que el incentro P es el centro de la circunferencia inscrita. Trazamos la recta r perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por P, y sea h_c la perpendicular a $\overline{AB}$ por el vértice C.



Entonces $z = \frac{[\Delta APB]}{[\Delta ABC]} = \frac{(1/2)\left|\overline{AB}\right| r}{(1/2)\left|\overline{AB}\right| h_c} = \frac{r}{h_c}$, y de la misma forma $x = \frac{r}{h_A}$ y $y = \frac{r}{h_B}$

Pero por otro lado, $[\Delta ABC] = \frac{a \cdot h_A}{2} = \frac{b \cdot h_B}{2} = \frac{c \cdot h_C}{2} \Rightarrow \frac{1}{h_A} = \frac{a}{2[\Delta ABC]}$,

y de la misma forma: $\frac{1}{h_B} = \frac{b}{2[\Delta ABC]}$ y $\frac{1}{h_C} = \frac{c}{2[\Delta ABC]}$.

Luego:

$$P = \left(\frac{r}{h_A} : \frac{r}{h_B} : \frac{r}{h_C}\right) = \left(\frac{1}{h_A} : \frac{1}{h_B} : \frac{1}{h_C}\right) = \left(\frac{a}{2[\Delta ABC]} : \frac{b}{2[\Delta ABC]} : \frac{c}{2[\Delta ABC]}\right) =$$
$$= (a : b : c)$$

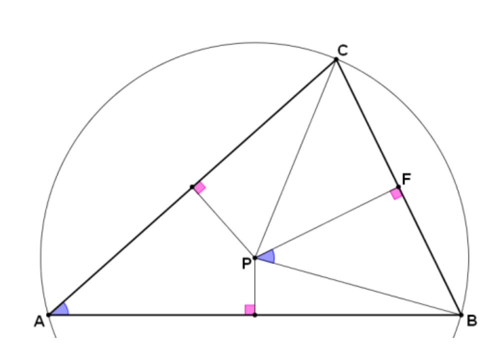
20.1.9 Proposición. Coordenadas baricéntricas del circuncentro.

Sea ΔABC un triángulo, y denotamos por a, b y c las longitudes de los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$. Entonces el circuncentro del triángulo tiene por coordenadas baricéntricas:

a) $(a \cos A : b \cos B : c \cos C)$
b) $\left(a^2\left(b^2 + c^2 - a^2\right) : b^2\left(a^2 + c^2 - b^2\right) : c^2\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\right)$
c) $(\sin(2A) : \sin(2B) : \sin(2C))$
d) $(\sin A \cos A : \sin B \cos B : \sin C \cos C)$

Demostración. Sabemos que el circuncentro P es el centro de la circunferencia circunscrita, sea r su radio, es decir, $r = \left|\overline{PA}\right| = \left|\overline{PB}\right| = \left|\overline{PC}\right|$.

Trazamos la perpendicular por P al lado $\overline{BC}$. Sea F su punto de corte con $\overline{BC}$.



$\angle BPF = \frac{1}{2}\angle BPC = \angle A$ por el Teorema del ángulo central (10.1.1).

Luego $\cos(\angle A) = \frac{\left|\overline{PF}\right|}{r} \Rightarrow \left|\overline{PF}\right| = r\cos(\angle A)$, y por tanto:

$x = \frac{[\Delta BPC]}{[\Delta ABC]} = \frac{(1/2)a\left|PF\right|}{[\Delta ABC]} = \frac{(1/2)a \cdot r \cdot \cos(\angle A)}{[\Delta ABC]}$, y de la misma forma:

$y = \frac{(1/2)b \cdot r \cdot \cos(\angle B)}{[\Delta ABC]}$ y $z = \frac{(1/2)c \cdot r \cdot \cos(\angle C)}{[\Delta ABC]}$, luego

$$P = (x : y : z) = \left(\frac{(1/2)a \cdot r \cdot \cos(\angle A)}{[\Delta ABC]} : \frac{(1/2)a \cdot r \cdot \cos(\angle A)}{[\Delta ABC]} : \frac{(1/2)a \cdot r \cdot \cos(\angle A)}{[\Delta ABC]} \right) =$$
$$= \left(a\cos(\angle A) : b\cos(\angle B) : c\cos(\angle C)\right)$$

Ahora podemos aplicar el Teorema del Coseno (9.1.4):

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\angle A) \Rightarrow \cos(\angle A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, y de la misma forma

$\cos(\angle B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, y $\cos(\angle C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, para deducir:

$$P = \left(a\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : b\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} : c\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) =$$
$$= \left(a^2\left(b^2 + c^2 - a^2\right) : b^2\left(a^2 + c^2 - b^2\right) : c^2\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\right)$$

Una tercera alternativa es tener en cuenta que

$$[\Delta BPC] = \frac{1}{2}\left|\overline{BP}\right| \cdot \left|\overline{CP}\right| \cdot \sin(\angle BPC) = \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin(2A)$$

y por tanto

$$P = \left(\frac{1}{2}r^2 \cdot \sin(2A) : \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin(2B) : \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin(2C) \right) = \left(\sin(2A) : \sin(2B) : \sin(2C)\right)$$

20.1.10 Proposición. Coordenadas baricéntricas del ortocentro.
Sea ΔABC un triángulo. Su ortocentro tiene coordenadas baricéntricas:

a) $\left(\tan A : \tan B : \tan C\right)$

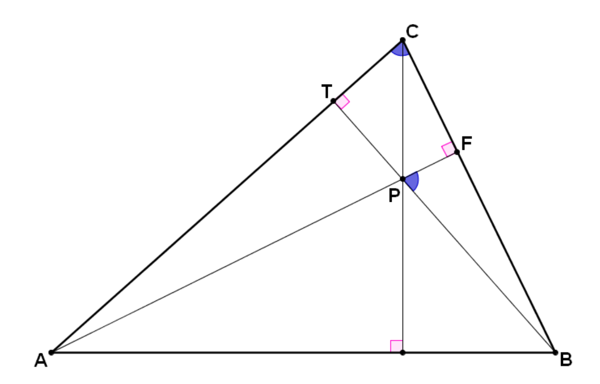
b) $\left(a\cos B\cos C : b\cos A\cos C : c\cos A\cos B\right)$

c) $\left(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right)$

Demostración. Aplicando el Teorema del Seno (9.1.5), tenemos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r \Rightarrow a = 2r\sin A, b = 2r\sin B, c = 2r\sin C$$

donde r es el radio de la circunferencia circunscrita. Sea P el ortocentro del triángulo, F el punto de corte entre BC y la altura por A y T el punto de corte entre AC y la altura por B.



En el triángulo ΔAFB encontramos $\cos B = \dfrac{BF}{c} \Rightarrow BF = c\cos B = 2r\sin C\cos B$

Luego, teniendo en cuenta que $\angle FPB = \angle C$ puesto que los triángulos ΔBFP y ΔBTC son semejantes pues son triángulos rectángulos que comparten el ángulo $\angle PBF$

$$\frac{BF}{2r\cos B} = \sin C = \frac{BF}{BP} \Rightarrow BP = 2r\cos B$$

$$\cos C = \frac{PF}{PB} = \frac{PF}{2r\cos B} \Rightarrow PF = 2r\cos B\cos C$$

Por lo tanto,

$$[\Delta BCP] = \frac{1}{2}\left|\overline{PF}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right| = \frac{1}{2}2r\,a\cos B\cos C \overset{*}{=} r\,2r\sin A\cos B\cos C =$$

$$= 2r^2\sin A\cos B\cos C$$

y de la misma manera $[\Delta ABP] = 2r^2\sin C\cos B\cos A$ y $[\Delta ACP] = 2r^2\sin B\cos A\cos C$.

$P = (x:y:z) = \left(2r^2\sin A\cos B\cos C : 2r^2\sin C\cos B\cos A : 2r^2\sin B\cos A\cos C\right) =$

$= \left(\sin A\cos B\cos C : \sin C\cos B\cos A : \sin B\cos A\cos C\right)$

Dividiendo entre $\cos A\cos B\cos C$ llegamos a $P = (\tan A : \tan B : \tan C)$

Claramente, si no hacemos el cambio (*) llegamos a

$$P = \left(a\cos B\cos C : b\cos A\cos C : c\cos A\cos B\right)$$

Para demostrar c) tenemos en cuenta que:

$[\Delta ABC] = 2bc\sin A \Rightarrow \dfrac{\sin A}{[\Delta ABC]} = \dfrac{1}{2bc}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$

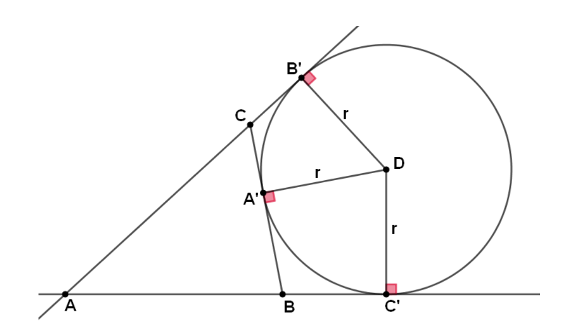
y por tanto:

$$\frac{1}{-a^2+b^2+c^2} = \frac{\frac{1}{2bc}}{\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}} = \frac{\sin A/[\Delta ABC]}{\cos A} = \frac{\tan A}{[\Delta ABC]}.$$

20.1.11 Proposición. Excentros en coordenadas baricéntricas.
Sea ΔABC un triángulo. Los excentros asociados a las circunferencias excritas del triángulo (ver 11.11.1) en el interior de los ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ respectivamente tendrán por coordenadas baricéntricas:

$$I_A = (-a:b:c),\ I_B = (a:-b:c),\ I_C = (a:b:-c)$$

Demostración.

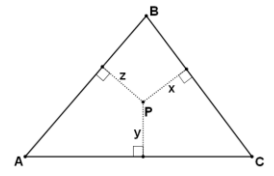


$x = [\Delta BCD] = -\frac{\overline{BC}\cdot r}{2} = \frac{-a\cdot r}{2}$, en negativo pues D y A están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$.

$y = [\Delta ACD] = \frac{\overline{AC}\cdot r}{2} = \frac{b\cdot r}{2}$ y $z = [\Delta ABD] = \frac{c\cdot r}{2}$.

Luego $I_A = (x:y:z) = \left(\frac{-a\,r}{2}:\frac{b\,r}{2}:\frac{c\,r}{2}\right) = (-a:b:c)$, y de la misma forma el resto de excentros.

20.1.12 Proposición. Coordenadas trilineales.
Dado un triángulo ΔABC, todo punto P del interior del triángulo queda unívocamente determinado por las distancias a cada uno de los tres lados.



Sean $x = dist(P,\overleftrightarrow{BC})$, $y = dist(P,\overleftrightarrow{AC})$ y $z = dist(P,\overleftrightarrow{AB})$, entonces $P = (x:y:z)$.

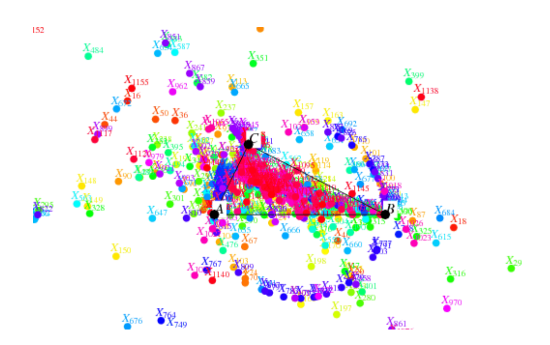
Si un punto tiene asociadas las coordenadas baricéntricas $(x:y:z)$ entonces tendrá asociadas las coordenadas trilineales $\left(\frac{x}{a}:\frac{y}{b}:\frac{z}{c}\right)$. Recíprocamente, si un punto tiene asociadas las coordenadas trilineales $(x:y:z)$, entonces tendrá como coordenadas baricéntricas $(ax:by:cz)$.

Demostración.

20.1.13 La "Encyclopedia of Triangle Centers" (ETC) de Clark Kimberling.

Clark Kimberling (nacido el 7 de noviembre de 1942 en Hinsdale, Illinois) es un matemático que, desde 1994, desarrolla un proyecto llamado "**Encyclopedia of Triangle Centers**" (Enciclopedia de los Centros del Triángulo) para catalogar todos los centros del triángulo. Actualmente (feb 2018) lleva catalogados más de 16000 centros diferentes, y la lista no deja de crecer día a día.

El método de Clark Kimberling para sistematizar la clasificación de todos los centros del triángulo consiste en ordenarlos por su distancia al lado menor del triángulo con lados a = 6, b = 9 y c = 13.



¿Qué se entiende por "centro de un triángulo"? Solo las circunferencias tienen centro, puesto que solo ellas son absolutamente simétricas. Los antiguos griegos conocían los cuatro centros usuales del triángulo: El incentro, ortocentro, circuncentro y baricentro. Estos puntos están caracterizados por ser invariantes bajo la acción de ciertas transformaciones. Pero en el siglo XIX, y gracias a las técnicas modernas como por ejemplo las coordenadas baricéntricas, fueron apareciendo nuevos e interesantes centros: El punto de Fermat, el centro de la circunferencia de los nueve puntos, el punto simediano, el punto de Gergonne… y por tanto se impuso la necesidad de definir rigurosamente qué se entiende por "centro del triángulo".

Llamaremos "centro del triángulo" a cualquier punto que se pueda representar mediante coordenadas trilineales (ver 20.1.12) de la forma $\left(f(a,bc) : f(b,c,a) : f(c,a,b)\right)$ donde a,b y c son las distancias de dicho punto a un triángulo de referencia, y para cualquier función $f(a,b,c) \to IR$ no nula que cumpla las siguientes propiedades:

- Homogeneidad: $f(ka,kb,kc) = k^n f(a,b,c)$ para cierta constante n y para todo $k > 0$.

- Bisimetria en la segunda y tercera variable: $f(a,b,c) = f(a,c,b)$.

Esta relación entre funciones y puntos es suprayectiva por definición pero no es inyectiva: Funciones diferentes pueden dar lugar a un mismo centro del triángulo.

Encontraremos más información sobre este proyecto en su página web oficial:

http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

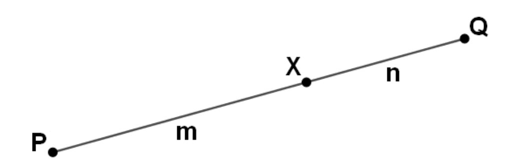
20.2 División de segmentos en coordenadas baricéntricas.

20.2.1 Proposición.
Dado un triángulo de referencia ΔABC y dos puntos expresados en coordenadas baricéntricas homogéneas $P=(p_1:p_2:p_3)$ y $Q=(q_1:q_2:q_3)$, cumpliendo además que $p_1+p_2+p_3=q_1+q_2+q_3$, el punto que tiene asociadas las coordenadas baricéntricas homogéneas

$$X=nP+mQ=(np_1+mq_1:np_2+mq_2:np_3+mq_3)$$

divide el segmento $\overline{PQ}$ en la razón

$$\frac{PX}{XQ}=\frac{m}{n}$$



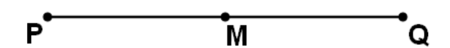
Demostración.
Sea $k=p_1+p_2+p_3=q_1+q_2+q_3$.
$P=(p_1:p_2:p_3)\Leftrightarrow k\vec{P}=p_1\vec{A}+p_2\vec{B}+p_3\vec{C}\Leftrightarrow nk\vec{P}=np_1\vec{A}+np_2\vec{B}+np_3\vec{C}$
$Q=(q_1:q_2:q_3)\Leftrightarrow k\vec{Q}=q_1\vec{A}+q_2\vec{B}+q_3\vec{C}\Leftrightarrow mk\vec{Q}=mq_1\vec{A}+mq_2\vec{B}+mq_3\vec{C}$
Sumamos ambas expresiones:
$k(n\vec{P}+m\vec{Q})=(np_1+mq_1)\vec{A}+(np_2+mq_2)\vec{B}+(np_3+mq_3)\vec{C}$
Así pues, el punto $X=n\vec{P}+m\vec{Q}$ tiene coordenadas baricéntricas homogéneas:
$X=(np_1+mq_1:np_2+mq_2:np_3+mq_3)$
Sea $\lambda=\dfrac{m}{n+m}$. Entonces $1-\lambda=1-\dfrac{m}{n+m}=\dfrac{n+m-m}{n+m}=\dfrac{n}{n+m}$
$X\equiv\dfrac{1}{n+m}X=\dfrac{n}{n+m}P+\dfrac{m}{n+m}Q=(1-\lambda)P+\lambda Q$

Y por lo tanto, aplicando 16.2.5, el punto X satisface
$\lambda=\dfrac{\overline{PX}}{\overline{PQ}}\Rightarrow\dfrac{m}{n+m}=\dfrac{\overline{PX}}{\overline{PX}+\overline{XQ}}\Leftrightarrow\dfrac{m}{n}=\dfrac{\overline{PX}}{\overline{XQ}}$

20.2.2 Corolario. Punto medio entre dos puntos.

Dado un triángulo de referencia ΔABC y dos puntos expresados en coordenadas baricéntricas homogéneas $P=(p_1:p_2:p_3)$ y $Q=(q_1:q_2:q_3)$, cumpliendo además $p_1+p_2+p_3=q_1+q_2+q_3$, entonces el punto medio M entre P y Q tendrá por coordenadas

$$M=P+Q=(\,p_1+q_1:p_2+q_2:p_3+q_3\,)$$



Demostración.

El punto medio M viene caracterizado por la igualdad $PM=MQ$, es decir, $\frac{PM}{MQ}=1=\frac{1}{1}$, y basta aplicar la proposición anterior.

20.2.3 Ejemplo. Puntos medios de los lados del triángulo de referencia.

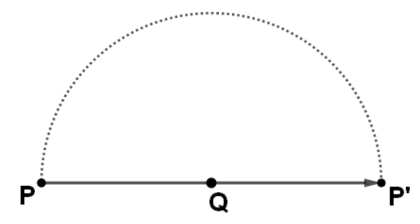
En particular, los puntos medios A', B' y C' de los lados respectivos BC, AC y AB del triángulo de referencia se obtienen con $k=1$ y por tanto

$$A'=(0:1:1),\ B'=(1:0:1)\ \text{y}\ C'=(1:1:0)$$

20.2.4 Corolario. Punto simétrico.

Dado un triángulo de referencia ΔABC y dos puntos expresados en coordenadas baricéntricas homogéneas $P=(p_1:p_2:p_3)$ y $Q=(q_1:q_2:q_3)$, cumpliendo además $p_1+p_2+p_3=q_1+q_2+q_3$, entonces el punto P', simétrico de P respecto de Q, tendrá por coordenadas

$$P'=2Q-P=(2q_1-p_1:2q_2-p_2:2q_3-p_3)$$



Demostración. Es un caso particular de la proposición anterior cuando $\frac{PX}{XQ}=\frac{2}{-1}$ y por tanto $P'=(-p_1+2q_1:-p_2+2q_2:-p_3+2q_3)=(2q_1-p_1:2q_2-p_2:2q_3-p_3)$

20.3 Rectas en coordenadas baricéntricas.

20.3.1 Teorema. Área de un triángulo en coordenadas baricéntricas.
Dados tres puntos con coordenadas baricéntricas absolutas:

$$P=(u_1,v_1,w_1),\ Q=(u_2,v_2,w_2) \text{ y } R=(u_3,v_3,w_3)$$

Entonces el área (con signo) del triángulo ΔPQR queda determinada mediante la fórmula:

$$[\Delta PQR]=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}[\Delta ABC]$$

Demostración. Si $P=(x_1,y_1)$, $Q=(x_2,y_2)$ y $R=(x_3,y_3)$ son tres puntos del plano, el área del triángulo ΔPQR viene dada por

$$[\Delta PQR]=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Supongamos ahora que estos tres puntos están presentados por sus coordenadas baricéntricas absolutas:

$$P=(u_1,v_1,w_1),\ Q=(u_2,v_2,w_2) \text{ y } R=(u_3,v_3,w_3)$$

respecto de un triángulo ΔABC de referencia tal que

$$A=(r_1,s_1),\ B=(r_2,s_2) \text{ y } C=(r_3,s_3)$$

Esto quiere decir que $\overrightarrow{OP}=u_1\overrightarrow{OA}+v_1\overrightarrow{OB}+w_1\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OQ}=u_2\overrightarrow{OA}+v_2\overrightarrow{OB}+w_2\overrightarrow{OC}$,
y $\overrightarrow{OR}=u_3\overrightarrow{OA}+v_3\overrightarrow{OB}+w_3\overrightarrow{OC}$
Es decir:

$$x_1=u_1r_1+v_1r_2+w_1r_3 \qquad y_1=u_1s_1+v_1s_2+w_1s_3$$
$$x_2=u_2r_1+v_2r_2+w_2r_3 \qquad y_2=u_2s_1+v_2s_2+w_2s_3$$
$$x_3=u_3r_1+v_3r_2+w_3r_3 \qquad y_3=u_3s_1+v_3s_2+w_3s_3$$

$$[\Delta PQR]=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} u_1+v_1+w_1 & u_2+v_2+w_2 & u_3+v_3+w_3 \\ u_1r_1+v_1r_2+w_1r_3 & u_2r_1+v_2r_2+w_2r_3 & u_3r_1+v_3r_2+w_3r_3 \\ u_1s_1+v_1s_2+w_1s_3 & u_2s_1+v_2s_2+w_2s_3 & u_3s_1+v_3s_2+w_3s_3 \end{vmatrix}$$

Por otro lado,

$$\begin{pmatrix} u_1+v_1+w_1 & u_2+v_2+w_2 & u_3+v_3+w_3 \\ u_1r_1+v_1r_2+w_1r_3 & u_2r_1+v_2r_2+w_2r_3 & u_3r_1+v_3r_2+w_3r_3 \\ u_1s_1+v_1s_2+w_1s_3 & u_2s_1+v_2s_2+w_2s_3 & u_3s_1+v_3s_2+w_3s_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Luego $[\Delta PQR]=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}[\Delta ABC]$
tal y como queríamos ver.

Ejercicio propuesto: Ejercicio #22 de **[Prob2]**.

20.3.2 Corolario. Caracterización de tres puntos alineados.
Tres puntos $P, Q, R \in A_2(IR)$ están alineados si y sólo si sus coordenadas baricéntricas son vectores linealmente dependientes, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} P=(p_1:p_2:p_3) \\ Q=(q_1:q_2:q_3) \\ R=(r_1:r_2:r_3) \end{array}\right\} \text{alineados} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0$$

Demostración. Aplicando la proposición anterior, es evidente que estarán alineados si y sólo si determinan un área cero, es decir, cuando se anule su determinante.

Ejercicio propuesto: Ejercicio #3 de **[Prob3]**.

20.3.3 Corolario. Rectas en coordenadas baricéntricas.
Los puntos de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ que pasa por dos puntos $P=(p_1,p_2,p_3)$ y $Q=(q_1,q_2,q_3)$ son los puntos que satisfacen la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & p_1 & q_1 \\ y & p_2 & q_2 \\ z & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

Es decir,

$$\begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} z = 0$$

Por lo tanto toda recta, en coordenadas baricéntricas, se puede escribir mediante una ecuación homogénea

$$ax + by + cz = 0$$

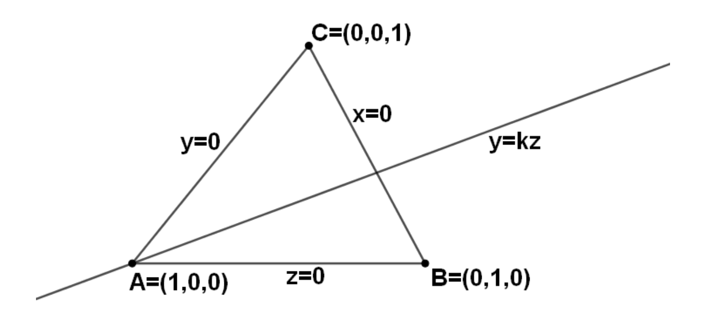
donde $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Demostración. Aplicando la proposición anterior, $X=(x,y,z) \in \overleftrightarrow{PQ}$, $P=(p_1,p_2,p_3)$ y $Q=(q_1,q_2,q_3)$ si y sólo si: $\begin{vmatrix} x & p_1 & q_1 \\ y & p_2 & q_2 \\ z & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0$, y basta desarrollar el determinante anterior por la primera columna.

20.3.4 Ejemplos. Las ecuaciones de los lados del triángulo de referencia.
Dado un triángulo ABC, sus vértices tendrán por coordenadas $A=(1:0:0)$, $B=(0:1:0)$ y $C=(0:0:1)$, y sus lados tendrán asociados las ecuaciones

$$AB:\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow z=0,\ AC:\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow y=0,\ BC:\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x=0.$$

En general, toda recta que pase por A será de la forma $y=k\,z$ para cierta constante k, basta desarrollar el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$.



20.3.5 Ejemplo.
La recta que pasa por los puntos $A=(2/3,2/3,1/3)$ y $B=(1/2,1/4,1/4)$ tendrá por ecuación:

$$0=\begin{vmatrix} 2/3 & 1/2 & x \\ 2/3 & 1/4 & y \\ 1/3 & 1/4 & z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2/3 & 1/2 & x \\ 0 & -1/4 & y-x \\ 0 & 3/8 & z+1/2y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2/3 & 1/2 & x \\ 0 & -1/4 & y-x \\ 0 & 0 & x/12-z/6 \end{vmatrix}$$, es decir,

$$\frac{x}{12}-\frac{z}{6}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}-2z=0$$

20.3.6 Ejemplo. Ecuación baricéntrica de la bisectriz por el vértice A.
Dado el triángulo de referencia ΔABC, la bisectriz del ángulo $\angle A$ tendrá por ecuación:

$$cy-bz=0$$

Demostración. La bisectriz del ángulo $\angle A$ es la recta que une el vértice $A=(1,0,0)$ con el incentro $I=(a:b:c)$ (ver 20.1.8), luego tendrá asociada la ecuación:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & c \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix}=-cy+bz$$

20.3.7 Proposición. Punto de intersección de dos rectas.
El punto de intersección de las rectas $ax+by+cz=0$ y $a'x+b'y+c'z=0$ es

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \right)$$

20.3.8 Proposición. Tres rectas concurrentes.
Tres rectas $a_1x+b_1y+c_1z=0$, $a_2x+b_2y+c_2z=0$ y $a_3x+b_3y+c_3z=0$ serán concurrentes si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

20.3.9 Lema. Suma de las coordenadas baricéntricas del circuncentro.
En 20.1.9 demostramos que el circuncentro de un triángulo tiene por coordenadas baricéntricas:

$$C = \left(a^2(b^2+c^2-a^2) : b^2(a^2+c^2-b^2) : c^2(a^2+b^2-c^2)\right)$$

La suma de estas coordenadas baricéntricas es igual a $16S^2$, donde S es el área del triángulo de referencia ΔABC.

Demostración.

$$a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)=$$
$$2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4=$$

Una visita a Mathematica nos permite simplificar esta expresión:

```
In[3]:= Factor[2 a^2 c^2 + 2 a^2 b^2 + 2 b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4]
Out[3]= - (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)
```

$$=-(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)$$
$$=16\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}=16(s-a)(s-c)(s-b)s$$
$$=16[\Delta ABC]^2=16S^2$$

20.3.10 Proposición. La recta de Euler.
El ortocentro O está en la recta que pasa por el baricentro B y el circuncentro C de un triángulo. Más exactamente:

$$O = -2C + 3B$$

Demostración. Hemos visto que $B = (1:1:1)$ (20.1.7) y
$C = \left(a^2(b^2+c^2-a^2):b^2(a^2+c^2-b^2):c^2(a^2+b^2-c^2)\right)$ (20.1.9b)
También hemos visto que la suma de las coordenadas baricéntricas del circuncentro es $16S^2$, donde $S = [\Delta ABC]$ (20.3.9)
Luego multiplicamos las coordenadas de B por $16S^2$ y las de C por 3 para que tengan la misma suma $48S^2$:
$B = (1:1:1) = \left(16S^2 : 16S^2 : 16S^2\right)$
$C = \left(3a^2(b^2+c^2-a^2):3b^2(a^2+c^2-b^2):3c^2(a^2+b^2-c^2)\right)$
Ahora podemos calcular las coordenadas de $O = -2C + 3B$:
$3\cdot 16S^2 - 2\cdot 3a^2(b^2+c^2-a^2) = 3\cdot 16S^2 - 6a^2(b^2+c^2-a^2)$
$= 3(2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) - 6a^2(b^2+c^2-a^2) =$
$= 6a^2c^2 + 6a^2b^2 + 6b^2c^2 - 3a^4 - 3b^4 - 3c^4 - 6a^2b^2 - 6a^2c^2 + 6a^4 =$
$= 6b^2c^2 + 3a^4 - 3b^4 - 3c^4 = 3\left(a^4 - \left(c^4 - 2b^2c^2 + b^4\right)\right) = 3\left(a^4 - \left(c^2-b^2\right)^2\right) =$
$= 3\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)$
De la misma forma obtenemos $y = 3(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)$ y
$z = 3(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)$.
Dividiendo por $\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(-a^2+b^2+c^2\right)$ obtenemos las componentes

$$x' = \frac{3(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(-a^2+b^2+c^2\right)} = \frac{3}{-a^2+b^2+c^2},$$

$$y' = \frac{3}{a^2-b^2+c^2}, \quad z' = \frac{3}{a^2+b^2-c^2}$$

Obteniendo el punto $\left(\frac{1}{-a^2+b^2+c^2} : \frac{1}{a^2-b^2+c^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}\right)$, que es una de las expresiones del ortocentro (ver 20.1.10c)

Nota histórica: Leonhard Euler (1707-1783) fue un matemático suizo, aunque pasó la mayoría de su vida en Berlín y San Petersburgo. En 1765 descubrió la recta que lleva su nombre.

20.3.11 Proposición. El baricentro de un triángulo.
Las coordenadas homogéneas del baricentro de un triángulo ΔPQR, con
$P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $R = (r_1, r_2, r_3)$ son:

$$P + Q + R = \left(p_1 + q_1 + r_1 : p_2 + q_2 + r_2 : p_3 + q_3 + r_3\right)$$

Demostración. Es el ejercicio #7 de **[Prob3]**.

20.4 Notación y fórmula de Conway.

20.4.1 Proposición. Las Notaciones de Conway.
Dado un triángulo ΔABC, de lados a, b y c, y denotando por S el doble de su área, definimos

$$S_A = S\ \cot(\angle A) \qquad S_B = S\ \cot(\angle B) \qquad S_C = S\ \cot(\angle C)$$

En general, si θ es un ángulo cualquiera, se define $S_\theta = S\cot(\theta)$.

Se cumple

$$S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \qquad S_B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2} \qquad S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

Demostración. Por el Teorema del Coseno (9.1.4):

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos(\angle A)$$

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot sen(\angle A)\cdot\frac{\cos(\angle A)}{sen(\angle A)}$$

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot sen(\angle A)\cdot\cot(\angle A)$$

$$a^2 = b^2+c^2-4[\Delta ABC]\cdot\cot(\angle A)$$

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2} = 2[\Delta ABC]\cdot\cot(\angle A) = S\cot(\angle A) = S_A$$

Las otras dos igualdades se demuestran con un argumento similar.

Nota biográfica: John Horton Conway, matemático británico.

20.4.2 Proposición. Algunas identidades con las notaciones de Conway.

a) $S_B + S_C = a^2 \qquad S_A + S_B = c^2 \qquad S_A + S_C = b^2$

b) $S_A - S_B = (b+a)(b-a)$, $S_B - S_C = (c+b)(c-b)$, $S_C - S_A = (a+c)(a-c)$

c) $S_A = bc\cos A \qquad S_B = ca\cos B \qquad S_C = ab\cos C$

Demostración.

a) Son triviales, demostramos la primera:

$$S_B + S_C = \frac{a^2+c^2-b^2}{2} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2} = \frac{a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{2} = \frac{2a^2}{2} = a^2$$

b) $c^2 - b^2 = S_A + S_B - (S_A + S_C) = S_B - S_C$

c) $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A \Rightarrow bc\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2} = S_A$

20.4.3 Proposición. Aún más identidades con las notaciones de Conway.
Siendo $S = 2[\Delta ABC]$ y $s = (a+b+c)/2$, se cumple:

a) $a^2b^2 = S^2 + S_C^2$ $\quad b^2c^2 = S^2 + S_A^2$ $\quad c^2a^2 = S^2 + S_B^2$
b) $S_{A/2} = S_A + bc = 2s(s-a)$, $S_{B/2} = S_B + ca = 2s(s-b)$, $S_{C/2} = S_C + ab = 2s(s-c)$
c) $S_{A/4} = S_{A/2} + \sqrt{2bcS_{A/2}} = S_A + bc + \sqrt{2bcs(S_A + bc)}$
d) $ab - S_C = 2(s-a)(s-b)$, $bc - S_A = 2(s-b)(s-c)$, $ca - S_B = 2(s-c)(s-a)$
e) $cS_C - aS_A = 2s(b-s)(c-a)$, $aS_A - bS_B = 2s(c-s)(a-b)$,
$bS_B - cS_C = 2s(a-s)(b-c)$
f) $S\sin(\theta+\varphi) = (S_\theta + S_\varphi)\sin\theta\sin\varphi$, $S^2\cos(\theta+\varphi) = (S_\theta S_\varphi - S^2)\sin\theta\sin\varphi$
g) $S^2 = 4s(s-a)(s-b)(s-c)$

Demostración.

20.4.4 Proposición.
Si definimos

$$S_{AB} = S_A \cdot S_B \qquad S_{BC} = S_B \cdot S_C \qquad S_{AC} = S_A \cdot S_C$$

Se cumple:
a) $S^2 = S_{AB} + S_{BC} + S_{AC}$
b) $2S^2 = a^2S_A + b^2S_B + c^2S_C$
c) $S^2 = b^2c^2 - S_A^2$
d) $S^2 = S_{BC} + a^2S_A = S_{AC} + b^2S_B = S_{AB} + c^2S_C$

Demostración.
a)
$$S_{AB} + S_{BC} + S_{AC} = S\cot(A)S\cot(B) + S\cot(B)S\cot(C) + S\cot(A)S\cot(C) =$$
$$S^2(\cot(A)\cot(B) + \cot(B)\cot(C) + \cot(A)\cot(C)) = S^2$$
En donde hemos utilizado la igualdad:
$\cot(A)\cot(B) + \cot(B)\cot(C) + \cot(A)\cot(C) = 1$ (ver 9.3.3b)
b)
$$a^2S_A + b^2S_B + c^2S_C = (S_B + S_C)S_A + (S_A + S_C)S_B + (S_A + S_B)S_C =$$
$$= S_BS_A + S_CS_A + S_AS_B + S_CS_B + S_AS_C + S_BS_C =$$
$$= 2S_{BA} + 2S_{CA} + 2S_{CB} = 2S^2$$
c)
$$b^2c^2 - S_A^2 = b^2(S_A + S_B) - S_A(b^2 - S_C) = b^2S_A + b^2S_B - S_Ab^2 + S_AS_C =$$
$$b^2S_B + S_AS_C = (S_A + S_C)S_B + S_AS_C = S_AS_B + S_CS_B + S_AS_C = S^2$$
d)
$$S_BS_C + a^2S_A = S_BS_C + (S_B + S_C)S_A = S_BS_C + S_BS_A + S_CS_A = S^2$$

20.4.5 Proposición.
a) El ortocentro del triángulo de referencia ΔABC tiene por coordenadas baricéntricas

$$O=\left(\frac{1}{S_A}:\frac{1}{S_B}:\frac{1}{S_C}\right)=\left(S_{BC}:S_{AC}:S_{AB}\right)$$

Y observamos que la suma de las tres coordenadas es igual a $S_{AB}+S_{BC}+S_{AC}=S^2$ (ver 20.4.4)

b) El circuncentro del triángulo de referencia ΔABC tiene por coordenadas baricéntricas

$$C=\left(a^2S_A:b^2S_B:c^2S_C\right)=\left(S_A(S_B+S_C):S_B(S_A+S_C):S_C(S_A+S_B)\right)$$

Y observamos que la suma de las tres coordenadas es igual a $2\left(S_{AB}+S_{BC}+S_{AC}\right)=2S^2$.

Demostración.

a) Aplicamos 20.1.10c:

$$O=\left(\frac{1}{-a^2+b^2+c^2}:\frac{1}{a^2-b^2+c^2}:\frac{1}{a^2+b^2-c^2}\right)=\left(\frac{1}{2S_A}:\frac{1}{2S_B}:\frac{1}{2S_C}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{S_A}:\frac{1}{S_B}:\frac{1}{S_C}\right)=\left(\frac{S_{BC}}{S_AS_{BC}}:\frac{S_{AC}}{S_BS_{AC}}:\frac{S_{AB}}{S_CS_{AB}}\right)=\left(S_{BC}:S_{AC}:S_{AB}\right)$$

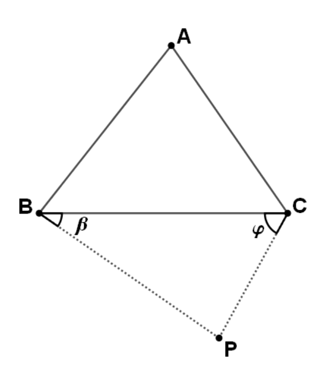
b) Aplicamos 20.1.9b y 20.4.2

$$C=\left(a^2\left(b^2+c^2-a^2\right):b^2\left(a^2+c^2-b^2\right):c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\right)$$

$$=\left(a^2S_A:b^2S_B:c^2S_C\right)=\left(S_A(S_B+S_C):S_B(S_A+S_C):S_C(S_A+S_B)\right)$$

20.4.6 Proposición. La fórmula de Conway.

Cualquier punto P del plano determina dos ángulos respecto del lado $\overline{BC}$ del triángulo de referencia, a los que llamaremos **ángulos de balanceo**: $\beta = \angle PBC$ y $\varphi = \angle BCP$



Los ángulos de balanceo varían entre $\frac{-\pi}{2} \leq \beta, \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Son positivos si P y A están en lados contrarios respecto a $\overline{BC}$, y negativos si están al mismo lado.

La **fórmula de Conway** nos permite expresar las coordenadas baricéntricas de un punto P a partir de sus ángulos de balanceo:

$$P = \left(-a^2 : S_C + S_\varphi : S_B + S_\beta\right)$$

Demostración. Aplicamos el Teorema del Seno al triángulo ΔPBC:

$$\frac{PB}{sen\varphi} = \frac{PC}{sen\beta} = \frac{BC}{sen(\beta+\varphi)}$$

Luego

$$PB = \frac{BC\ sen\varphi}{sen(\beta+\varphi)},\ \text{y}\ PC = \frac{BC\ sen\beta}{sen(\beta+\varphi)}$$

Por otro lado,

$$[\Delta PBC] = \frac{1}{2} PB \cdot BC \cdot sen\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC\ sen\varphi}{sen(\beta+\varphi)} BC \cdot sen\beta = \frac{a^2 sen\beta\ sen\varphi}{2sen(\beta+\varphi)}$$

De forma similar se calculan $[\Delta PBA]$ y $[\Delta PCA]$, con lo que llegamos a

$$P = ([\Delta PBC] : [\Delta PCA] : [\Delta PAB]) =$$

$$\left(\frac{-a^2 sen\beta\ sen\varphi}{2sen(\beta+\varphi)} : \frac{b\,a\ sen\beta\ sen(\varphi+C)}{2sen(\beta+\varphi)} : \frac{c\,a\ sen\varphi\ sen(\beta+C)}{2sen(\beta+\varphi)}\right) =$$

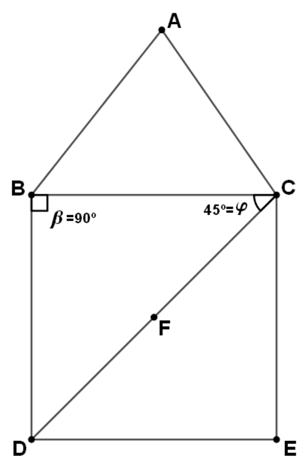
$$\left(-a^2 : \frac{ab\ sen(\varphi+C)}{sen\varphi} : \frac{ac\ sen(\beta+B)}{sen(\beta)}\right) =$$

$$\left(-a^2 : ab\cos C + ab\ senC\cot\varphi : ac\cos B + ac\ senB\cot\beta\right) =$$

$$\left(-a^2 : S_C + S_\varphi : S_B + S_\beta\right)$$

20.4.7 Ejemplo. Cuadrado contruido sobre uno de los lados.

Sea $\Diamond BCED$ el cuadrado construido sobre el lado $\overline{BC}$ del triángulo de referencia ΔABC.



$\beta = 90º \Rightarrow S_\beta = S\cot(90º) = 0$

$\varphi = 45º \Rightarrow S_\varphi = S\cot(45º) = S$

$D = \left(-a^2 : S_C + S : S_B\right)$

Y análogamente, $E = \left(-a^2 : S_C : S_B + S\right)$

Como aplicación, podemos calcular las coordenadas del centro F del cuadrado:
Escribiendo $C = (0:0:S)$ se cumple la condición de 20.2.2:

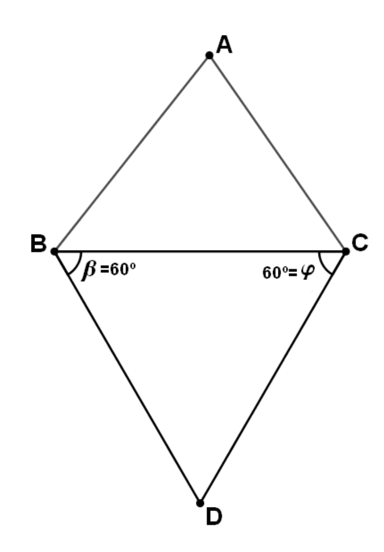
$-a^2 + S_C + S + S_B = -a^2 + a^2 + S = S$

Y por tanto:

$F = D + C = \left(-a^2 + 0 : S_C + S + 0 : S_B + S\right) = \left(-a^2 : S_C + S : S_B + S\right)$

20.4.8 Ejemplo. Triángulo equilátero contruido sobre uno de los lados.

Sea $\Diamond BCD$ el triángulo equilátero construido sobre el lado $\overline{BC}$ del triángulo de referencia ΔABC.



$$\beta = \varphi = 60^{o} \Rightarrow S_{\beta} = S_{\varphi} = S\cot(60^{o}) = S\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{S}{\sqrt{3}}$$

$$D = \left(-a^2 : S_C + \frac{S}{\sqrt{3}} : S_B + \frac{S}{\sqrt{3}} \right)$$

De forma análoga, si construimos los triángulos equiláteros $\Diamond ACE$ y $\Diamond ABF$ sobre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, llegaremos a:

$$E = \left(S_C + \frac{S}{\sqrt{3}} : -b^2 : S_A + \frac{S}{\sqrt{3}} \right) \text{ y } F = \left(S_B + \frac{S}{\sqrt{3}} : S_A + \frac{S}{\sqrt{3}} : -c^2 \right)$$

Si hubiéramos construido los triángulos $\Diamond BCD'$, $\Diamond ACE'$ y $\Diamond ABF'$ hacia el interior del triángulo de referencia, habríamos llegado a los siguientes resultados:

$$D' = \left(-a^2 : S_C - \frac{S}{\sqrt{3}} : S_B - \frac{S}{\sqrt{3}} \right)$$

$$E' = \left(S_C - \frac{S}{\sqrt{3}} : -b^2 : S_A - \frac{S}{\sqrt{3}} \right)$$

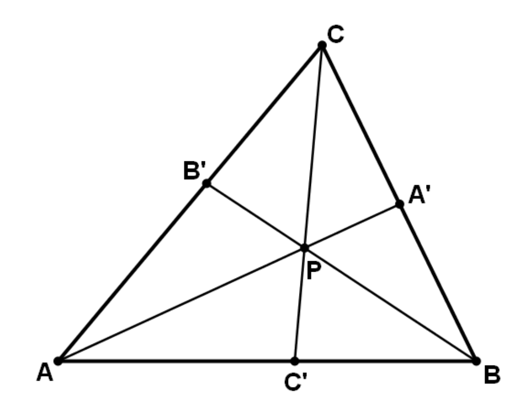
$$F' = \left(S_B - \frac{S}{\sqrt{3}} : S_A - \frac{S}{\sqrt{3}} : -c^2 \right)$$

Ejercicio propuesto: Ejercicio #1 de **[Prob3]**, es una interesante aplicación de la Fórmula de Conway para resolver un problema de las OIM.

20.5 El Teorema de Ceva.

20.5.1 Proposición. El Teorema de Ceva en coordenadas baricéntricas.
a) Un punto $P=(p:q:r)$ corta los lados BC, AC y AB del triángulo de referencia ΔABC en los puntos A', B' y C', llamados **trazas** de P, de coordenadas baricéntricas

$$A'=(0:p:r),\ B'=(p:0:r) \text{ y } C'=(p:q:0)$$



b) Recíprocamente, si tenemos tres puntos A', B' y C' en los lados BC, AC y AB del triángulo de referencia ΔABC, y los podemos escribir en la forma

$$A'=(0:q:r),\ B'=(p:0:r) \text{ y } C'=(p:q:0)$$

Entonces serán los puntos de corte con las cevianas del punto $P=(p:q:r)$

Demostración.
a) Es un ejercicio de aplicación de la intersección de rectas. La recta AP tiene como ecuación:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ p & q & r \end{vmatrix} \Leftrightarrow 0=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ p & r \end{vmatrix} y+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{vmatrix} z \Leftrightarrow 0=-ry+qz$$

Y su punto de corte con BC (de ecuación $x=0$) es $A'=(0:q:r)$.

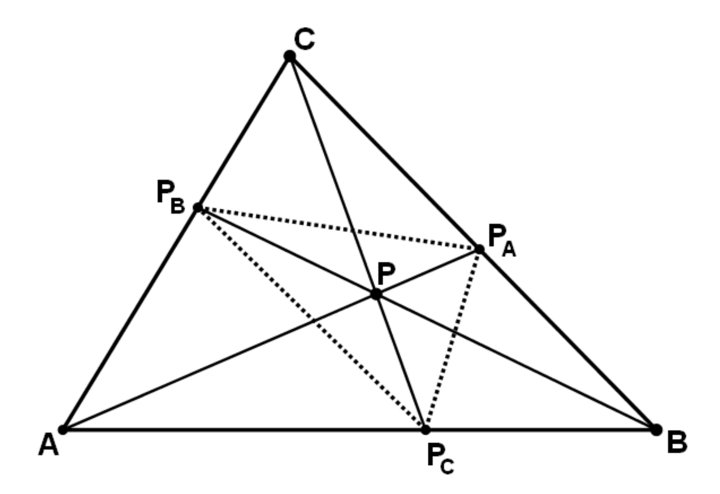
b) El punto $P=(p:q:r)$ pertenece a la recta AA':

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & r \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} q & r \\ q & r \end{vmatrix} = 0$$

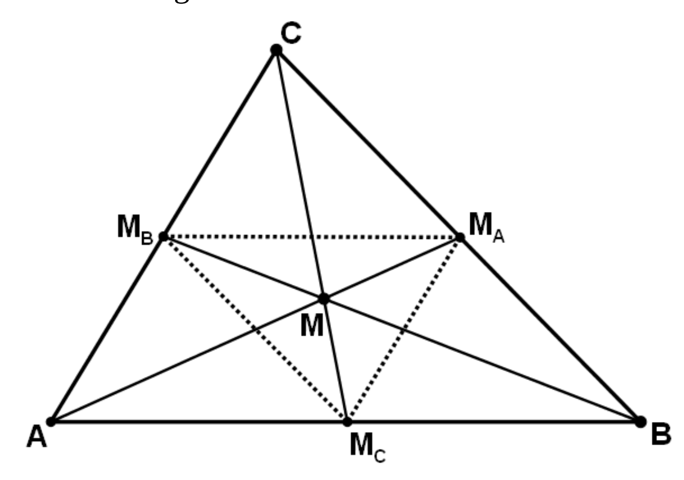
Y de la misma forma se demuestra que también pertenece a BB' y CC', por lo tanto será su punto de corte P, para el cual los tres puntos serán trazas.

20.5.2 Definición. Triángulo ceviano. Triángulo medial.
Dado un punto P, denominamos **triángulo ceviano** de P al triángulo $\Delta P_A P_B P_C$ determinado por las trazas de P sobre cada uno de los lados del triángulo de referencia ΔABC. El triángulo ceviano de $P = (p_1, p_2, p_3)$ tendrá por vértices

$$P_A = (0 : p_2 : p_3),\ P_B = (p_1 : 0 : p_3),\ P_C = (p_1 : p_2 : 0)$$



El **triángulo medial** es el triángulo ceviano del baricentro M.



Puesto que $M = (1:1:1)$, aplicando 20.5.1 sus coordenadas serán:

$$M_A = (0:1:1),\ M_B = (1:0:1),\ M_C = (1:1:0)$$

Resultado al que ya llegamos en 20.2.3 determinando los puntos medios de los lados del triángulo de referencia.

20.5.3 Proposición. El conjugado isotómico de un punto.
Dado un punto $P=(u:v:w)$ en coordenadas baricéntricas relativas a un triángulo de referencia ΔABC, sus trazas son

$$P_A=(0:v:w),\ P_B=(u:0:w),\ P_C=(u:v:0) \qquad \text{(ver 20.5.1)}$$

El punto simétrico $P_A^{/}$ de P_A respecto del punto medio $M_A=(0:1:1)$ del lado BC será

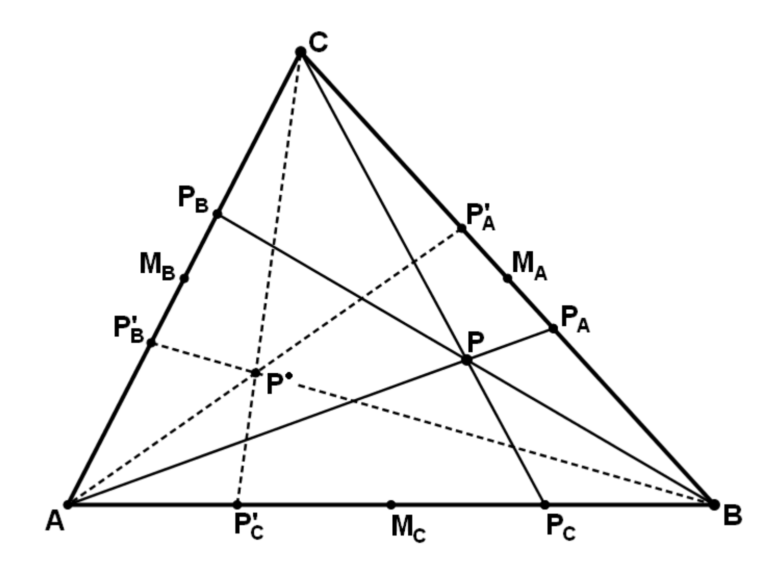
$$M_A=(0:1:1),\Sigma=2 \Rightarrow M_A=(0:v+w:v+w),\Sigma=2(v+w)$$
$$P_A=(0:v:w),\Sigma=v+w \Rightarrow P_A=(0:2v:2w),\Sigma=2v+2w=2(v+w)$$
$$P_A^{/}=2M_A-P_A=2(0:v+w:v+w)-(0:2v:2w)=(0:w:v)$$

Con el mismo razonamiento obtenemos los otros dos puntos simétricos respecto de los puntos medios de los otros dos lados:

$$P_A^{/}=(0:w:v)\ ,\ P_B^{/}=(w:0:u),\ P_C^{/}=(v:u:0)$$

Que se pueden escribir como trazas de un punto que denotaremos como $P^{\bullet}$, y al que llamaremos **conjugado isotómico** de P:

$$\left.\begin{array}{l} P_A^{/}=(0:w:v)=\left(0:\frac{1}{v}:\frac{1}{w}\right) \\ P_B^{/}=(w:0:u)=\left(\frac{1}{w}:0:\frac{1}{u}\right) \\ P_C^{/}=(v:u:0)=\left(\frac{1}{u}:\frac{1}{v}:0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow P^{\bullet}=\left(\frac{1}{u}:\frac{1}{v}:\frac{1}{w}\right)$$



Por ejemplo, el punto de Nagel y el punto de Gergonne son conjugados isotómicos:
$N_a=(s-a:s-b:s-c)$ y $G=\left(\frac{1}{s-a}:\frac{1}{s-b}:\frac{1}{s-c}\right)$

20.6 Paralelismo.

20.6.1 Proposición. Punto impropio de una recta proyectiva.
El punto de intersección de una recta $px+qy+rz=0$ con la recta del infinito $x+y+z=0$ es

$$(q-r:r-p:p-q)$$

Demostración. Este punto pertenece a la recta $px+qy+rz=0$:

$$p(q-r)+q(r-p)+r(p-q)=pq-pr+qr-pq+pr-qr=0$$

Y también a la recta del infinito: $q-r+r-p+p-q=0$

20.6.2 Proposición.
Si $P=(p_1:p_2:p_3)$ y $Q=(q_1:q_2:q_3)$, y se cumple $p_1+p_2+p_3=q_1+q_2+q_3$, el punto impropio de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ es $(p_1-q_1:p_2-q_2:p_3-q_3)$

Demostración. Dicho punto pertenece a ambas rectas:

$$p_1-q_1+p_2-q_2+p_3-q_3=p_1+p_2+p_3-(q_1+q_2+q_3)=0$$

$$\begin{vmatrix} p_1-q_1 & p_1 & q_1 \\ p_2-q_2 & p_2 & q_2 \\ p_3-q_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p_1 & p_1 & q_1 \\ p_2 & p_2 & q_2 \\ p_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} q_1 & p_1 & q_1 \\ q_2 & p_2 & q_2 \\ q_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix}=0-0=0$$

Ejemplo: Los puntos impropios de los lados AB, BC y AC del triángulo de referencia ΔABC son, respectivamente, $(1:-1:0)$, $(0:1:-1)$ y $(1:0:-1)$.

20.6.3 Proposición. Ecuación de la recta paralela a una dada.
La recta que pasa por el punto $P=(p_1:p_2:p_3)$ y es paralela a la recta $px+qy+rz=0$ tiene como ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q-r & r-p & p-q \end{vmatrix}=0$$

Demostración. Es la recta que pasa por P y el punto impropio de la recta.

20.6.4 Ejemplos.
La recta paralela a BC que pasa por $P=(p_1:p_2:p_3)$ tiene como ecuación

$$0=\begin{vmatrix} x & p_1 & 0 \\ y & p_2 & -1 \\ z & p_3 & 1 \end{vmatrix}=x(p_2+p_3)-y\,p_1-z\,p_1 \Leftrightarrow (p_2+p_3)x-p_1(y+z)=0$$

De la misma forma comprobamos que la paralela por P a AC es $(p_3+p_1)y-p_2(x+z)=0$, y la paralela por P a AB es $(p_1+p_2)z-p_3(x+y)=0$.

20.7 Perpendicularidad mediante el ortocentro.

20.7.1 Lema. Rectas perpendiculares a los lados del triángulo de referencia.
Los puntos impropios de las rectas perpendiculares a los lados AB, BC y AC del triángulo de referencia son, respectivamente:

$$\left(S_B : S_A : -c^2\right),\ \left(-a^2 : S_C : S_B\right)\ \text{ y }\ \left(S_C : -b^2 : S_A\right)$$

Demostración. El circuncentro O del triángulo de referencia ΔABC tiene por coordenadas baricéntricas

$$O = \left(a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C\right) \quad \text{(ver 20.4.5b)}$$

Mediatriz por AB:
La mediatriz por AB será la recta que pasa por el circuncentro y el punto medio del lado AB:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a^2 S_A & b^2 S_B & c^2 S_C \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2 S_B & c^2 S_C \\ 1 & 0 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} a^2 S_A & c^2 S_C \\ 1 & 0 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a^2 S_A & b^2 S_B \\ 1 & 1 \end{vmatrix} z \Leftrightarrow$$

$$0 = -c^2 S_C x + c^2 S_C y + \left(a^2 S_A - b^2 S_B\right) z$$

Puesto que $a^2 S_A - b^2 S_B = (S_A - S_B) S_C$, simplificamos para llegar a

$$0 = -c^2 S_C x + c^2 S_C y + (S_A - S_B) z$$

$$0 = -c^2 x + c^2 y + (b^2 - a^2) z$$

$$0 = (a^2 - b^2) z + c^2 (x - y)$$

El punto impropio de esta mediatriz será:

$$\left(-c^2 - a^2 + b^2 : a^2 - b^2 - c^2 : c^2 + c^2\right) = \left(2S_B : 2S_A : -2c^2\right) = \left(S_B : S_A : -c^2\right)$$

Con un razonamiento similar obtenemos la mediatriz por AC:

$$0 = \left(c^2 - a^2\right) y + b^2 (z - x)$$

cuyo punto impropio será: $\left(S_C : -b^2 : S_A\right)$

Y la mediatriz por BC: $0 = \left(b^2 - c^2\right) x + a^2 (y - z)$

20.7.2 Proposición. Pedales y triángulo pedal en coordenadas baricéntricas.
Dado un punto $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ en coordenadas baricéntricas respecto de un triángulo de referencia ΔABC, la recta perpendicular al lado AB del triángulo tiene como ecuación

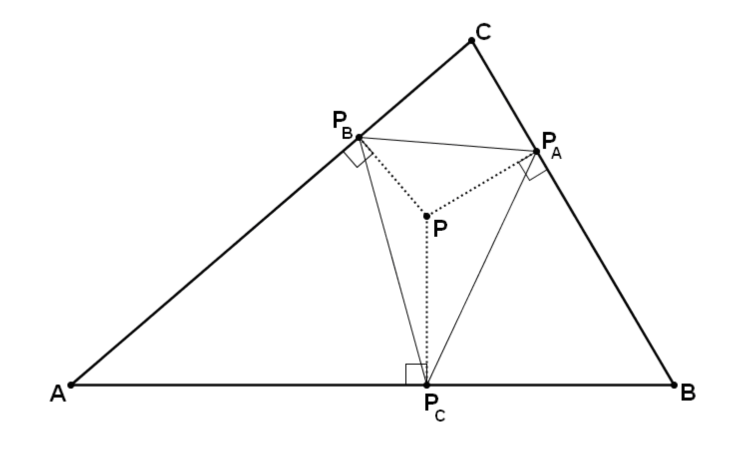
$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ S_B & S_A & -c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ S_A & -c^2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ S_B & -c^2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ S_B & S_A \end{vmatrix} z \Leftrightarrow$$
$$0 = \left(-c^2 p_2 - S_A p_3\right)x - \left(-c^2 p_1 - S_B p_3\right)y + \left(S_A p_1 - S_B p_2\right)z \Leftrightarrow$$
$$0 = \left(c^2 p_2 + S_A p_3\right)x - \left(c^2 p_1 + S_B p_3\right)y - \left(S_A p_1 - S_B p_2\right)z$$

Cuyo punto de corte con el lado AB será el punto

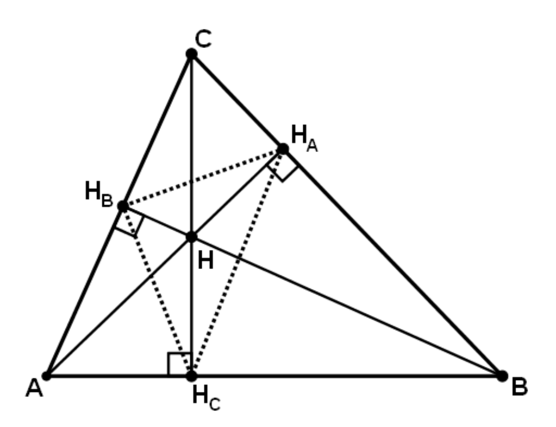
$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ c^2 p_2 + S_A p_3 & -\left(c^2 p_1 + S_B p_3\right) & -\left(S_A p_1 - S_B p_2\right) \end{vmatrix} =$$
$$= \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\left(c^2 p_1 + S_B p_3\right) & -\left(S_A p_1 - S_B p_2\right) \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c^2 p_2 + S_A p_3 & -\left(S_A p_1 - S_B p_2\right) \end{vmatrix} : 0 \right) =$$
$$= \left(c^2 p_1 + S_B p_3 : c^2 p_2 + S_A p_3 : 0\right)$$

De la misma manera determinamos los puntos de corte entre cada uno de los otros dos lados y la perpendicular por P por ese mismo lado, obteniendo los llamados "**pedales de P**", definidos en 3.6.7:

$$P_A = \left(0 : a^2 p_2 + S_C p_1 : a^2 p_3 + S_B p_1\right)$$
$$P_B = \left(b^2 p_1 + S_C p_2 : 0 : b^2 p_3 + S_A p_2\right)$$
$$P_C = \left(c^2 p_1 + S_B p_3 : c^2 p_2 + S_A p_3 : 0\right)$$



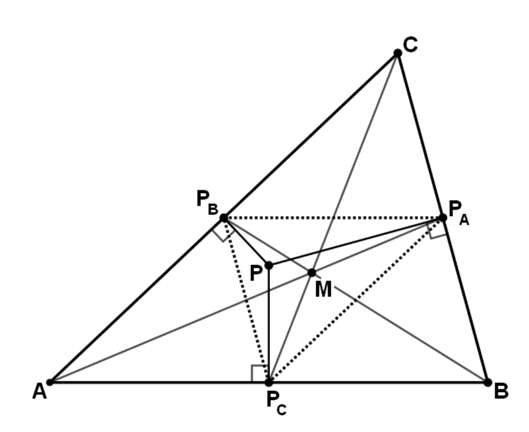
20.7.3 Definición. El triángulo órtico.
El triángulo órtico es el triángulo pedal del ortocentro.



El ortocentro es $H = (S_{BC} : S_{AC} : S_{AB})$, luego su vértice A_H será:
$$H_A = (0 : a^2 p_2 + S_C p_1 : a^2 p_3 + S_B p_1) = (0 : a^2 S_{AC} + S_C S_{BC} : a^2 S_{AB} + S_B S_{BC}) =$$
$$= (0 : S_C (a^2 S_A + S_{BC}) : S_B (a^2 S_A + S_{BC})) = (0 : S_C : S_B)$$

Y de la misma forma $H_B = (S_C : 0 : S_A)$ y $H_C = (S_B : S_A : 0)$

20.7.4 Ejercicio.
El triángulo pedal del circuncentro es el triángulo medial.



Demostración. Se puede deducir de la propia construcción de ambos triángulos, o determinando las coordenadas de P_A, P_B y P_C:
$P = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C)$, luego
$$P_A = (0 : a^2 b^2 S_B + S_C a^2 S_A : a^2 c^2 S_C + S_B a^2 S_A) =$$
$$= (0 : b^2 S_B + S_C S_A : c^2 S_C + S_B S_A) = (0 : S^2 - S_C S_A + S_C S_A : S^2 - S_B S_A + S_B S_A) =$$
$$= (0 : S^2 : S^2) = (0 : 1 : 1) = M_A$$
Y de la misma forma $P_B = M_B$ y $P_C = M_C$.

20.7.5 Proposición. El punto impropio de las rectas perpendiculares a una dada.
Todas las rectas perpendiculares a una recta dada

$$px + qy + rz = 0$$

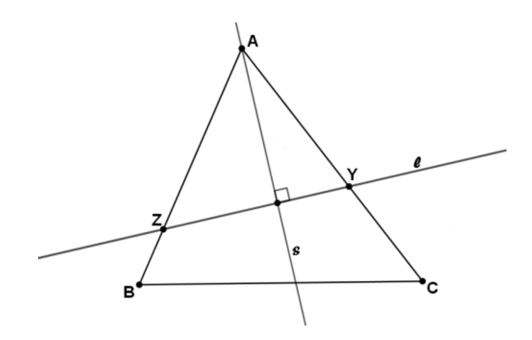
serán paralelas entre ellas, por lo tanto, compartirán un mismo punto impropio, que será

$$\left(g S_B - h S_C : h S_C - f S_A : f S_A - g S_B\right)$$

donde $(f : g : h) = (q - r : r - p : p - q)$ es el punto impropio de la recta l.

Nota: Este método fue descubierto por **Floor van Lamoen**.

Demostración. Para determinar este punto impropio bastará con determinarlo en una perpendicular en particular, y nosotros lo haremos con aquella que pasa por el vértice A del triángulo ΔABC de referencia, a la que llamaremos s.



Sea Z el punto de corte de l con el lado AB: $Z = (q : -p : 0)$
Sea Y el punto de corte de l con el lado AC: $Y = (-r : 0 : p)$

Las rectas perpendiculares al lado AC tendrán como punto impropio el mismo que el de su mediatriz: $\left(S_C : -b^2 : S_A\right)$ (ver 20.7.1), luego la perpendicular a AC por Z será la recta

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ q & -p & 0 \\ S_C & -b^2 & S_A \end{vmatrix} = -pS_A x - qS_A y + (S_C p - qb^2) z \Leftrightarrow$$

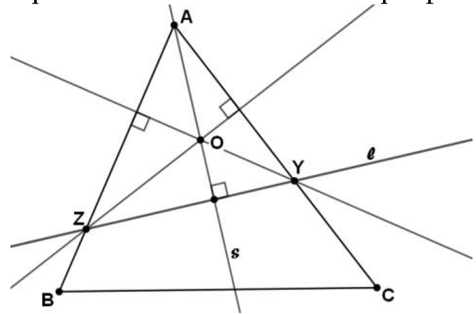
$$0 = pS_A x + qS_A y + (qb^2 - pS_C) z$$

De la misma manera, la recta perpendicular a AB por Y será:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -r & 0 & p \\ S_B & S_A & -c^2 \end{vmatrix} = -pS_A x - \left(rc^2 - pS_B\right) y - rS_A z \Leftrightarrow$$

$$0 = pS_A x + (rc^2 - pS_B) y + rS_A z$$

El punto O de intersección de ambas rectas es el ortocentro del triángulo ΔAZY , y por lo tanto, la perpendicular s que buscamos será la recta que pase por A y por O.



Calculamos las coordenadas del punto O (*** significa que no importa su contenido)

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ pS_A & qS_A & qb^2-pS_C \\ pS_A & rc^2-pS_B & rS_A \end{vmatrix}=$$

$$pS_A\left(***:-\begin{vmatrix} 1 & qb^2-pS_C \\ 1 & rS_A \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & qS_A \\ 1 & rc^2-pS_B \end{vmatrix}\right)=$$

$$\left(***:-rS_A+qb^2-pS_C:rc^2-pS_B-qS_A\right)=$$

$$\left(***:rS_A+pS_C-qb^2:pS_B+qS_A-rc^2\right)=$$

$$\left(***:(r-q)S_A+(p-q)S_C:(q-r)S_A+(p-r)S_B\right)$$

$$rS_A+pS_C-qb^2=rS_A+pS_C-q(S_A+S_C)=(r-q)S_A+(p-q)S_C$$

$$pS_B+qS_A-rc^2=pS_B+qS_A-r(S_A+S_B)=(q-r)S_A+(p-r)S_B$$

La recta AO será pues:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ *** & (r-q)S_A+(p-q)S_C & (q-r)S_A+(p-r)S_B \end{vmatrix}=$$

$$=-\left((q-r)S_A+(p-r)S_B\right)y+\left((r-q)S_A+(p-q)S_C\right)z=$$

$$=-\left((q-r)S_A-(r-p)S_B\right)y+\left((p-q)S_C-(q-r)S_A\right)z=*$$

Sea $f=q-r, g=r-p, h=p-q$, es decir, $P=(f:g:h)$ es el punto impropio de la recta l . Entonces podemos escribir la ecuación de la recta perpendicular por A como:

$$0=-\left(f\,S_A-g\,S_B\right)y+\left(hS_C-f\,S_A\right)z$$

Y su punto impropio es:

$$\left(-\left(f\,S_A-g\,S_B\right)-\left(hS_C-f\,S_A\right):hS_C-f\,S_A:f\,S_A-g\,S_B\right)=$$

$$\left(g\,S_B-hS_C:hS_C-f\,S_A:f\,S_A-g\,S_B\right)$$

Ejercicios propuestos: Ejercicios #2 y #4 de **[Prob3]**.

20.8 Vectores de desplazamiento. Producto escalar.

20.8.1 Definición. Vector de desplazamiento.
Dados dos puntos en coordenadas baricéntricas $P=(p_1,p_2,p_3)$ y $Q=(q_1,q_2,q_3)$, definimos el **vector de desplazamiento** $\overrightarrow{PQ}$ por

$$\overrightarrow{PQ}=(p_1-q_1\,,\,p_2-q_2\,,\,p_3-q_3)$$

Observamos que todo vector de desplazamiento (a,b,c) cumple $a+b+c=0$

En general, llamaremos vector de desplazamiento a todo vector de la forma $\vec{v}=v_1\vec{A}+v_2\vec{B}+v_3\vec{C}$ cumpliendo $v_1+v_2+v_3=0$. Dicho vector se escribirá como $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

20.8.2 Proposición. Producto escalar de dos vectores de desplazamiento.
Si $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ son dos vectores de desplazamiento, entonces
a) $\vec{v}\cdot\vec{w}=S_Av_1w_1+S_Bv_2w_2+S_Cv_3w_3$

O equivalentemente:
b) $\vec{v}\cdot\vec{w}=\dfrac{-1}{2}\left[a^2(v_3w_2+v_2w_3)+b^2(v_1w_3+v_3w_1)+c^2(v_2w_1+v_1w_2)\right]$

Demostración. Puesto que $\vec{v}$ es un vector de desplazamiento, tenemos que $v_1+v_2+v_3=0$, luego

$$\vec{v}=v_1\vec{A}+v_2\vec{B}+v_3\vec{C}=(-v_2-v_3)\vec{A}+v_2\vec{B}+v_3\vec{C}=$$
$$v_2\vec{B}-v_2\vec{A}+v_3\vec{C}-v_3\vec{A}=v_2(\vec{B}-\vec{A})+v_3(\vec{C}-\vec{A})=v_2\overrightarrow{AB}+v_3\overrightarrow{AC}$$

Y de la misma forma:

$$\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)\Leftrightarrow\vec{w}=w_1\vec{A}+w_2\vec{B}+w_3\vec{C}\Leftrightarrow\vec{w}=w_2\overrightarrow{AB}+w_3\overrightarrow{AC}$$

Por lo tanto:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\left(v_2\overrightarrow{AB}+v_3\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(w_2\overrightarrow{AB}+w_3\overrightarrow{AC}\right)=$$
$$=v_2\overrightarrow{AB}\cdot\left(w_2\overrightarrow{AB}+w_3\overrightarrow{AC}\right)+v_3\overrightarrow{AC}\cdot\left(w_2\overrightarrow{AB}+w_3\overrightarrow{AC}\right)=$$
$$=v_2\overrightarrow{AB}\cdot w_2\overrightarrow{AB}+v_2\overrightarrow{AB}\cdot w_3\overrightarrow{AC}+v_3\overrightarrow{AC}\cdot w_2\overrightarrow{AB}+v_3\overrightarrow{AC}\cdot w_3\overrightarrow{AC}=$$
$$=v_2w_2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+(v_2w_3+v_3w_2)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+v_3w_3\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=(1)$$

Por otro lado,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=c^2\,,\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=b^2\ \text{y}\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=S_A\ \ (20.4.2c)$$

Luego

$$(1)=v_2w_2c^2+(v_2w_3+v_3w_2)ab\cos A+v_3w_3b^2=$$
$$=v_2w_2(S_A+S_B)+(v_2w_3+v_3w_2)S_A+v_3w_3(S_A+S_C)=$$
$$=v_2w_2S_A+v_2w_2S_B+v_2w_3S_A+v_3w_2S_A+v_3w_3S_A+v_3w_3S_C=$$
$$=S_A(v_2w_2+v_2w_3+v_3w_2+v_3w_3)+v_2w_2S_B+v_3w_3S_C$$
$$=S_Av_1w_1+v_2w_2S_B+v_3w_3S_C$$

En donde hemos utilizado que
$v_2w_2+v_2w_3+v_3w_2+v_3w_3=(v_2+v_3)(w_2+w_3)=(-v_1)(-w_1)=v_1w_1$

Demostremos ahora la segunda fórmula equivalente:
$2\,\vec{v}\cdot\vec{w}=2\left(S_Av_1w_1+S_Bv_2w_2+S_Cv_3w_3\right)=$
$=\left(b^2+c^2-a^2\right)v_1w_1+\left(a^2+c^2-b^2\right)v_2w_2+\left(a^2+b^2-c^2\right)v_3w_3=$
$=b^2v_1w_1+c^2v_1w_1-a^2v_1w_1+a^2v_2w_2+c^2v_2w_2-b^2v_2w_2+a^2v_3w_3+b^2v_3w_3-c^2v_3w_3=$
$=a^2\left(v_2w_2+v_3w_3-v_1w_1\right)+b^2\left(v_1w_1+v_3w_3-v_2w_2\right)+c^2\left(v_1w_1+v_2w_2-v_3w_3\right)=$
$=(-1)\left[a^2\left(v_1w_1-v_2w_2-v_3w_3\right)+b^2\left(v_2w_2-v_1w_1-v_3w_3\right)+c^2\left(v_3w_3-v_1w_1-v_2w_2\right)\right]$
Teniendo en cuenta que son vectores de desplazamiento, $v_1+v_2+v_3=0$ y $w_1+w_2+w_3=0$, y por tanto:
$v_1w_1-v_2w_2-v_3w_3=(-v_2-v_3)(-w_2-w_3)-v_2w_2-v_3w_3=$
$=v_2w_2+v_2w_3+v_3w_2+v_3w_3-v_2w_2-v_3w_3=v_2w_3+v_3w_2$
y de la misma forma $v_2w_2-v_1w_1-v_3w_3=v_1w_3+v_3w_1$ y $v_3w_3-v_1w_1-v_2w_2=v_1w_2+v_2w_1$
con lo que llegamos a la segunda fórmula equivalente.

20.8.3 Corolario.
a) Si $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ es un vector de desplazamiento, entonces

$$\|\vec{v}\|^2=S_A{v_1}^2+S_B{v_2}^2+S_C{v_3}^2$$

O equivalentemente:

$$\|\vec{v}\|^2=-a^2v_2v_3-b^2v_1v_3+c^2v_1v_2$$

b) Si $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ son dos vectores de desplazamiento y α el ángulo que determinan, entonces

$$\cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|}=\frac{S_Av_1w_1+S_Bv_2w_2+S_Cv_3w_3}{\sqrt{S_A{v_1}^2+S_B{v_2}^2+S_C{v_3}^2}\sqrt{S_A{w_1}^2+S_B{w_2}^2+S_C{w_3}^2}}$$

c) La distancia entre dos puntos dados en coordenadas baricéntricas $P=(p_1,p_2,p_3)$ y $Q=(q_1,q_2,q_3)$, viene dada por la fórmula:

$$d(P,Q)=\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\sqrt{S_A(q_1-p_1)^2+S_B(q_2-p_2)^2+S_C(q_3-p_3)^2}$$

d) Dos vectores de desplazamiento $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ serán perpendiculares si y sólo si

$$0=\vec{v}\cdot\vec{w}=S_Av_1w_1+S_Bv_2w_2+S_Cv_3w_3$$

O equivalentemente:

$$a^2\left(v_3w_2+v_2w_3\right)+b^2\left(v_1w_3+v_3w_1\right)+c^2\left(v_2w_1+v_1w_2\right)=0$$

Demostración.

a) $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = S_A v_1 v_1 + S_B v_2 v_2 + S_C v_3 v_3 = S_A {v_1}^2 + S_B {v_2}^2 + S_C {v_3}^2$

$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{-1}{2}\left[a^2(v_3 v_2 + v_2 v_3) + b^2(v_1 v_3 + v_3 v_1) + c^2(v_2 v_1 + v_1 v_2)\right] =$

$= \frac{-1}{2}\left[a^2(2v_3 v_2) + b^2(2v_1 v_3) + c^2(2v_2 v_1)\right] = -a^2 v_2 v_3 - b^2 v_1 v_3 + c^2 v_1 v_2$

b) Basta con sustituir las expresiones implicadas.

c) $P = (p_1, p_2, p_3) \Leftrightarrow \vec{P} = p_1\vec{A} + p_2\vec{B} + p_3\vec{C}$

$Q = (q_1, q_2, q_3) \Leftrightarrow \vec{Q} = q_1\vec{A} + q_2\vec{B} + q_3\vec{C}$

Y entonces

$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = q_1\vec{A} + q_2\vec{B} + q_3\vec{C} - p_1\vec{A} - p_2\vec{B} - p_3\vec{C} =$

$= (q_1 - p_1)\vec{A} + (q_2 - p_2)\vec{B} + (q_3 - p_3)\vec{C}$

es un vector de desplazamiento, con lo que podemos aplicar 20.8.3a:

$\sqrt{d(P,Q)} = \sqrt{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \sqrt{S_A(q_1 - p_1)^2 + S_B(q_2 - p_2)^2 + S_C(q_3 - p_3)^2}$

d) Basta aplicar $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$

Problemas propuestos: Problema #5 de **[Prob3]**, Problema #48 de **[Prob4]**.

20.8.4 Proposición. Rectas perpendiculares.

Dos rectas $p_1 x + p_2 y + p_3 z = 0$ y $q_1 x + q_2 y + q_3 z = 0$ serán perpendiculares si y sólo si

$$0 = S_A(p_2 - p_3)(q_2 - q_3) + S_B(p_3 - p_1)(q_3 - q_1) + S_C(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)$$

Demostración.

b) Los puntos impropios $(p_2 - p_3, p_3 - p_1, p_1 - p_2)$ y $(q_2 - q_3, q_3 - q_1, q_1 - q_2)$ los podemos entender como vectores de desplazamiento paralelos a cada una de las rectas, con lo que aplicamos 20.8.3d.

20.8.5 Ejemplos.

a) El vector de desplazamiento $\overrightarrow{PQ} = (x_1, y_1, z_1)$ será perpendicular al lado BC del triángulo de referencia si y sólo si

$$0 = a^2(z_1 - y_1) + x_1(c^2 - b^2)$$

b) La mediatriz del lado BC del triángulo de referencia tiene por ecuación

$$0 = a^2(z - y) + x(c^2 - b^2)$$

Demostración. a) Basta aplicar la igualdad de 20.5.3:

$0 = a^2(z_1 1 + y_1(-1)) + b^2(x_1(-1) + z_1 0) + c^2(y_1 0 + x_1 1) = a^2(z_1 - y_1) + x_1(c^2 - b^2)$

b) Sea $P = (x, y, z)$ un punto de la mediatriz. Sea $D = (0, 1/2, 1/2)$ el punto medio del lado BC. El vector de desplazamiento será $\overrightarrow{PD} = (x, y - 1/2, z - 1/2)$ y por lo tanto se cumplirá $0 = a^2(z - 1/2 - y + 1/2) + x(c^2 - b^2) = a^2(z - y) + x(c^2 - b^2)$, tal y como queríamos ver.

Ejercicio propuesto: Ejercicio #26 de **[Prob3]**.

20.9 Circunferencias.

20.9.1 Lema.
Dado un punto $P=(x,y,z)$, se cumple:

$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 = S_A(x-1)^2 + S_B y^2 + S_C z^2$$
$$\left\|\overrightarrow{BP}\right\|^2 = S_A x^2 + S_B (y-1)^2 + S_C z^2$$
$$\left\|\overrightarrow{CP}\right\|^2 = S_A x^2 + S_B y^2 + S_C (z-1)^2$$

Demostración. Basta sustituir las coordenadas de los puntos A, B y C en la fórmula de 20.8.3c.

20.9.2 Lema.
Si $P=(x,y,z)$ y Q es cualquier punto del plano,

$$\overrightarrow{QP}^2 = x\overrightarrow{QA}^2 + y\overrightarrow{QB}^2 + z\overrightarrow{QC}^2 - a^2yz - b^2xz - c^2xy$$

Demostración. $P=(x,y,z) \Leftrightarrow \vec{P} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}$
Luego

$$\left|\overline{P}\right|^2 = \vec{P}^2 = \left(x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}\right)\cdot\left(x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}\right) =$$
$$= x^2\vec{A}^2 + y^2\vec{B}^2 + z^2\vec{C}^2 + 2xy\vec{A}\cdot\vec{B} + 2xz\vec{A}\cdot\vec{C} + 2yz\vec{B}\cdot\vec{C} =$$
$$= x^2\vec{A}^2 + y^2\vec{B}^2 + z^2\vec{C}^2 + 2xy(\vec{A}^2 + \vec{B}^2 - c^2) + 2xz(\vec{A}^2 + \vec{C}^2 - b^2) + 2yz(\vec{B}^2 + \vec{C}^2 - a^2) =$$
$$= x^2\vec{A}^2 + y^2\vec{B}^2 + z^2\vec{C}^2 +$$
$$+ xy\vec{A}^2 + xy\vec{B}^2 - xyc^2 + xz\vec{A}^2 + xz\vec{C}^2 - xzb^2 + yz\vec{B}^2 + yz\vec{C}^2 - yza^2 =$$
$$= x^2\vec{A}^2 + y^2\vec{B}^2 + z^2\vec{C}^2 + x(y+z)\vec{A}^2 + y(x+z)\vec{B}^2 + z(x+y)\vec{C}^2 - xyc^2 - xzb^2 - yza^2 =$$
$$= x^2\vec{A}^2 + y^2\vec{B}^2 + z^2\vec{C}^2 + x(1-x)\vec{A}^2 + y(1-y)\vec{B}^2 + z(1-z)\vec{C}^2 - xya^2 - xzb^2 - yza^2 =$$
$$= x^2\vec{A}^2 + y^2\vec{B}^2 + z^2\vec{C}^2 + x\vec{A}^2 - x^2\vec{A}^2 + y\vec{B}^2 - y^2\vec{B}^2 + z\vec{C}^2 - z^2\vec{C}^2 -$$
$$- xya^2 - xzb^2 - yza^2 =$$
$$= x\vec{A}^2 + y\vec{B}^2 + z\vec{C}^2 - c^2xy - b^2xz - a^2yz$$

Por lo tanto, si Q es un punto cualquiera del plano,

$$\overrightarrow{QP}^2 = x\overrightarrow{QA}^2 + y\overrightarrow{QB}^2 + z\overrightarrow{QC}^2 - a^2yz - b^2xz - c^2xy$$

20.9.3 Proposición. Coordenadas baricéntricas y la ecuación de una circunferencia.
Definimos las **coordenadas baricéntricas** de la circunferencia ω respecto del triángulo de referencia ΔABC por

$$\lambda = p(A,\omega) \ , \ \mu = p(B,\omega) \ , \ \nu = p(C,\omega)$$

Y la ecuación de la circunferencia será:

$$(\lambda x + \mu y + \nu z)(x+y+z) - a^2 yz - b^2 xz - c^2 xy = 0$$

Es decir, los coeficientes λ, μ y ν son las potencias de los vértices A, B y C, respecto de la circunferencia.

Demostración. Si P es un punto con coordenadas baricéntricas absolutas $P=(x,y,z)$, aplicando el lema 20.9.2:

$p(P,\omega) = |SP|^2 - r^2 = x\overrightarrow{SA}^2 + y\overrightarrow{SB}^2 + z\overrightarrow{SC}^2 - a^2yz - b^2xz - c^2xy - r^2 =$

$= x\overrightarrow{SA}^2 + y\overrightarrow{SB}^2 + z\overrightarrow{SC}^2 - a^2yz - b^2xz - c^2xy - (x+y+z)r^2 =$

$= x\left(\overrightarrow{SA}^2 - r^2\right) + y\left(\overrightarrow{SB}^2 - r^2\right) + z\left(\overrightarrow{SC}^2 - r^2\right) - a^2yz - b^2xz - c^2xy =$

$= \lambda x + \mu y + \nu z - a^2yz - b^2xz - c^2xy$

Luego: $P \in \omega \Leftrightarrow p(P,\omega) = 0 \Leftrightarrow \lambda x + \mu y + \nu z - a^2yz - b^2xz - c^2xy = 0$

Sea ahora Q un punto dado en coordenadas baricéntricas homogéneas: $Q = (x:y:z)$.
Entonces $P = \left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right)$ es ese mismo punto en coordenadas baricéntricas absolutas, y

$Q \in \omega \Leftrightarrow P \in \omega \Leftrightarrow p(P,\omega) = 0 \Leftrightarrow \lambda \frac{x}{x+y+z} + \mu \frac{y}{x+y+z} + \nu \frac{z}{x+y+z} -$

$- a^2 \frac{yz}{(x+y+z)^2} - b^2 \frac{xz}{(x+y+z)^2} - c^2 \frac{xy}{(x+y+z)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{(x+y+z)^2}\left(\lambda x(x+y+z) + \mu y(x+y+z) + \nu z(x+y+z) - a^2yz - b^2xz - c^2xy\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{(x+y+z)^2}\left((\lambda x + \mu y + \nu z)(x+y+z) - a^2yz - b^2xz - c^2xy\right) = 0 \Leftrightarrow$

$(\lambda x + \mu y + \nu z)(x+y+z) - a^2yz - b^2xz - c^2xy = 0$

20.9.4 Ejemplo. Ecuación baricéntrica de la circunferencia circunscrita.
La circunferencia circunscrita del triángulo de referencia ΔABC tiene por ecuación baricéntrica

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$$

Demostración. Basta sustituir la ecuación general de 20.9.3 en los puntos A, B y C:
En $A=(1,0,0)$: $a^2 0 + b^2 0 + c^2 0 - (\lambda 1 + \mu 0 + \nu 0)(1+0+0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$
En $B=(0,1,0)$: $a^2 0 + b^2 0 + c^2 0 - (\lambda 0 + \mu 1 + \nu 0)(0+1+0) = 0 \Rightarrow \mu = 0$

En $C=(0,0,1)$: $a^2 0+b^2 0+c^2 0-(\lambda 0+\mu 0+\nu 1)(0+0+1)=0 \Rightarrow \nu=0$

También llegamos al mismo resultado teniendo en cuenta que $\lambda = p(A,\omega)=0$ pues el punto A pertenece a la circunferencia, y de la misma forma $\mu=\nu=0$.

Ejercicio propuesto: Ejercicio #18 de **[Prob3]**.

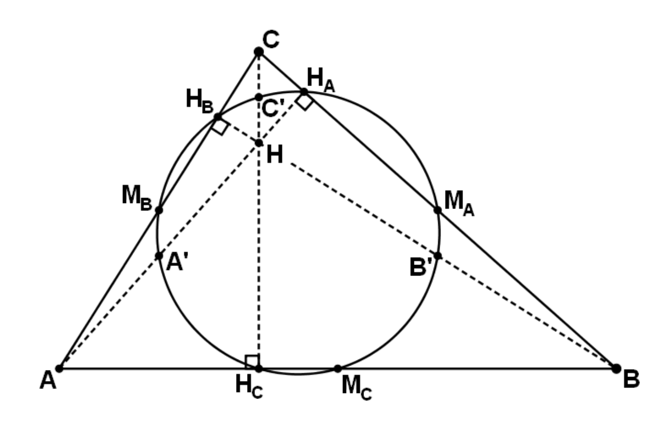
20.9.5 Ejemplo. Ecuación baricéntrica de la circunferencia inscrita.
La circunferencia inscrita del triángulo de referencia ΔABC tiene por ecuación baricéntrica

$$-a^2yz-b^2xz-c^2xy+\left((s-a)^2x+(s-b)^2y+(s-c)^2z\right)(x+y+z)=0$$

Demostración. Ejercicio 13 de **[Prob3]**.

20.9.6 Ejemplo. La circunferencia de los nueve puntos.
Los puntos medios M_A, M_B y M_C de un triángulo, los pies H_A, H_B y H_C de las alturas, y los puntos medios A', B' y C' entre cada vértice y el ortocentro H pasan por una misma circunferencia, llamada "**circunferencia de Euler**" o "**la circunferencia de los nueve puntos**". Su ecuación es:

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-\frac{1}{2}\left(S_A\,x+S_B\,y+S_C\,z\right)(x+y+z)=0$$



Su centro está catalogado como X_5 en ETC.

Demostración. Problema #14 de **[Prob3]**.

Nota: En el Problema #7 de **[Prob4]** se demuestra, sin utilizar coordenadas baricéntricas, que los puntos medios A',B' y C' pertenecen a la circunferencia circunscrita.

Nota histórica: Esta circunferencia fue descubierta por **Jean-Victor Poncelet** (1788-1867) y **Charles-Julien Brianchon** (1783-1864) en 1821.

Problema propuesto: En el problema #20 de **[Prob5]** encontramos una aparición interesante de la circunferencia de los nueve puntos.

20.9.7 Proposición. Ecuación de la circunferencia dado su centro y su radio.
Las coordenadas (λ, μ, ν) de una circunferencia de centro $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y radio r son:

$$\lambda = p(A,\omega) = |QA|^2 - r^2 = S_A(q_1 - 1)^2 + S_B q_2{}^2 + S_C q_3{}^2 - r^2$$
$$\mu = p(B,\omega) = |QB|^2 - r^2 = S_A q_1{}^2 + S_B(q_2 - 1)^2 + S_C q_3{}^2 - r^2$$
$$\nu = p(B,\omega) = |QC|^2 - r^2 = S_A q_1{}^2 + S_B q_2{}^2 + S_C(q_3 - 1)^2 - r^2$$

Demostración. Basta aplicar el Lema 20.9.1.

20.9.8 Proposición. Centro y radio en función de sus coordenadas.
Las coordenadas del centro $Q = (q_1, q_2, q_3)$ de una circunferencia de coordenadas baricéntricas (λ, μ, ν) son:

$$q_1 = a^2 S_A + S_B(\nu - \lambda) - S_C(\lambda - \mu)$$
$$q_2 = b^2 S_B + S_C(\lambda - \mu) - S_A(\mu - \nu)$$
$$q_3 = c^2 S_C + S_A(\mu - \nu) - S_B(\nu - \lambda)$$

O bien:

$$q_1 = -a^2\lambda + S_C\mu + S_B\nu + a^2 S_A$$
$$q_2 = S_C\lambda - b^2\mu + S_A\nu + b^2 S_B$$
$$q_3 = S_B\lambda + S_A\,\mu - c^2\nu + c^2 S_C$$

Demostración.

20.10 Rectas tangentes.

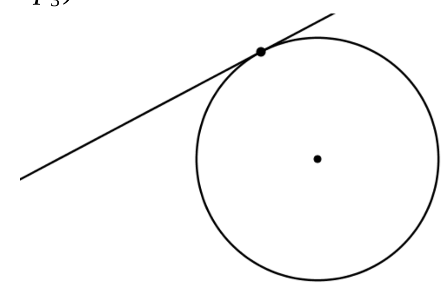
20.10.1 Proposición. Ecuación de la recta tangente a una circunferencia.
Sea una circunferencia con ecuación

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-(ux+vy+wz)(x+y+z)=0$$

y sea $P=(p_1:p_2:p_3)$ un punto que pertenece a la misma.

Entonces la recta que pasa por P tangente a la circunferencia tiene por ecuación

$$a^2(p_2z+p_3y)+b^2(p_3x+p_1z)+c^2(p_1y+p_2x)-(p_1+p_2+p_3)(ux+vy+wz)-$$
$$-(x+y+z)(up_1+vp_2+wp_3)=0$$



Demostración. Sea $Q=(p_1+\lambda v_1:p_2+\lambda v_2:p_3+\lambda v_3)$ la parametrización de la recta que pasa por el punto P, donde $(v_1:v_2:v_3)$ es un vector de desplazamiento, es decir, $v_1+v_2+v_3=0$.

Sustituimos Q en la ecuación de la circunferencia

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-(ux+vy+wz)(x+y+z)=0$$

$$a^2(p_2+\lambda v_2)(p_3+\lambda v_3)+b^2(p_3+\lambda v_3)(p_1+\lambda v_1)+c^2(p_1+\lambda v_1)(p_2+\lambda v_2)-$$
$$-(u(p_1+\lambda v_1)+v(p_2+\lambda v_2)+w(p_3+\lambda v_3))(p_1+\lambda v_1+p_2+\lambda v_2+p_3+\lambda v_3)=0$$

$$a^2(p_2+\lambda v_2)(p_3+\lambda v_3)+b^2(p_3+\lambda v_3)(p_1+\lambda v_1)+c^2(p_1+\lambda v_1)(p_2+\lambda v_2)=$$
$$a^2p_2p_3+b^2p_1p_3+c^2p_1p_2+$$
$$+\lambda\left[c^2p_2v_1+b^2p_3v_1+c^2p_1v_2+a^2p_3v_2+a^2p_2v_3+b^2p_1v_3+\lambda\left(c^2v_1v_2+b^2v_1v_3+a^2v_2v_3\right)\right]=$$
$$=a^2p_2p_3+b^2p_1p_3+c^2p_1p_2+$$
$$+\lambda\left[a^2(p_3v_2+p_2v_3)+b^2(p_3v_1+p_1v_3)+c^2(p_1v_2+p_2v_1)+\lambda\left(c^2v_1v_2+b^2v_1v_3+a^2v_2v_3\right)\right]$$

$$(u(p_1+\lambda v_1)+v(p_2+\lambda v_2)+w(p_3+\lambda v_3))(p_1+\lambda v_1+p_2+\lambda v_2+p_3+\lambda v_3)=$$
$$\left(p_1+p_2+p_3+\lambda(v_1+v_2+v_3)\right)\left(p_1u+p_2v+p_3w+\lambda(uv_1+vv_2+wv_3)\right)=$$
$$=\left(p_1+p_2+p_3\right)\left(p_1u+p_2v+p_3w\right)+\left(p_1+p_2+p_3\right)\lambda(uv_1+vv_2+wv_3)+$$
$$+\lambda(v_1+v_2+v_3)(p_1u+p_2v+p_3w)+\lambda^2(v_1+v_2+v_3)(uv_1+vv_2+wv_3)$$

Teniendo en cuenta que $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ la expresión anterior se reduce a

$$(p_1 + p_2 + p_3)(p_1u + p_2v + p_3w) + (p_1 + p_2 + p_3)\lambda(uv_1 + vv_2 + wv_3) +$$
$$+ \lambda^2(v_1 + v_2 + v_3)(uv_1 + vv_2 + wv_3)$$

Puesto que P pertenece a la circunferencia sus coordenadas satisfarán su ecuación asociada:

$$a^2 p_2 p_3 + b^2 p_1 p_3 + c^2 p_1 p_2 - (p_1 + p_2 + p_3)(p_1u + p_2v + p_3w) = 0$$

Y nos queda la ecuación

$$\lambda\left[a^2(p_3v_2 + p_2v_3) + b^2(p_3v_1 + p_1v_3) + c^2(p_1v_2 + p_2v_1) + \lambda\left(c^2v_1v_2 + b^2v_1v_3 + a^2v_2v_3\right)\right] -$$
$$- \lambda(p_1 + p_2 + p_3)(uv_1 + vv_2 + wv_3) - \lambda^2(v_1 + v_2 + v_3)(uv_1 + vv_2 + wv_3) =$$
$$= \lambda(a^2(p_3v_2 + p_2v_3) + b^2(p_3v_1 + p_1v_3) + c^2(p_1v_2 + p_2v_1) -$$
$$- (p_1 + p_2 + p_3)(uv_1 + vv_2 + wv_3)) -$$
$$- \lambda^2((v_1 + v_2 + v_3)(uv_1 + vv_2 + wv_3) - (c^2v_1v_2 + b^2v_1v_3 + a^2v_2v_3)) = 0$$

La recta es tangente a la circunferencia y por lo tanto sólo puede cortarla en el punto P, es decir, la ecuación anterior es una ecuación de segundo grado en λ de la forma $A\lambda - B\lambda^2 = 0$ que sólo puede tener solución $\lambda = 0$, luego $A = 0$, es decir:

$$a^2(p_3v_2 + p_2v_3) + b^2(p_3v_1 + p_1v_3) + c^2(p_1v_2 + p_2v_1) - (p_1 + p_2 + p_3)(uv_1 + vv_2 + wv_3) = 0$$

Volvamos ahora a la expresión del enunciado:

$$a^2(p_2z + p_3y) + b^2(p_3x + p_1z) + c^2(p_1y + p_2x) -$$
$$- (p_1 + p_2 + p_3)(ux + vy + wz) - (x + y + z)(up_1 + vp_2 + wp_3) =$$
$$= a^2(p_2(p_3 + \lambda v_3) + p_3(p_2 + \lambda v_2)) + b^2(p_3(p_1 + \lambda v_1) + p_1(p_3 + \lambda v_3)) +$$
$$+ c^2(p_1(p_2 + \lambda v_2) + p_2(p_1 + \lambda v_1)) -$$
$$- (p_1 + p_2 + p_3)(u(p_1 + \lambda v_1) + v(p_2 + \lambda v_2) + w(p_3 + \lambda v_3)) -$$
$$- (p_1 + p_2 + p_3 + \lambda(v_1 + v_2 + v_3))(up_1 + vp_2 + wp_3) = (*)$$

Por un lado,

$$a^2(p_2(p_3 + \lambda v_3) + p_3(p_2 + \lambda v_2)) + b^2(p_3(p_1 + \lambda v_1) + p_1(p_3 + \lambda v_3)) +$$
$$+ c^2(p_1(p_2 + \lambda v_2) + p_2(p_1 + \lambda v_1)) =$$
$$= a^2(p_2p_3 + \lambda p_2v_3 + p_2p_3 + \lambda v_2p_3) + b^2(p_1p_3 + \lambda v_1p_3 + p_1p_3 + \lambda v_3p_1) +$$
$$+ c^2(p_1p_2 + \lambda v_2p_1 + p_1p_2 + \lambda v_1p_2) =$$
$$= a^2(2p_2p_3 + \lambda(p_2v_3 + \lambda v_2p_3)) + b^2(2p_1p_3 + \lambda(v_1p_3 + v_3p_1)) +$$
$$+ c^2(2p_1p_2 + \lambda(v_2p_1 + v_1p_2)) =$$
$$= 2a^2p_2p_3 + 2b^2p_1p_3 + 2c^2p_1p_2 + \lambda\left[a^2(p_2v_3 + v_2p_3)) + b^2(v_1p_3 + v_3p_1) + c^2(v_2p_1 + v_1p_2)\right]$$

Por otro lado,

$$(p_1+p_2+p_3)(u(p_1+\lambda v_1)+v(p_2+\lambda v_2)+w(p_3+\lambda v_3))+$$
$$+(p_1+p_2+p_3+\lambda\cdot 0)(u\,p_1+v\,p_2+w\,p_3)=$$
$$=(p_1+p_2+p_3)((p_1u+p_2v+p_3w+\lambda(v_1u+v_2v+v_3w))+$$
$$+(p_1+p_2+p_3)(u\,p_1+v\,p_2+w\,p_3)=$$
$$=(p_1+p_2+p_3)\left[p_1u+p_2v+p_3w+\lambda(v_1u+v_2v+v_3w)+u\,p_1+v\,p_2+w\,p_3\right]=$$
$$=(p_1+p_2+p_3)\left[2(p_1u+p_2v+p_3w)+\lambda(v_1u+v_2v+v_3w)\right]=$$
$$=2(p_1u+p_2v+p_3w)(p_1+p_2+p_3)+\lambda(v_1u+v_2v+v_3w)(p_1+p_2+p_3)$$

$$(*)=2a^2p_2p_3+2b^2p_1p_3+2c^2p_1p_2+$$
$$+\lambda\left[a^2(p_2v_3+v_2p_3))+b^2(v_1p_3+v_3p_1)+c^2(v_2p_1+v_1p_2)\right]-$$
$$-2(p_1u+p_2v+p_3w)(p_1+p_2+p_3)-\lambda(v_1u+v_2v+v_3w)(p_1+p_2+p_3)=$$
$$=2\left[a^2p_2p_3+2b^2p_1p_3+2c^2p_1p_2-(p_1u+p_2v+p_3w)(p_1+p_2+p_3)\right]$$
$$+\lambda\left[a^2(p_2v_3+v_2p_3))+b^2(v_1p_3+v_3p_1)+c^2(v_2p_1+v_1p_2)-(v_1u+v_2v+v_3w)(p_1+p_2+p_3)\right]=$$
$$=2\cdot 0+\lambda\cdot 0=0$$

En donde hemos tenido en cuenta que el punto P pertenece a la circunferencia y la igualdad deducida anteriormente.

20.10.2 Ejemplo. Ecuación de la recta tangente a la circunferencia circunscrita.
La recta tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo de referencia por el vértice $A=(1,0,0)$ tiene por ecuación:

$$0=b^2z+c^2y$$

Las otras dos rectas tangentes son $c^2x+a^2z=0$ y $b^2x+a^2y=0$.

Demostración. Basta sustituir $u=v=w=0$ y $p_1=1$, $p_2=p_3=0$ en la ecuación de 20.9.4:

$$0=a^2(0z+0y)+b^2(0x+1z)+c^2(1y+0x)-(1+0+0)(0)-$$
$$-(x+y+z)(0)=b^2z+c^2y$$

20.11 Giro de rectas.

20.11.1 Proposición. Ángulo entre dos rectas.
El ángulo orientado θ, $0 \le \theta \le \pi$, entre dos rectas

$$p : p_1 x + p_2 y + p_3 z = 0 \quad \text{y} \quad q : q_1 x + q_2 y + q_3 z = 0$$

viene dado por la fórmula

$$S_\theta = S \cot\theta = \frac{S_A(p_2 - p_3)(q_2 - q_3) + S_B(p_3 - p_1)(q_3 - q_1) + S_C(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}}$$

Demostración.

20.11.2 Corolario.
El ángulo orientado θ, $0 \le \theta \le \pi$, entre las rectas $p : p_1 x + p_2 y + p_3 z = 0$ y la recta q con punto impropio $(u : v : w)$

viene dado por la fórmula

$$S_\theta = S \cot\theta = \frac{uS_A(p_2 - p_3) + vS_B(p_3 - p_1) + wS_C(p_1 - p_2)}{u\,p_1 + v\,p_2 + w\,p_3}$$

Demostración. Si la recta q viene dada por la ecuación $q : q_1 x + q_2 y + q_3 z = 0$, su punto impropio es $(u : v : w) = (q_2 - q_3 : q_3 - q_1 : q_1 - q_2)$, y basta con sustituir en la fórmula de 20.11.1:

$$S_A(p_2 - p_3)(q_2 - q_3) + S_B(p_3 - p_1)(q_3 - q_1) + S_C(p_1 - p_2)(q_1 - q_2) =$$
$$uS_A(p_2 - p_3) + vS_B(p_3 - p_1) + wS_C(p_1 - p_2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-1 & 1-1 & 1 \\ p_1 - p_2 & p_2 - p_3 & p_3 \\ q_1 - q_2 & q_2 - q_3 & q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p_1 - p_2 & p_2 - p_3 & p_3 \\ w & u & q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 - p_2 & p_2 - p_3 \\ w & u \end{vmatrix} =$$
$$u(p_1 - p_2) - w(p_2 - p_3) = up_1 - up_2 - wp_2 + wp_3 = up_1 + (-u - w)p_2 + wp_3 =$$
$$= up_1 + vp_2 + wp_3 \quad (u + v + w = 0)$$

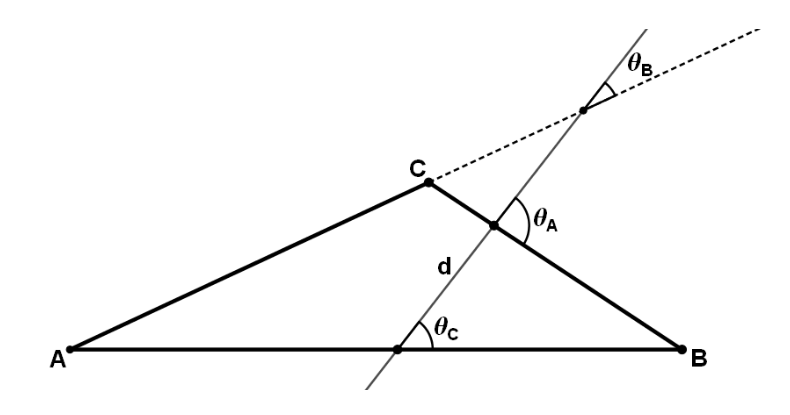
20.11.3 Ejemplo. Ángulos orientados entre una recta y los lados del triángulo de referencia.

Los ángulos orientados que determina una recta general $p: p_1x + p_2y + p_3z = 0$ con los lados AB, BC y AC del triángulo ΔABC de referencia son, respectivamente:

Con la recta BC: $\cot\theta_A = \dfrac{S_B(p_1 - p_3) - S_C(p_2 - p_1)}{S(p_2 - p_3)}$

Con la recta AC: $\cot\theta_B = \dfrac{S_C(p_2 - p_1) - S_A(p_3 - p_2)}{S(p_3 - p_1)}$

Con la recta AB: $\cot\theta_C = \dfrac{S_A(p_3 - p_2) - S_B(p_1 - p_3)}{S(p_1 - p_2)}$



Demostración.

$AB : z = 0 \rightarrow Punto\ impropio = (-1:1:0)$

$$S\cot\theta_C = \frac{-S_A(p_2 - p_3) + S_B(p_3 - p_1)}{-p_1 + p_2} = \frac{S_B(p_3 - p_1) - S_A(p_2 - p_3)}{p_2 - p_1} =$$

$$\frac{S_A(p_2 - p_3) - S_B(p_3 - p_1)}{p_2 - p_1} = \frac{S_A(p_3 - p_2) - S_B(p_1 - p_3)}{p_1 - p_2} \Rightarrow$$

$$\cot\theta_C = \frac{S_A(p_3 - p_2) - S_B(p_1 - p_3)}{S(p_1 - p_2)}$$

Y de la misma forma se demuestran las otras dos fórmulas.

Problemas propuestos: Ejercicio #15 de **[Prob3]**, Problema #19 de **[Prob5]**.

20.11.4 Proposición. Determinación de una recta conocido el ángulo.
Las coordenadas del punto impropio de una recta sabiendo que forma un ángulo orientado θ con la recta dada $p_1x + p_2y + p_3z = 0$ son:

$$\begin{pmatrix} p_1a^2 + p_2(S_\theta - S_C) - p_3(S_\theta + S_B) : \\ p_2b^2 + p_3(S_\theta - S_A) - p_1(S_\theta + S_C) : \\ p_3c^2 + p_1(S_\theta - S_B) - p_2(S_\theta + S_A) \end{pmatrix}$$

Demostración. Dada la recta $p_1x + p_2y + p_3z = 0$ y el ángulo orientado θ, sabemos por 20.11.2 que si $(u : v : w)$ es el punto impropio de nuestra recta, se cumple

$$S_\theta = \frac{uS_A(p_2 - p_3) + vS_B(p_3 - p_1) + wS_C(p_1 - p_2)}{u\,p_1 + v\,p_2 + w\,p_3} \Leftrightarrow$$

$$S_\theta(u\,p_1 + v\,p_2 + w\,p_3) = uS_A(p_2 - p_3) + vS_B(p_3 - p_1) + wS_C(p_1 - p_2) \Leftrightarrow$$

$$u\left(S_A(p_2 - p_3) - p_1S_\theta\right)u + \left(S_B(p_3 - p_1) - p_2S_\theta\right)v + \left(S_C(p_1 - p_2) - p_3S_\theta\right)w = 0$$

y además, $u + v + w = 0$

En general, un sistema del tipo $\begin{cases} u + v + w = 0 \\ Au + Bv + Cw = 0 \end{cases}$ tiene por solución $(u : v : w) = (C - B : A - C : B - A)$

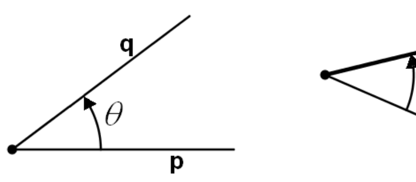
Luego

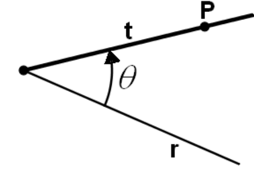
$$u = C - B = \left(S_C(p_1 - p_2) - p_3S_\theta\right) - \left(S_B(p_3 - p_1) - p_2S_\theta\right) =$$
$$= S_C(p_1 - p_2) - p_3S_\theta - S_B(p_3 - p_1) + p_2S_\theta =$$
$$= S_C\,p_1 - S_C\,p_2 - p_3S_\theta - S_B\,p_3 + S_B\,p_1 + p_2S_\theta =$$
$$= (S_C + S_B)\,p_1 + (S_\theta - S_C)\,p_2 - (S_\theta + S_B)\,p_3 =$$
$$= a^2\,p_1 + (S_\theta - S_C)\,p_2 - (S_\theta + S_B)\,p_3$$

Y con las otras dos coordenadas el razonamiento es similar.

20.11.5 Corolario.
Las fórmulas de 20.11.2 y 20.11.4 nos proporcionan de un método para obtener la ecuación de una recta que pasa por un punto P y determina respecto de una recta r el ángulo que determinan dos rectas dadas p y q:

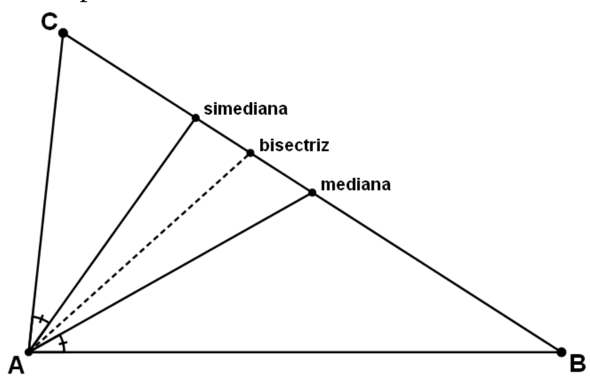
1. Calcularemos S_θ, (cotangente del ángulo entre p y q) con la fórmula del apartado a.
2. Calcularemos el punto impropio de la recta t con la fórmula del apartado b.
3. Determinaremos la recta t que pasa por P y dicho punto impropio mediante





20.12 Rectas simedianas. El punto simediano.

20.12.1 Proposición. Recta simediana.
Ya vimos en 15.1.1 que, dado un triángulo ΔABC, la simediana por A es la recta simétrica de la mediana respecto de la bisectriz en el vértice A.



Luego el ángulo orientado de la simediana con el lado AC será igual al ángulo de la mediana con el lado AB, cambiado de signo.
El baricentro tiene coordenadas $(1:1:1)$ (ver 20.1.7), luego la mediana por A tiene por ecuación $-y+z=0$. El ángulo entre la mediana y el lado AB será, aplicando 20.11.3:

$$\cot\theta = \frac{S_A(1+1)-S_B(-1)}{S} = \frac{2S_A+S_B}{S} \Rightarrow S_\theta = S\cot\theta = 2S_A+S_B$$

Luego tenemos $S_\varphi = -(2S_A+S_B)$.
La recta AC tiene por ecuación $y=0$, luego el punto impropio de la simediana será (20.11.4):

$$\left(S_\varphi - S_C : b^2 : -(S_\varphi + S_A)\right) = \left(-2S_A - S_B - S_C : b^2 : 2S_A + S_B - S_A\right) =$$
$$= \left(-2S_A - (S_B+S_C) : b^2 : S_A + S_B\right) = \left(-2S_A - a^2 : b^2 : c^2\right)$$

Y por lo tanto, la simediana por el vértice A tendrá por ecuación:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ -2S_A - a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2S_A - a^2 & c^2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2S_A - a^2 & b^2 \end{vmatrix} z =$$
$$= -c^2 y + b^2 z \Leftrightarrow 0 = c^2 y - b^2 z$$

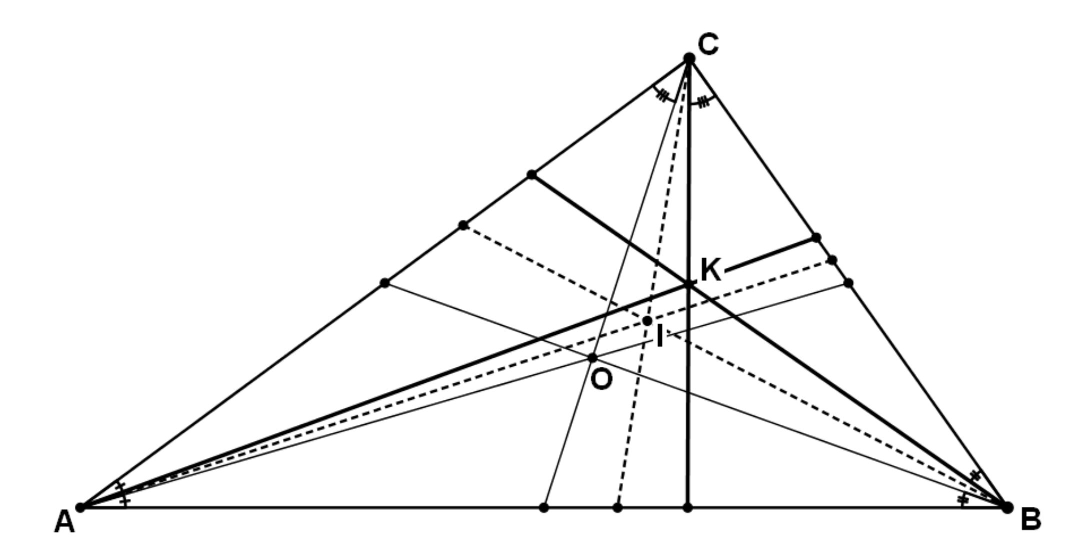
Con razonamientos similares se llega a los puntos impropios y las ecuaciones de las otras dos simedianas:

$$\left(a^2 : -2S_B - b^2 : c^2\right),\ c^2x - a^2z = 0$$
$$\left(a^2 : b^2 : -2S_C - c^2\right),\ a^2z - b^2x = 0$$

Observación: Los pies de las simedianas son los puntos de coordenadas $(0:b^2:c^2)$, $(a^2:0:c^2)$ y $(a^2:b^2:0)$, con lo que las simedianas son las rectas por los vértices que dividen al lado opuesto en la razón de los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes.

Ejercicio propuesto: Ejercicio #16 de **[Prob3]**.

20.12.2 Proposición. El punto simediano de un triángulo.
Las tres simedianas concurren en un punto llamado **simediano** $K = (a^2 : b^2 : c^2)$, también conocido como **punto de Lemoine**.



Demostración. Está claro que el punto $K = (a^2 : b^2 : c^2)$ satisface las tres ecuaciones asociadas a las simedianas que hemos obtenido en el apartado anterior.

Nota histórica: Emile Michel Hyacinthe Lemoine (1840-1912) expuso propiedades del punto conocido hoy como simediano o punto de Lemoine, por primera vez en 1873 (*Nouvelles Annales de Mathématiques*), luego en el Congreso de la Association scientifique pour l'avancement des Sciences, al que dio el nombre de "centro de medianas antiparalelas". Posteriormente, en 1884, M. Neuberg en *Memoire sur le tétraèdre* (donde hace una generalización al tetraedro) le llamó "punto de Lemoine". No obstante, este punto fue tratado en 1809 por LHuilier y en 1847 por Grebe, es por lo que se conoce como "punto de Grebe", en Alemania. En 1883, M. d'Ocagne introduce el término "simediana" para la recta obtenida como reflexión de una mediana de un triángulo respecto a la correspondiente bisectriz (es decir, la mediana antiparalela de Lemoine). Es Robert Tucker quién introduce el nombre de "simediano", para el punto de concurrencia de las medianas.

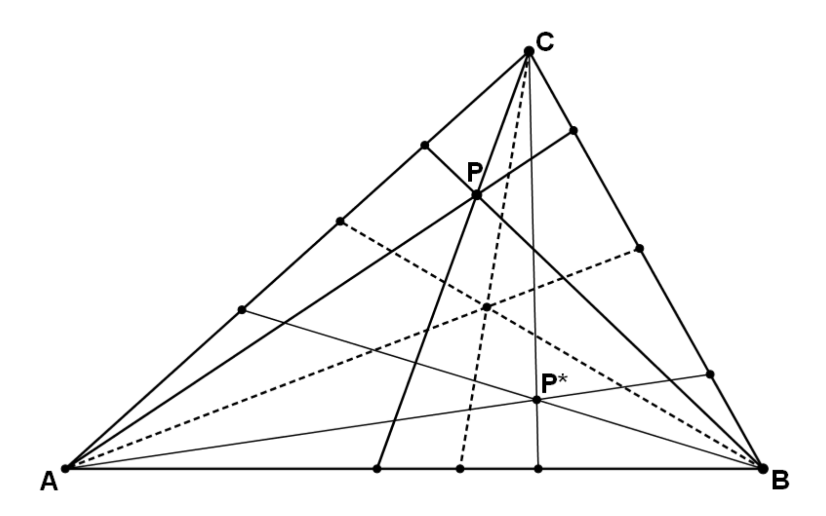
(Extraído de "**Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas. Algunos tópicos**" de Angel Montesdeoca)

20.13 Conjugados isogonales.

20.13.1 Teorema. Conjugado isogonal. Transformación isogonal.
Dado un punto P, las rectas simétricas de sus cevianas, respecto a las bisectrices, se cortan en un punto P*, denominado **conjugado isogonal** de P. Se dice que AP y AP* son **rectas conjugadas isogonales** respecto a AB y AC.

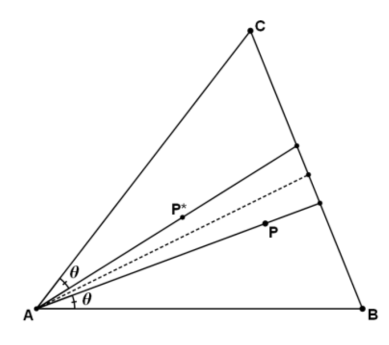
La correspondencia que a un punto P le asocia su conjugado isogonal P* (definida en los puntos del plano, salvo en los lados del triángulo de referencia) se le conoce como **transformación isogonal**, que FGM llama **inversión del Capitán Mathieu** (1865).

$$P = (u : v : w) \to P^* = \left(\frac{a^2}{u} : \frac{b^2}{v} : \frac{c^2}{w} \right)$$



Está claro que el conjugado isogonal de P* es P, y que el incentro es conjugado isogonal de sí mismo. El simediano es un ejemplo de conjugado isogonal pues es el conjugado isogonal del baricentro.

Demostración. Sea $P = (u : v : w)$ un punto cualquiera que no pertenezca a los lados del triángulo de referencia.



La recta AP es: $0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ u & v & w \end{vmatrix} = -wy + vz \Leftrightarrow 0 = wy - vz$

Mediante 20.11.3 determinamos el ángulo θ entre AP y AB:

$$S_\theta = \frac{S_A(p_3 - p_2) - S_B(p_1 - p_3)}{p_1 - p_2} = \frac{S_A(-v-w) - S_B(0+v)}{-w} = \frac{S_A(v+w) + vS_B}{w}$$

La recta AP* determinará un ángulo de $S_{\pi-\theta} = -S_\theta$ respecto de la recta AC, de ecuación $y = 0$, luego aplicando 20.11.4 con $p_1 = p_3 = 0$ y $p_2 = 1$, su punto impropio será:

$$\left(-S_\theta - S_C : b^2 : -(-S_\theta + S_A)\right) = \left(-S_\theta - S_C : b^2 : S_\theta - S_A\right) =$$
$$\left(-\frac{S_A(v+w)+vS_B}{w} - S_C : b^2 : \frac{S_A(v+w)+vS_B}{w} - S_A\right) =$$
$$\left(-(S_A(v+w)+vS_B) - wS_C : b^2 w : S_A(v+w) + vS_B - wS_A\right) =$$
$$\left(-vc^2 - wb^2 : b^2 w : vc^2\right)$$

La recta AP* será:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ -vc^2 - wb^2 & b^2 w & vc^2 \end{vmatrix} = -vc^2 y + b^2 wz \Leftrightarrow c^2 vy - b^2 wz = 0$$

Con un razonamiento similar deducimos las ecuaciones de las otras dos cevianas de P*: $c^2 ux - a^2 wz = 0$, $b^2 ux - a^2 vy = 0$

Que se cortan en el punto $P^* = \left(a^2 vw : b^2 wu : c^2 uv\right) = \left(\frac{a^2}{u} : \frac{b^2}{v} : \frac{c^2}{w}\right)$

20.13.2 Ejercicio.
El ortocentro es el conjugado isogonal del circuncentro

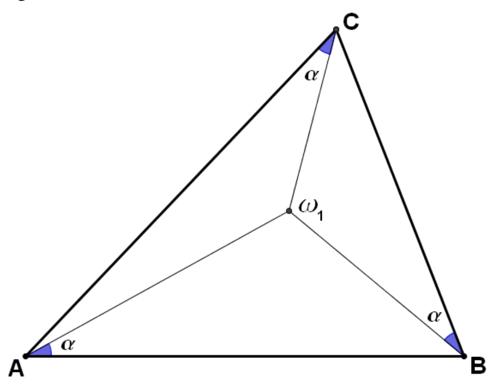
Demostración.

$$C = \left(a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C\right) \rightarrow C^* = \left(\frac{a^2}{a^2 S_A} : \frac{b^2}{b^2 S_B} : \frac{c^2}{c^2 S_C}\right) = \left(\frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C}\right) =$$
$$= \left(S_{BC} : S_{AC} : S_{AB}\right) = O$$

20.14 Los puntos de Brocard con coordenadas baricéntricas.

20.14.1 Proposición. Coordenadas baricéntricas de los Puntos de Brocard

Recordemos (ver 11.9) que el **Primer punto de Brocard** es aquel que satisface $\alpha = \angle QAB \cong \angle QCA \cong \angle QBC$



Sea $qy + rz = 0$ una recta genérica que pasa por A. El ángulo que determina con el lado AB es (20.11.3)

$$\cot\alpha = \frac{S_A(r-q) - S_B(-r)}{S(-q)} = \frac{(q-r)S_A - rS_B}{qS} \Rightarrow S_\beta = \frac{(q-r)S_A - rS_B}{q}$$

Luego aplicando 20.11.4, la recta BQ, que tiene este mismo ángulo α respecto de BC, tendrá como punto impropio:

$$\left(a^2 : -(S_\alpha + S_C) : S_\alpha - S_B\right)$$

Y por lo tanto su ecuación será:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ a^2 & -(S_\alpha + S_C) & S_\alpha - S_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -(S_\alpha + S_C) & S_\alpha - S_B \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & -(S_\alpha + S_C) \end{vmatrix} z \Leftrightarrow$$

$$0 = (S_\alpha - S_B)x - a^2 z$$

Puesto que

$$S_\alpha - S_B = \frac{(q-r)S_A - rS_B}{q} - S_B = \frac{(q-r)S_A - rS_B - qS_B}{q} = \frac{qS_A - rS_A - rS_B - qS_B}{q} =$$

$$= \frac{q(S_A - S_B) - r(S_A + S_B)}{q} = \frac{q(S_A - S_B) - rc^2}{q} = S_A - S_B - \frac{rc^2}{q}$$

La ecuación de BQ es $0 = \left(S_A - S_B - \frac{rc^2}{q}\right)x - a^2 z \Leftrightarrow 0 = \left((S_A - S_B)q - rc^2\right)x - a^2 qz$

De la misma forma, la recta CQ, que tiene este mismo ángulo respecto de AC, tendrá como punto impropio:

$$\left(S_\alpha - S_C : b^2 : -(S_\alpha + S_A)\right)$$

Y por lo tanto su ecuación será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ S_\alpha - S_C & b^2 & -(S_\alpha + S_A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ b^2 & -(S_\alpha + S_A) \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ S_\alpha - S_C & -(S_\alpha + S_A) \end{vmatrix} y =$$

$$= -b^2 x + (S_\alpha - S_C)y \Leftrightarrow 0 = b^2 x + (S_C - S_\alpha)y$$

Simplificamos:

$$S_C - S_\alpha = S_C - \frac{(q-r)S_A - rS_B}{q} = \frac{qS_C - (q-r)S_A + rS_B}{q} = \frac{qS_C - qS_A + rS_A + rS_B}{q} =$$

$$\frac{q(S_C - S_A) + r(S_A + S_B)}{q} = \frac{q(S_C - S_A) + rc^2}{q} = S_C - S_A + \frac{rc^2}{q}$$

Y por lo tanto, la ecuación de CQ es

$$0 = b^2 x + \left(S_C - S_A + \frac{rc^2}{q} \right) y \Leftrightarrow 0 = b^2 q x + \left(rc^2 - q(S_A - S_C) \right) y$$

Estas tres rectas son concurrentes si y sólo si su determinante se anula:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & q & r \\ (S_A - S_B)q - rc^2 & 0 & -a^2 q \\ b^2 q & rc^2 - q(S_A - S_C) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-q\begin{vmatrix} (S_A - S_B)q - rc^2 & -a^2 q \\ b^2 q & 0 \end{vmatrix} + r\begin{vmatrix} (S_A - S_B)q - rc^2 & 0 \\ b^2 q & rc^2 - q(S_A - S_C) \end{vmatrix} =$$

$$-q(a^2 q b^2 q) + r\left((S_A - S_B)q - rc^2\right)\left(rc^2 - q(S_A - S_C)\right)$$

Teniendo en cuenta que $S_A - S_B = (a+b)(b-a)$ y $S_A - S_C = (a+c)(c-a)$, esta expresión se puede escribir como

$$-(a^2 q + c^2 r)(b^2 q^2 + a^2 qr - b^2 qr - c^2 qr + c^2 r^2)$$

Tomando $q = c^2$ y $r = -a^2$ se anula el primer factor y por lo tanto cumple la condición de concurrencia. Así pues:

Recta AQ:

$$c^2 y - a^2 z = 0$$

Recta BQ:

$$0 = \left((S_A - S_B)c^2 + a^2 c^2\right)x - a^2 c^2 z = \left((S_A - S_B) + a^2\right)x - a^2 z =$$

$$\left((a+b)(b-a) + a^2\right)x - a^2 z = \left(b^2 - a^2 + a^2\right)x - a^2 z = b^2 x - a^2 z$$

Recta CQ:

$$b^2 x - c^2 y = 0$$

Que concurren en el **Primer punto de Brocard** (tomando las rectas AQ y BQ):

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & c^2 & -a^2 \\ b^2 & 0 & -a^2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} c^2 & -a^2 \\ 0 & -a^2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 0 & -a^2 \\ b^2 & -a^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & c^2 \\ b^2 & 0 \end{vmatrix} \right) = \left(-a^2c^2 : -a^2b^2 : -b^2c^2 \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} \right) = \omega_1$$

De forma similar llegamos a las coordenadas del **Segundo punto de Brocard**:

$$\omega_2 = \left(\frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} \right)$$

Claramente, el primer punto de Brocard y el segundo punto de Brocard son conjugado isogonales.

$$\omega_1{*} = \left(\frac{a^2}{1/b^2} : \frac{b^2}{1/c^2} : \frac{c^2}{1/a^2} \right) = \left(a^2b^2 : b^2c^2 : c^2a^2 \right) = \left(\frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} \right) = \omega_2$$

El **ángulo de Brocard** α queda determinado por:

$$S_\alpha = \frac{(q-r)S_A - rS_B}{q} = \frac{(c^2+a^2)S_A + a^2S_B}{c^2} = \frac{c^2S_A + a^2(S_A+S_B)}{c^2} = \frac{c^2S_A + a^2c^2}{c^2} \Leftrightarrow$$

$$S_\alpha = S_A + a^2 = S_A + S_B + S_C$$

Observación.

Los puntos de Brocard no son centros de un triángulo del tipo de la ETC; sin embargo, puntos contenidos en la recta que ellos determinan, tales como su punto medio y punto del infinito sí son centros. Estos son los puntos X_{39} y X_{512}.

Problemas propuestos de este tema.

El libro Problemas de Geometría Volumen 3 está dedicado íntegramente a practicar las coordenadas baricéntricas y su aplicación en la resolución de problemas, conceptos que se introducen en este capítulo y de desarrollarán en el siguiente. Es muy importante practicar tanto como se pueda, "jugar con ellos", a medida que éstos se van introduciendo.

Bibliografía de este tema.

En general para todo este capítulo y especialmente para los apartados 20.4, 20.5 y 20.7:
"Coordenadas Baricéntricas" (Francisco J. García Capitán)

Apartado 20.4.3:
"Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas. Algunos tópicos" de Angel Montesdeoca (Página 2)

21 El plano complejo.

21.1 Estructura afín del plano complejo.

21.1.1 Definición. El conjunto de números complejos.
El conjunto de números complejos es $C = IR \times IR$, es decir, el plano cartesiano.
En este conjunto definimos tres elementos notables: $0=(0,0)$, $1=(1,0)$, $i=(0,1)$

El conjunto de números reales se puede entender como un subconjunto de los números complejos mediante **la inmersión canónica**

$$\tau : IR \to C$$
$$x \mapsto (x,0)$$

Los números de la forma $(0,b)$ se llaman **imaginarios puros**.

Como plano cartesiano tenemos definida una suma:

$$\left.\begin{matrix} z_1 = (a,b) \\ z_2 = (c,d) \end{matrix}\right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = \left(a+b, c+d\right)$$

Para la cual el elemento $0=(0,0)$ 0 es elemento neutro,

Y un producto por escalares:

$$\left.\begin{matrix} z = (a,b) \\ \lambda \in IR \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda z = \left(\lambda a, \lambda b\right)$$

Por lo tanto, para el plano complejo heredamos toda la estructura del plano afín IR^2.

21.1.2 Observación. La notación doble: Mayúscula punto y minúscula número.
El plano complejo está formado por puntos que son al mismo tiempo números, pero tradicionalmente se utilizan letras mayúsculas para los puntos y letras minúsculas para los números. Para evitar confusiones denotaremos un mismo elemento del plano complejo utilizaremos mayúsculas cuando estemos en un contexto geométrico y minúsculas en un contexto algebraico, es decir, que Z y z, A y a, B y b, C y c, etc... denotan siempre lo mismo. Por ejemplo, el punto medio C de A y B vendrá dado por

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Aquí nos referimos al punto C (Punto medio: Contexto geométrico, mayúsculas) que es también el número c (Suma y división: Contexto numérico, minúsculas).

21.1.3 Definición. Conjugado de un número complejo.
Dado $z=(a,b)$, se define su conjugado $\bar{z}$ por

$$\bar{z}=(a,-b)$$

Es decir, el conjugado es el simétrico respecto del eje real.

21.1.4 Proposición.
a) z es real si y sólo si $z=\bar{z}$.
b) z es imaginario puro (es decir, z es de la forma $z=(0,b)$) si y sólo si $z=-\bar{z}$.

Demostración.
a) Supongamos que z es real. Entonces $z=(\lambda,0)\Rightarrow \bar{z}=(\lambda,-0)=z$
Sea $z=(a,b)$, y supongamos que $z=\bar{z}$. Entonces
$(a,b)=(a,-b)\Rightarrow b=-b\Rightarrow b=0\Rightarrow b\in IR$.
b) El razonamiento es similar.

21.2.5 Proposición. Propiedades del conjugado.
a) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$
b) $\overline{\lambda z}=\lambda^2\ \bar{z}$

Demostración.
a)

$$\left.\begin{array}{l} z=(z_1,z_2) \\ w=(w_1,w_2)\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{z+w}=\overline{(z_1+w_1,z_2+w_2)}=(z_1+w_1,-(z_2+w_2))=(z_1+w_1,-z_2-w_2)=$$

$$=(z_1,-z_2)+(w_1,-w_2)=\bar{z}+\bar{w}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} z=(z_1,z_2) \\ \lambda\in IR\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{\lambda z}=\overline{(\lambda z_1,\lambda z_2)}=(\lambda z_1,-\lambda z_2)=\lambda^2(z_1,-z_2)=\lambda^2\bar{z}$$

21.2.6 Proposición. División de segmentos.
Dados tres puntos alineados A, B y C del plano complejo,

$$\frac{AC}{CB}=\frac{p}{q}\Leftrightarrow c=\frac{qa+pb}{p+q}$$



Demostración.

$$c=a+\frac{p}{p+q}(b-a)=\frac{(p+q)a+p(b-a)}{p+q}=\frac{pa+qa+pb-pa}{p+q}=\frac{qa+pb}{p+q}$$

21.2 Multiplicación y división de números complejos.

21.2.1 Definición. Producto de números complejos.
Se define el producto de números complejos de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = (a,b) \\ z_2 = (c,d) \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \left(ac - db, ad + bc\right)$$

El $(1,0)$ es elemento neutro respecto del producto:

$$z_1 = (a,b), z_2 = (1,0) \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \left(a1 - 0b, a0 + 1b\right) = \left(a,b\right)$$

21.2.2 Proposición. Las raíces de –1.

$$i^2 = -1$$

Por lo tanto i es una raíz cuadrada de –1. Pero observamos que $-i$ también es otra raíz cuadrada de –1: $(-i)^2 = (0,-1)(0,-1) = (0 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1), 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0) = (1,0) = 1$.
Diremos que i es la **raíz cuadrada principal** de –1.

Demostración. $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1,0) = -1$

21.2.3 Notación. La notación binómica.

$$(a,b) = a + bi$$

Esta notación se llama notación binómica y simplifica mucho las operaciones con números complejos. Por ejemplo, para multiplicar complejos sólo tenemos que utilizar las propiedades asociativa y distributiva y recordar que $i^2 = -1$.

$$\left(a + bi\right) \cdot \left(c + di\right) = a\left(c + di\right) + bi\left(c + di\right) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd =$$
$$= ac - bd + (ad + bc)i$$

Demostración: $(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a1 + bi = a + bi$

21.2.4 Proposición.

$$z = a + bi \Rightarrow z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in IR$$

Demostración. $z = a + bi \Rightarrow z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$

21.2.5 Proposición.

a) $\overline{z\,w} = \bar{z}\,\bar{w}$.
b) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Demostración.

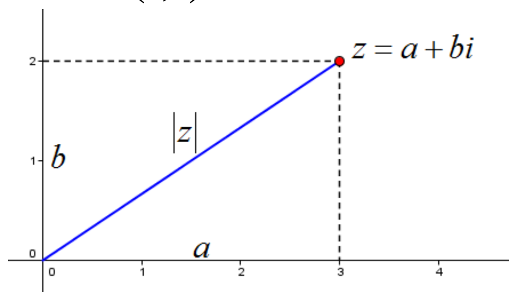
a)
$$\overline{\left(a,b\right) \cdot \left(c,d\right)} = \overline{(ac - bd, ad + bc)} = (ac - bd, -(ad + bc)) = (ac - bd, -ad - bc)$$
$$\overline{\left(a,b\right)} \cdot \overline{\left(c,d\right)} = \left(a,-b\right) \cdot (c,-d) = (ac - (-b)(-d), a(-d) + (-b)c) = (ac - bd, -ad - bc)$$

b) Basta aplicar reiterativamente el apartado a.

21.2.6 Definición. Módulo de un número complejo.
Dado $z = a + bi$, se define su módulo $|z|$ por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in [0,+\infty)$$

Es decir, es la longitud del vector (a,b)



21.2.7 Lema.

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

Demostración: Basta aplicar 21.2.4 a la definición de módulo.

21.2.8 Proposición. El inverso respecto a la división de un número complejo.
El inverso de $z \neq 0$ es $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Demostración.
Se deduce directamente del lema anterior: $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Rightarrow z \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$

21.2.9 Corolario. División de números complejos.

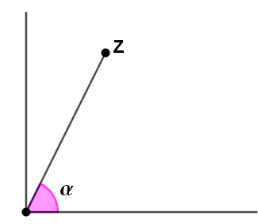
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

En la práctica, multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado del denominador. Por ejemplo:
Queremos expresar $\dfrac{-1+3i}{2+5i}$ de la forma $a+bi$. Multiplicaremos numerador y denominador por $2-5i$: $\dfrac{-1+3i}{2+5i} = \dfrac{(-1+3i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \dfrac{13+11i}{2^2+5^2} = \dfrac{13}{29} + \dfrac{11}{29}i$

Demostración. $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \dfrac{1}{z_2} = z_1 \dfrac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}$

21.3 Ángulos con números complejos. Argumento.

21.3.1 Definición. Argumento de un número complejo.
Todo número complejo $z = a + bi$ tiene asociado un ángulo σ entre 0 y 2π (o entre 0 y 360). A este ángulo le llamaremos **argumento** de z, $Arg(z)$:



Este ángulo se determina mediante la función arcotangente. pero se debe tener en cuenta el cuadrante en el que está el número para evitar las cancelaciones de signo entre numerador y denominador:

$$\alpha = Arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \in [0,2\pi)$$

21.3.2 Proposición.
a) $Arg(z \cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$
b) $Arg(z^n) = n\,Arg(z)$
c) $Arg\left(\frac{z}{w}\right) = Arg(z) - Arg(w)$

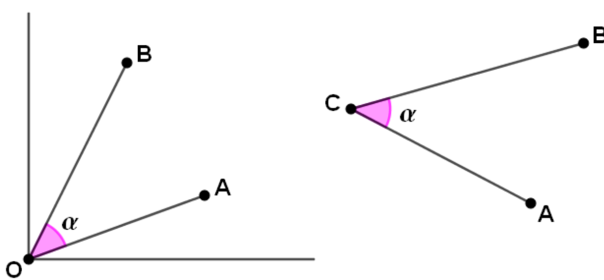
Demostración.

21.3.3 Proposición. Ángulo entre dos puntos.
a) Dados $a, b \in C$, el ángulo que determinan respecto al origen $O = 0$ viene dado por la fórmula

$$\angle BOA = Arg\left(\frac{b}{a}\right)$$

b) En general, para cualquier vértice C:

$$\angle ACB = Arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)$$



Demostración.
a) $\angle BOA = Arg(b) - Arg(a) = Arg\left(\frac{b}{a}\right)$ por 21.3.2c
b) Basta realizar una traslación de vector $-c$ para mover el vértice del ángulo hasta el origen O.

21.3.4 Proposición.

a) $Arg(z) = Arg(w) \Leftrightarrow \frac{z}{w} \in IR^{+}$

b) Suponiendo $Arg(z) < \pi$ y $Arg(w) < \pi$,

$$Arg(z) = Arg(w) \Leftrightarrow \frac{z}{w} \in IR \Leftrightarrow \frac{z}{w} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

Demostración.

$$Arg(z) = Arg(w) \Leftrightarrow Arg(z) - Arg(w) = 0 \Leftrightarrow Arg\left(\frac{z}{w}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{z}{w} \in IR \Leftrightarrow \frac{z}{w} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

21.4 Notación polar y notación exponencial.

21.4.1 Definición. La circunferencia unidad.

La circunferencia unidad es aquella que tiene centro 0 y radio 1, es decir, la que está formada por todos los números complejos z tales que $|z| = 1$.

$$c(0,1) = \{ z \in C, |z| = 1 \}$$

Todo número complejo que pertenezca a la circunferencia unidad se puede escribir de forma única como

$$z = (\cos\alpha, \sin\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha \text{ para cierto } \alpha \in [0,2\pi) \text{ único}$$

Este número se denota también como $e^{i\alpha}$.

En particular, se deduce la llamada "**fórmula de Euler**": $e^{\pi i} - 1 = 0$
que recoge en una bonita expresión los cinco números más importantes de las matemáticas. Efectivamente, por la definición anterior, $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = 1 + i \cdot 0 = 1$.

21.4.2 Proposición. Notación polar y notación exponencial.

Todo número complejo $z \neq 0$ se puede expresar de forma única como

$$z = \lambda(\cos\alpha, \sin\alpha) = \lambda(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \lambda e^{i\alpha}$$

para ciertos $\lambda \in (0,+\infty)$ y $\alpha \in [0,2\pi)$ únicos.

La expresión $\lambda(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ se denomina **notación polar o trigonométrica**, y la expresión $\lambda e^{i\alpha}$ se denomina **notación exponencial** del número complejo z.

El paso de notación polar o exponencial a notación binómica $z = a + bi$ se realiza mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{cases} a = \lambda\cos\alpha \\ b = \lambda\sin\alpha \end{cases}$$

Y el paso de notación binómica a notación polar o exponencial se realiza mediante las siguientes fórmulas:

$$\lambda = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\alpha = Arg(z)$$

21.4.3 Proposición.
Si $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$, entonces $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$

y por tanto $|z_1 z_2| = r_1 r_2$ y $Arg(z_1 z_2) = \alpha_1 + \alpha_2 \pmod{360}$

21.4.4 Proposición. Raíces de la unidad.
Se llama raíz enésima de la unidad a cualquiera de los números complejos que satisfacen la ecuación $z^n = 1$, con $n \in IN$.

Para cada n, las n diferentes raíces n-ésimas de la unidad son:

$$\left\{ e^{2\pi i k/n},\ k = 0,1,2,\ldots,n-1 \right\}$$

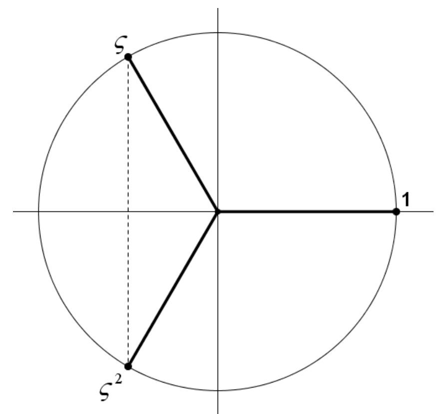
Entre las raíces enésimas de la unidad siempre está el número 1, el número -1 solo está cuando n es par y los números i y –i cuando n es múltiplo de cuatro. Las raíces enésimas de la unidad no reales se presentan en pares de conjuntos.

21.4.5 Proposición. Raíces segundas de la unidad.
Las raíces segundas o cuadradas de la unidad son +1 y -1.

$$\left\{ 1\,,\ \varsigma = e^{2i\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\,,\ \varsigma^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

21.4.6 Proposición. Raíces terceras de la unidad.
Las raíces terceras o cúbicas de la unidad son

$$\left\{ 1\,,\ \varsigma = e^{2i\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\,,\ \varsigma^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right\}$$



Se cumple $\varsigma^2 = \bar{\varsigma}$, $\overline{\varsigma^2} = \varsigma$ y $\varsigma^2 + \varsigma = -1$

Problema propuesto: Problema #35 de **[Prob4]**.

21.5 Las transformaciones elementales del plano complejo.

21.5.1 Proposición. Conjugación.
La función conjugación

$$z \mapsto \bar{z}$$

Es la simetría respecto del eje real.

Demostración.

21.5.2 Proposición. Traslación.
Dado un número complejo w, la función

$$z \mapsto z + w$$

Es la traslación a lo largo de w entendido como vector de IR^2

Demostración.

21.5.3 Proposición. Simetría central.
La función

$$z \mapsto -z$$

Es la simetría central respecto al origen.

Demostración.

21.5.4 Proposición. Homotecia.
Dado un número real λ, la función

$$z \mapsto \lambda z$$

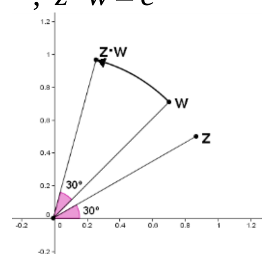
Es la homotecia de razón λ centrada en el origen.

Demostración.

21.5.5 Proposición. Rotación.
Dado un ángulo α, la función

$$z \mapsto e^{i\alpha} z$$

Es la rotación de ángulo α centrada en el origen y en el sentido antihorario.
Por ejemplo, si $z = e^{i\pi/6}$ y $w = e^{i\pi/4}$, $z \cdot w = e^{i5\pi/12}$



En particular, multiplicar por i es equivalente a una rotación de 90º alrededor del origen y en el sentido contrario al del reloj, pues $i = e^{i\pi/2}$

Demostración.

Problema propuesto: Problema #46 de **[Prob4]**.

21.5.6 Proposición. Semejanza espiral.
Dado un número complejo $b \neq 0$, la función

$$z \mapsto bw$$

Es la composición de una rotación y de una homotecia alrededor del origen, y se denomina "**semejanza espiral**" alrededor del origen.

Dados dos números complejos a y b, con $b \neq 0$, la función

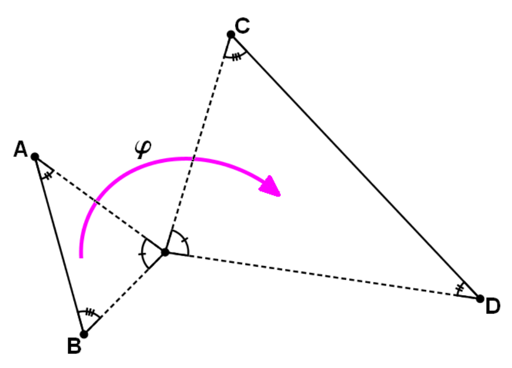
$$z \mapsto b(z-a)+a$$

es una **semejanza espiral alrededor del punto a**.

Demostración. Basta escribir el número b en forma exponencial: $b = \lambda e^{i\alpha}$.

Problema propuesto: Problema #33 de **[Prob4]**.

21.5.7 Proposición. Existencia i unicidad de las semejanzas espirales.
Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que no formen un paralelogramo, existe una única semejanza espiral φ que envía $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$.



Demostración. Sabemos que la función buscada será de la forma $\varphi(z) = p(z-q)+q$ para ciertos complejos p y q. Nuestro problema se reduce a solucionar el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas

$$\begin{cases} \varphi(a) = p(a-q)+q = c \\ \varphi(b) = p(b-q)+q = d \end{cases}$$

$$c-d = p(a-q)+q-p(b-q)-q = p(a-q-b+q) = p(a-b) \Rightarrow p = \frac{c-d}{a-b},$$

Que está bien definido pues $a \neq b$.

$$p(a-q)+q = c \Rightarrow \frac{c-d}{a-b}(a-q)+q = c \Rightarrow (c-d)(a-q)+(a-b)q = (a-b)c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ca-cq-da+dq+aq-bq = ac-bc \Rightarrow q(-c+d+a-b) = -bc+da \Rightarrow$$

$$q = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}$$

Que está bien definido pues $a + d - b - c \neq 0$ puesto que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son paralelos y congruentes (ABCD paralelogramo $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow b - a = d - c \Leftrightarrow 0 = a + d - b - c$)
Así pues, el sistema tiene solución y es única, es decir, existe una única semejanza espiral que envía $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$.

21.5.8 Proposición. Simetría respecto de una recta.
Dados dos números complejos a y b, la función

$$z \mapsto \frac{(a-b)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}}$$

Es la simetría respeto de la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

Demostración.

21.5.9 Proposición. Proyección perpendicular sobre una recta.
Dados dos números complejos a y b, la función

$$z \mapsto \frac{(\bar{a} - \bar{b})z + (a-b)\bar{z} + \bar{a}b + a\bar{b}}{2(\bar{a} - \bar{b})}$$

Es la proyección perpendicular sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

Demostración. Aplicamos 21.5.8 y tenemos en cuenta que la proyección perpendicular será el punto medio entre z y su simétrico respecto a la recta:

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{(a-b)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} + z\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(a-b)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b} + (\bar{a} - \bar{b})z}{\bar{a} - \bar{b}}\right)$$

21.5.10 Teorema. Inversión.
La función

$$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

es la inversión asociada a la circunferencia unidad: $\{z, |z| = 1\}$.

Demostración. Sabemos que $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, luego $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2} z$

Que es un número que pertenece a la semirrecta $\overrightarrow{OZ}$ y que cumple

$$|OZ| \cdot |OZ'| = |z| \left| \frac{1}{|z|^2} z \right| = \frac{|z||z|}{|z|^2} = 1 = r^2$$

Luego cumple las condiciones impuestas para ser el inverso de z.

21.6 Paralelismo, colinealidad, rectas.

21.6.1 Proposición. Paralelismo.
Dados cuatro puntos A, B, C, D, con $A \neq B$ y $C \neq D$, son equivalentes:
a) $AB // CD$.
b) $\dfrac{b-a}{d-c} \in IR$
c) $\dfrac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} = \dfrac{d-c}{\bar{d}-\bar{c}}$

Demostración. $ab // cd \Leftrightarrow b-a = \lambda(d-c)$ con $\lambda \in IR$

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{d-c} \in IR \Leftrightarrow \frac{b-a}{d-c} = \overline{\left(\frac{b-a}{d-c}\right)} = \frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{d}-\bar{c}} \Leftrightarrow \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} = \frac{d-c}{\bar{d}-\bar{c}}$$

21.6.2 Proposición. Colinealidad.
Dados tres puntos A, B, C, son equivalentes:
a) A, B y C están alineados.
b) $\dfrac{c-a}{b-a} \in IR$
c) $\dfrac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} = \dfrac{c-a}{\bar{c}-\bar{a}}$

Demostración. Los puntos A, B y C están alineados sí y sólo si

$$c = a + \lambda(b-a) \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = \lambda \in IR \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{c-a}{b-a}\right)} = \frac{\bar{c}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} \Leftrightarrow \frac{c-a}{\bar{c}-\bar{a}} = \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}$$

21.6.3 Proposición. Rectas en el plano complejo.
La recta que pasa por los puntos A y B tiene por ecuación

$$\frac{z-a}{b-a} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$$

Demostración. $Z \in AB \Leftrightarrow z = a + \lambda(b-a)$, con $\lambda \in IR$

$$\Leftrightarrow z-a = \lambda(b-a) \Leftrightarrow \frac{z-a}{b-a} = \lambda \in IR \Leftrightarrow \frac{z-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$$

Aplicando el lema anterior y las propiedades del conjugado.

21.7 Producto real. Perpendicularidad.

21.7.1 Definición. Producto real de dos números complejos.
Dados dos números complejos z y w, definimos su **producto real** como

$$z \bullet w = \frac{\bar{z}w + z\bar{w}}{2}$$

Observamos que $z \bullet w = \overline{z \bullet w}$ y por tanto el producto real de dos complejos es un número real. En efecto: $\overline{z \bullet w} = \overline{\left(\frac{\bar{z}w + z\bar{w}}{2}\right)} = \frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2} = z \bullet w$

21.7.2 Proposición.
El producto real de dos números complejos es el producto escalar habitual de vectores en IR^2:

$$\left.\begin{array}{l} z = z_1 + z_2 i \\ w = w_1 + w_2 i \end{array}\right\} \Rightarrow z \bullet w = z_1 w_1 + z_2 w_2$$

Demostración.
Sean $z = z_1 + z_2 i$ y $w = w_1 + w_2 i$. Entonces

$$2(z \bullet w) = \bar{z}w + z\bar{w} = \overline{(z_1 + z_2 i)}(w_1 + w_2 i) + (z_1 + z_2 i)\overline{(w_1 + w_2 i)} =$$
$$= (z_1 - z_2 i)(w_1 + w_2 i) + (z_1 + z_2 i)(w_1 - w_2 i) =$$
$$= z_1 w_1 + z_2 w_2 + (z_1 w_2 - z_2 w_1)i + z_1 w_1 + z_2 w_2 + (z_2 w_1 - z_1 w_2)i =$$
$$= 2z_1 w_1 + 2z_2 w_2 + (z_1 w_2 - z_2 w_1 + z_2 w_1 - z_1 w_2)i = 2(z_1 w_1 + z_2 w_2)$$

21.7.3 Proposición. Interpretación geométrica del producto real.
Sean z y w dos números complejos y θ el ángulo que determinan, es decir, el ángulo entre $\overrightarrow{OZ}$ y $\overrightarrow{OW}$. Entonces

$$z \bullet w = |z||w|\cos(\theta)$$

Demostración.
Pasando a forma polar y aplicando 21.7.2 y 9.3.1e

$$\left.\begin{array}{l} z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ w = s(\cos\beta + i\sin\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow z \bullet w = r\cos\alpha \cdot s\cos\beta + r\sin\alpha \cdot s\sin\beta =$$
$$= rs(\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta) = rs\cos(\beta - \alpha) = |z||w|\cos(\theta)$$

21.7.4 Proposición. Propiedades del producto real.
Dados cuatro números complejos a, b, c y z, se cumple:

a) $a \bullet a = |a|^2$

b) $a \bullet b = b \bullet a$ (propiedad conmutativa)

c) $a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c$ (propiedad distributiva respecto a la suma)

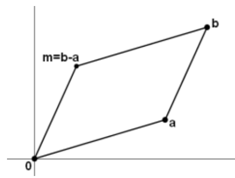
d) $(\lambda a) \bullet b = a \bullet (\lambda b) = \lambda (a \bullet b)$ para todo $\lambda \in IR$.

e) $a \bullet b = 0 \Leftrightarrow OA \perp OB$.

f) $(az) \bullet (bz) = |z|^2 (a \bullet b)$

Demostración. e) Se deduce directamente de 21.7.3

21.7.5 Lema.
Dados dos números complejos a y b, sea $m = b - a$. Entonces $OABM$ es un paralelogramo.



Demostración. Sus lados opuestos son congruentes. En efecto,
$\overline{AB} = |b-a| = |m| = |m-0| = \overline{OM}$ y $\overline{MB} = |b-m| = |b-(b-a)| = |a| = |a-0| = \overline{OA}$.

21.7.6 Proposición. Criterio de perpendicularidad para dos segmentos.
Dados cuatro números complejos a, b, c y d, son equivalentes

a) $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

b) $(b-a) \bullet (d-c) = 0$

c) $\dfrac{b-a}{d-c} \in iIR$, es decir, es imaginario puro.

d) $\dfrac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} = -\dfrac{d-c}{\bar{d}-\bar{c}}$

e) $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

Demostración. $a \Leftrightarrow b)$ Sean $m = b-a$ y $n = d-c$. Aplicando el lema anterior, los cuadriláteros $OABM$ y $OCDN$ serán paralelogramos, y por tanto

$$\overline{AB} \perp \overline{CD} \Leftrightarrow OM \perp ON \Leftrightarrow m \bullet n = 0 \Leftrightarrow (b-a) \bullet (d-c) = 0$$

$b \Leftrightarrow c)$ $\quad 0 = (b-a) \bullet (d-c) = (1/2)\left[\overline{(b-a)}(d-c) + (b-a)\overline{(d-c)}\right] \Leftrightarrow$

$$\overline{(b-a)}(d-c) = -(b-a)\overline{(d-c)} \Leftrightarrow \frac{b-a}{d-c} = -\frac{\overline{(b-a)}}{\overline{(d-c)}} = -\overline{\left(\frac{b-a}{d-c}\right)} \Leftrightarrow \frac{b-a}{d-c} \in iIR$$

$c \Leftrightarrow d)$ Por 21.1.4b sabemos que $\dfrac{b-a}{d-c}$ es imaginario puro $\Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{b-a}{d-c}\right)} = -\dfrac{b-a}{d-c}$

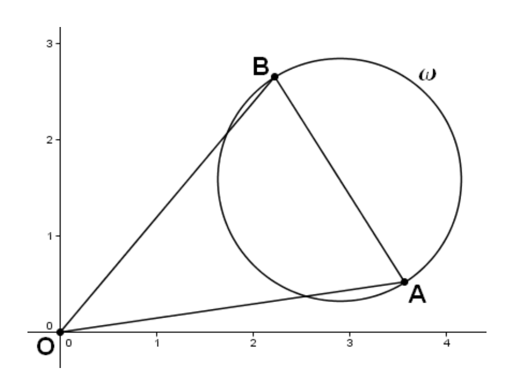
$$\Leftrightarrow \frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{d}-\bar{c}} = -\frac{b-a}{d-c} \Leftrightarrow \frac{d-c}{\bar{d}-\bar{c}} = -\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}$$

e) Es el apartado a del problema #26 de **[Prob4]**.

Problemas propuestos: #26, #27, #28 y #29 de **[Prob4]**.

21.7.7 Proposición. El producto real como potencia del origen.

El producto real de dos números complejos a y b es la potencia del origen O respecto de la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$.



Demostración.

Sean a y b dos números complejos y sea ϖ la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$. Su centro será el punto medio $M = \dfrac{a+b}{2}$ y su radio será $r = \left|\dfrac{a-b}{2}\right|$, luego

$$p(O,\varpi) = OM^2 - r^2 = \left|\frac{a+b}{2}\right|^2 - \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}\left(|a+b|^2 - |a-b|^2\right)$$

Ahora utilizamos la igualdad $|z|^2 = z \bullet z$

$$\begin{aligned}
&|a+b|^2 - |a-b|^2 = (a+b)\bullet(a+b) - (a-b)\bullet(a-b) \\
&= a\bullet(a+b) + b\bullet(a+b) - a\bullet(a-b) + b\bullet(a-b) \\
&= a\bullet a + a\bullet b + b\bullet a + b\bullet b - a\bullet a + a\bullet b + b\bullet a - b\bullet b \\
&= 4a\bullet b
\end{aligned}$$

Una forma alternativa de llegar al mismo resultado es mediante la igualdad $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$, en efecto:

$$\begin{aligned}
&|a+b|^2 - |a-b|^2 = (a+b)\overline{(a+b)} - (a-b)\overline{(a-b)} = \\
&= (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) - (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = \\
&= (a)(\bar{a}+\bar{b}) + b(\bar{a}+\bar{b}) - (a)(\bar{a}-\bar{b}) + b(\bar{a}-\bar{b}) = \\
&= a\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{b} - a\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a} - b\bar{b} = \\
&= 2a\bar{b} + 2b\bar{a} = 2(a\bar{b} + b\bar{a}) = 4\left(\frac{a\bar{b}+b\bar{a}}{2}\right) = 4a\cdot b
\end{aligned}$$

En todo caso llegamos a $p(O,\varpi) = \dfrac{1}{4}4a\bullet b = a\bullet b$

21.8 Producto complejo. Área.

21.8.1 Definición. Producto complejo de dos números complejos.

Dados dos números complejos z y w, definimos su **producto complejo** como

$$z \times w = \frac{\bar{z}w - z\bar{w}}{2}$$

Observamos que

$$z \times w + \overline{z \times w} = \frac{\bar{z}w - z\bar{w}}{2} + \frac{z\bar{w} - \bar{z}w}{2} = \frac{\bar{z}w - z\bar{w} + z\bar{w} - \bar{z}w}{2} = 0 \Rightarrow \overline{z \times w} = -(z \times w)$$

y por tanto $z \times w$ es un número imaginario puro.

21.8.2 Proposición. Relación entre producto real y producto complejo.

$$|a \bullet b|^2 + |a \times b|^2 = |a|^2 \cdot |b|^2$$

Demostración.

$$|a \bullet b|^2 + |a \times b|^2 = \left|\frac{\bar{a}b + a\bar{b}}{2}\right|^2 + \left|\frac{\bar{a}b - a\bar{b}}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}\left(|\bar{a}b + a\bar{b}|^2 + |\bar{a}b - a\bar{b}|^2\right)$$

$$|\bar{a}b + a\bar{b}|^2 + |\bar{a}b - a\bar{b}|^2 = (\bar{a}b + a\bar{b})\left(\overline{\bar{a}b + a\bar{b}}\right) + (\bar{a}b - a\bar{b})\left(\overline{\bar{a}b - a\bar{b}}\right) =$$

$$= (\bar{a}b + a\bar{b})(a\bar{b} + \bar{a}b) + (\bar{a}b - a\bar{b})(a\bar{b} - \bar{a}b) =$$

$$= \bar{a}b(a\bar{b} + \bar{a}b) + a\bar{b}(a\bar{b} + \bar{a}b) + \bar{a}b(a\bar{b} - \bar{a}b) - a\bar{b}(a\bar{b} - \bar{a}b) =$$

$$= \bar{a}ba\bar{b} + \bar{a}b\bar{a}b + a\bar{b}a\bar{b} + a\bar{b}\bar{a}b + \bar{a}ba\bar{b} - \bar{a}b\bar{a}b - a\bar{b}a\bar{b} + a\bar{b}\bar{a}b =$$

$$= 2\bar{a}ba\bar{b} + 2a\bar{b}\bar{a}b = 4(\bar{a}ab\bar{b}) = 4|a|^2 \cdot |b|^2$$

21.8.3 Proposición. Propiedades del producto complejo.

Dados cuatro números complejos a, b, c y z, se cumple:

a) $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ o $b = 0$ o $a = \lambda b$, con $\lambda \in IR$.

b) $a \times b = -b \times a$ (propiedad anticonmutativa)

c) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (propiedad distributiva respecto a la suma)

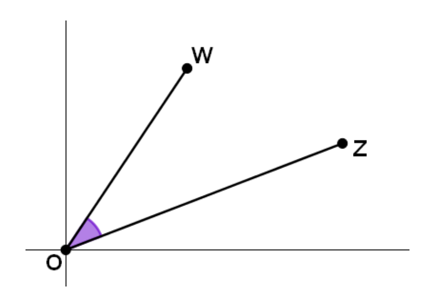
d) $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$ para todo $\lambda \in IR$.

Demostración.

21.8.4 Proposición. Interpretación geométrica del producto complejo.
Sean z y w dos números complejos y θ el ángulo que determinan, es decir, el ángulo entre $\overrightarrow{OZ}$ y $\overrightarrow{OW}$. Entonces

$$z \times w = \varepsilon\, i |z||w| \sin(\theta)$$

$$\text{Con } \varepsilon = \begin{cases} +1 \text{ si } \angle ZOW \text{ es positivo, es decir, } \arg(w) > \arg(z) \\ -1 \text{ si } \angle ZOW \text{ es negativo, es decir, } \arg(w) < \arg(z) \end{cases}$$



Demostración.
Pasando a forma polar:

$$\left.\begin{array}{l} z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ w = s(\cos\beta + i\sin\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow z \times w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \times s(\cos\beta + i\sin\beta) =$$

$$= (r\cos\alpha + ir\sin\alpha) \times (s\cos\beta + ir\sin\beta) =$$

$$= \frac{(r\cos\alpha - ir\sin\alpha)(s\cos\beta + ir\sin\beta) - (r\cos\alpha + ir\sin\alpha)(s\cos\beta - ir\sin\beta)}{2}$$

$$(r\cos\alpha - ir\sin\alpha)(s\cos\beta + is\sin\beta) =$$
$$= r\cos\alpha(s\cos\beta + is\sin\beta) - ir\sin\alpha(s\cos\beta + is\sin\beta) =$$
$$= r\cos\alpha s\cos\beta + irs\sin\beta\cos\alpha - ir\sin\alpha\, s\cos\beta - irs\sin\alpha\, i\sin\beta =$$
$$= rs\cos\alpha\cos\beta + irs\sin\beta\cos\alpha - irs\sin\alpha\cos\beta + rs\sin\alpha\sin\beta =$$
$$= rs\cos\alpha\cos\beta + rs\sin\alpha\sin\beta + (rs\sin\beta\cos\alpha - rs\sin\alpha\cos\beta)i$$

$$(r\cos\alpha + ir\sin\alpha)(s\cos\beta - is\sin\beta) =$$
$$= r\cos\alpha(s\cos\beta - is\sin\beta) + ir\sin\alpha(s\cos\beta - is\sin\beta) =$$
$$= r\cos\alpha s\cos\beta - irs\sin\beta\cos\alpha + irs\sin\alpha\cos\beta - irs\sin\alpha\, i\sin\beta =$$
$$= rs\cos\alpha\cos\beta - irs\sin\beta\cos\alpha + irs\sin\alpha\cos\beta + rs\sin\alpha\sin\beta =$$
$$= rs\cos\alpha\cos\beta + rs\sin\alpha\sin\beta + (rs\sin\alpha\cos\beta - rs\sin\beta\cos\alpha)i$$

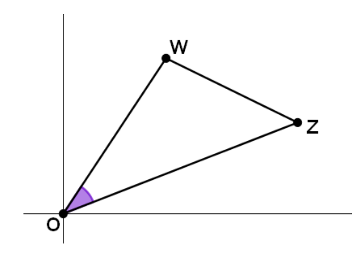
$$\operatorname{Re}\big(2(z \times w)\big) = rs\cos\alpha\cos\beta + rs\sin\alpha\sin\beta - \big(rs\cos\alpha\cos\beta + rs\sin\alpha\sin\beta)\big) = 0$$

$$\operatorname{Im}\big(2(z \times w)\big) = rs\sin\beta\cos\alpha - rs\sin\alpha\cos\beta - \big(rs\sin\alpha\cos\beta - rs\sin\beta\cos\alpha\big) =$$
$$= rs\sin\beta\cos\alpha - rs\sin\alpha\cos\beta - rs\sin\alpha\cos\beta + rs\sin\beta\cos\alpha =$$
$$= 2rs\big(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta\big) = 2rs\sin(\beta - \alpha) \quad (\text{suponiendo } \beta > \alpha)$$
$$\Rightarrow \operatorname{Im}\big(z \times w\big) = rs\sin(\beta - \alpha) \quad (\text{suponiendo } \beta > \alpha)$$

Donde hemos aplicado 9.3.1d.

21.8.5 Corolario. Producto complejo y área.
Sean z y w dos números complejos y θ el ángulo que determinan, es decir, el ángulo entre $\overrightarrow{OZ}$ y $\overrightarrow{OW}$. Entonces

$$z \times w = 2i\,\varepsilon[\Delta ZOW] \quad \text{con } \varepsilon = \begin{cases} +1 \text{ si } \angle\text{ZOW es positivo} \\ -1 \text{ si } \angle\text{ZOW es negativo} \end{cases}$$



Demostración. Basta aplicar 9.2.1 a la proposición anterior.

21.8.6 Corolario. Producto complejo y puntos alineados.
Sean z y w dos números complejos distintos.

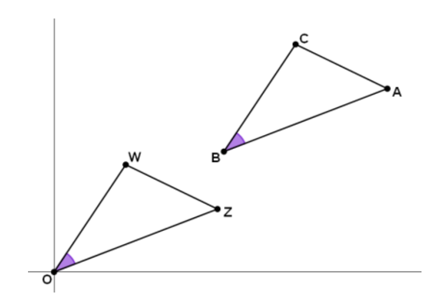
$$z \times w = 0 \Leftrightarrow \text{Z, W y O están alineados.}$$

Demostración. Basta aplicar el corolario anterior teniendo en cuenta que $[\Delta ZOW] = 0 \Leftrightarrow$ Z, W y O están alineados

21.8.7 Proposición. Área de un triángulo mediante números complejos.
Si a, b, c son tres números complejos, el área del triángulo ΔABC viene dado por

$$[\Delta ABC] = \frac{\varepsilon}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a) \quad \text{con} \quad \varepsilon = \begin{cases} -1 \text{ si } \angle ABC \text{ es positivo} \\ +1 \text{ si } \angle ABC \text{ es negativo} \end{cases}$$

Demostración. Mediante una traslación de vector –b trasladamos el triángulo ΔABC a ΔZOW donde $z = a - b$, $O = 0 = b - b$ y $w = c - b$, y aplicamos 21.8.5



$$[\Delta ABC] = [\Delta ZOW] = \frac{1}{2i\varepsilon}(z \times w) \quad \text{con } \varepsilon = \begin{cases} +1 \text{ si } \angle\text{ZOW es positivo} \\ -1 \text{ si } \angle\text{ZOW es negativo} \end{cases}$$

$$z \times w = (a-b) \times (c-b) = a \times (c-b) - b \times (c-b) =$$
$$= a \times c - a \times b - b \times c + b \times b = -c \times a - a \times b - b \times c = -(c \times a + a \times b + b \times c)$$

Donde hemos utilizado que $b \times b = 0$ y $a \times c = -c \times a$

Luego $[\Delta ABC] = \dfrac{-\varepsilon}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a)$

21.8.8 Proposición. Criterio de alineación de puntos mediante producto complejo.
Dados tres números complejos distintos a, b, c, son equivalentes:

a) A, B y C están alineados.
b) $a \times b + b \times c + c \times a = 0$
c) $(b-a) \times (c-a) = 0$

Demostración. $a \Leftrightarrow b)$ A, B y C están alineados

$$\Leftrightarrow 0 = [\Delta ABC] = \frac{\varepsilon}{2i}\left(a \times b + b \times c + c \times a\right) \Leftrightarrow a \times b + b \times c + c \times a = 0$$

$b \Leftrightarrow c)$

$$(b-a) \times (c-a) = (b \times c - b \times a) - (a \times c - a \times a) =$$
$$= b \times c - b \times a - a \times c + a \times a = b \times c + a \times b + c \times a$$

Problema propuesto: Problema #30 de **[Prob4]**.

21.8.9 Proposición. Paralelismo de segmentos y producto complejo.
Dados cuatro números complejos a, b, c, d, no tres de ellos colineales,

$$AB \,//\, CD \Leftrightarrow (b-a) \times (d-c) = 0$$

Demostración.

Problema propuesto: Problema #31 de **[Prob4]**.

Corolario. Área de un triángulo mediante números complejos.
Si a, b, c son tres números complejos, el área del triángulo ΔABC viene dado por

$$[\Delta ABC] = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a\right)$$

Proposición. Área de un triángulo mediante números complejos.
Si a, b, c son tres números complejos, el área con signo del triángulo ΔABC viene dada por

$$\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}$$

De donde se deduce un segundo criterio de colinealidad:

Tres números complejos a, b, c están alineados si y sólo si $\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$

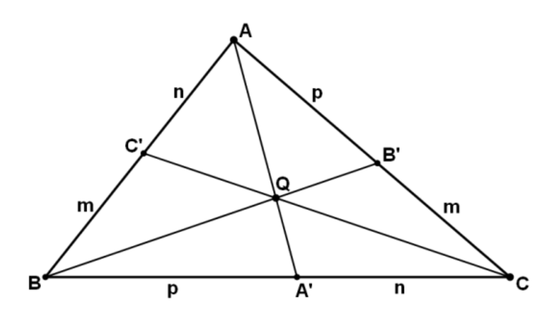
21.9 Cevianas y centros con números complejos.

21.9.1 Proposición. Intersección de cevianas.
Supongamos que el punto Q es el punto de intersección de las cevianas AA', BB' y CC' del triángulo ΔABC, y supongamos que se cumple

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{p}{n}\ ,\ \frac{CB'}{B'A}=\frac{m}{p}\ ,\ \frac{A'C}{C'B}=\frac{n}{m}$$

Entonces

$$q=\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}$$



Demostración.

Aplicando 21.2.6, tenemos que $a'=\dfrac{nb+pc}{n+p}$, $b'=\dfrac{ma+pc}{m+p}$, y $c'=\dfrac{ma+nb}{m+n}$.

Sea Q el punto determinado por $q=\dfrac{ma+nb+pc}{m+n+p}$. Veamos que dicho punto es, en efecto, la intersección de las cevianas definidas en el enunciado.
Los puntos A, Q y A' son colineales. En efecto, aplicamos 21.8.8c:

$$0=(q-a)\times(a'-a)=\left(\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}-a\right)\times\left(\frac{nb+pc}{n+p}-a\right)=$$

$$=\left(\frac{ma+nb+pc-(m+n+p)a}{m+n+p}\right)\times\left(\frac{nb+pc-(n+p)a}{n+p}\right)=$$

$$=\left(\frac{nb+pc-na-pa}{m+n+p}\right)\times\left(\frac{nb+pc-na-pa}{n+p}\right)=$$

$$=\left(\frac{n(b-a)+p(c-a)}{m+n+p}\right)\times\left(\frac{n(b-a)+p(c-a)}{n+p}\right)=$$

$$=\frac{1}{(m+n+p)(n+p)}\big(n(b-a)+p(c-a)\big)\times\big(n(b-a)+p(c-a)\big)=0$$

De la misma forma se demuestra que Q pertenece a BB' y CC', y por tanto es el punto de intersección de estas tres cevianas.

21.9.2 Corolario.

a) El baricentro G de un triángulo ΔABC es

$$G = \frac{a+b+c}{3}$$

Demostración.

a) Basta aplicar 11.5.2 pues $n = m = p = 1$

21.10 La circunferencia unidad.

21.10.1 Proposición.

Para todo z perteneciente a la circunferencia unidad $|z| = 1$, se cumple $\bar{z} = \frac{1}{z}$

Demostración. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{1} = \bar{z}$.

21.10.2 Proposición.

Si $a, b \in c(0,1)$, $a \neq b$, la recta $\overleftrightarrow{AB}$ tiene por ecuación

$$z + ab\bar{z} = a + b$$

Demostración. Aplicando 21.6.3, $z \in \overleftrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{z-a}{b-a} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$

Pero $a, b \in c(0,1) \Rightarrow \bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}$ por 21.6.2, luego

$$z \in \overleftrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{z-a}{b-a} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} = \frac{\bar{z}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{ab\left(\bar{z}-\frac{1}{a}\right)}{ab\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)} = \frac{ab\bar{z}-b}{a-b} = \frac{b-ab\bar{z}}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow z - a = b - ab\bar{z} \Leftrightarrow z + ab\bar{z} = a + b$$

21.10.3 Proposición.

Si $a, b \in c(0,1)$, $a \neq b$, las rectas paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$ tienen por ecuación

$$z + ab\bar{z} = k, \text{ con } k \in C$$

Demostración. Sea s la recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por un punto C.

$$z \in s \Leftrightarrow z = c + \lambda(b-a) \Leftrightarrow \frac{z-c}{b-a} \in IR \Leftrightarrow \frac{z-c}{b-a} = \overline{\left(\frac{z-c}{b-a}\right)} = \frac{\bar{z}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{a}}$$

Pero $a, b \in c(0,1) \Rightarrow \bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}$, luego

$$z \in r \Leftrightarrow \frac{z-c}{b-a} = \frac{\bar{z}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{a}} = \frac{\bar{z}-\bar{c}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = ab\left(\frac{\bar{z}-\bar{c}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}\right) = \frac{ab\bar{z}-ab\bar{c}}{a-b} = \frac{ab\bar{c}-ab\bar{z}}{b-a} \Leftrightarrow$$

$$z - c = ab\bar{c} - ab\bar{z} \Leftrightarrow z + ab\bar{z} = ab\bar{c} + c \in C$$

21.10.4 Proposición.

Dados cuatro números complejos a, b, c, d pertenecientes a la circunferencia unidad,

$$\overline{AD} \perp \overline{BC} \Leftrightarrow ad + bc = 0$$

21.10.5 Proposición. Simetria axial.
Si a y b, con $a \neq b$, pertenecen a la circunferencia unidad, la función

$$z \mapsto a + b - ab\bar{z}$$

Es la simetria axial de z respecto a la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

Demostración. Aplicamos 21.5.8 y tenemos en cuenta que $\bar{a} = \frac{1}{a}$ y $\bar{b} = \frac{1}{b}$:

$$z' \mapsto \frac{(a-b)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} = \frac{(a-b)\bar{z} + \frac{1}{a}b - a\frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{ab(a-b)\bar{z} + b^2 - a^2}{b-a} =$$

$$= \frac{ab(a-b)\bar{z} + (b-a)(b+a)}{b-a} = -ab\bar{z} + a + b$$

21.10.6 Proposición. Proyección ortogonal.
Si a y b, con $a \neq b$, pertenecen a la circunferencia unidad, la función

$$z \mapsto \frac{1}{2}\left(a + b + z - ab\bar{z}\right)$$

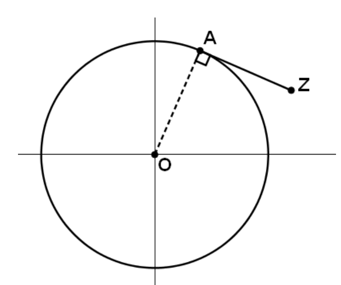
Es la proyección perpendicular de z en la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

Demostración. Aplicando 21.10.5, el punto $a + b - ab\bar{z}$ es el simétrico, luego la proyección perpendicular será el punto medio entre el simétrico y z: $z' = \dfrac{a + b - ab\bar{z} + z}{2}$

Problema propuesto: Problema #32 de **[Prob4]**.

21.10.7 Proposición. Tangente a la circunferencia unidad por un punto
Si a pertenece a la circunferencia unidad, los puntos z de la recta tangente a la circunferencia por a vienen caracterizados por la ecuación

$$z + a^2\bar{z} = 2a$$



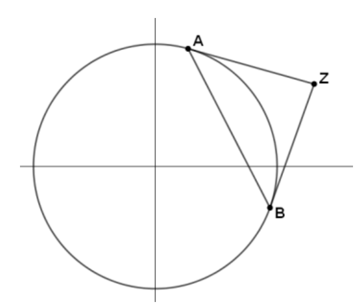
Demostración. Z pertenece a la tangente a la circunferencia por A si y sólo si $AZ \perp OA$.
Aplicando 21.7.1

$$AZ \perp OA \Leftrightarrow \frac{a-0}{\bar{a}-0} = -\frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}} \Leftrightarrow \frac{a}{\bar{a}} = \frac{a-z}{\bar{z}-\bar{a}} \Leftrightarrow \frac{a}{1/a} = \frac{a-z}{\bar{z}-1/a} \Leftrightarrow a^2 = \frac{a-z}{\bar{z}-1/a}$$

$$\Leftrightarrow a^2(\bar{z} - \frac{1}{a}) = a - z \Leftrightarrow a^2\bar{z} - a = a - z \Leftrightarrow a^2\bar{z} + z = 2a$$

21.10.8 Proposición. Punto de corte de dos tangentes.
Si a y b pertenecen a la circunferencia unidad, el punto z intersección de las dos tangentes a dicha circunferencia por a y b es

$$z = \frac{2}{\overline{a} + \overline{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$



Demostración.
Aplicando la proposición anterior a los puntos a y b, se cumplirá el sistema

$$\begin{cases} z + a^2\overline{z} = 2a \\ z + b^2\overline{z} = 2b \end{cases} \Rightarrow a^2\overline{z} - b^2\overline{z} = 2a - 2b \Leftrightarrow (a^2 - b^2)\overline{z} = 2(a-b)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)\overline{z} = 2(a-b) \Leftrightarrow (a+b)\overline{z} = 2 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{2}{a+b} \Leftrightarrow z = \frac{2}{\overline{a}+\overline{b}}$$

Puesto que $|a| = |b| = 1 \Rightarrow \overline{a} = \frac{1}{a}, \overline{b} = \frac{1}{b}$, y por tanto $z = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$

Problema propuesto: Problema #34 de **[Prob4]**.

21.10.9 Proposición. Intersección de dos cuerdas.
El punto de corte de dos cuerdas AB y CD de la circunferencia unidad viene dado por

$$z = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$$

Demostración.

21.10.10 Proposición. Longitud de una cuerdas.
La longitud de una cuerda AB, con A y B pertenecientes a la circunferencia unidad, viene dada por:

$$\left|\overline{AB}\right| = |a-b|^2 = -\frac{(a-b)^2}{ab}$$

Demostración.

$$\left|\overline{AB}\right| = |a-b|^2 = (a-b)\overline{(a-b)} = (a-b)(\overline{a} - \overline{b}) = (a-b)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$= (a-b)\left(\frac{b-a}{ab}\right) = -(a-b)\left(\frac{a-b}{ab}\right) = -\frac{(a-b)^2}{ab}$$

21.10.11 Proposición. Puntos medios de arcos de la circunferencia unidad.
Si ΔABC pertenece a la circunferencia unidad, entonces existirán a, b, y c números complejos tales que $A = a^2$, $B = b^2$ y $C = c^2$, los puntos medios de los arcos BC, AC y AB no conteniendo A, B y C son $-bc$, $-ac$ y $-ab$, respectivamente, y además, el incentro I del triángulo viene dado por $i = -ab - bc - ca$, y el A-excentro I_a por $i_a = ab - bc + ac$ (con permutaciones cíclicas).

Demostración.

Problema propuesto: Problema #38 de **[Prob4]**.

21.10.12 Proposición. Los centros de los triángulos en la circunferencia unidad.
Sea ΔABC un triángulo con a, b, c perteneciendo a la circunferencia unidad. Entonces:

a) El circuncentro es $O = 0$.

b) El baricentro es $G = \frac{1}{3}(a + b + c)$

c) El ortocentro es $H = a + b + c$

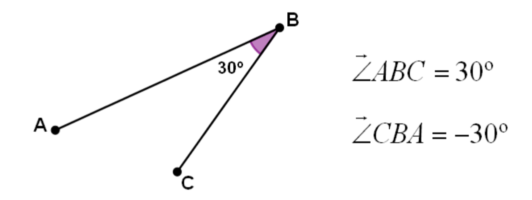
De donde se deduce fácilmente que los puntos O, G y H son colineales con una razón $1:2$.

21.11 Ángulos orientados. Triángulos semejantes.

21.11.1 Definición. Ángulo orientado.

Dadas dos semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ con vértice común A, definimos el ángulo orientado $\vec{\angle} BAC$ de la siguiente manera:

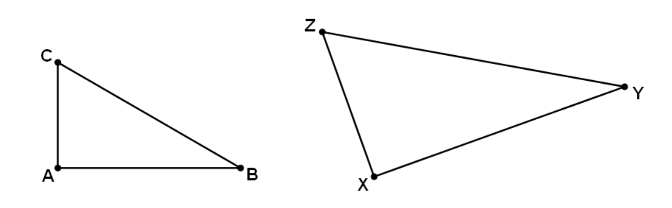
$\vec{\angle} BAC = \angle BAC$ (positivo) si para ir de B a C se avanza en el sentido contrario a las agujas del reloj o sentido antihorario, y $\vec{\angle} BAC = -\angle BAC$ (negativo) en caso contrario.



21.11.2 Definición. Semejanza orientada de triángulos.

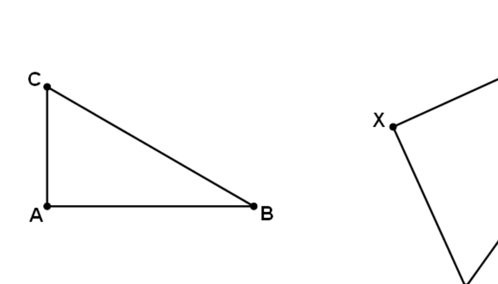
Diremos que dos triángulos ΔABC y ΔXYZ son **semejantes y directamente orientados** cuando

$$\vec{\angle} ABC = \vec{\angle} XYZ \,,\quad \vec{\angle} BCA = \vec{\angle} YZX \quad \text{y} \quad \vec{\angle} CAB = \vec{\angle} ZXY$$

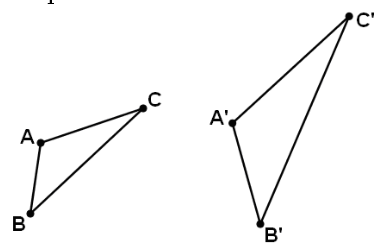


Diremos que dos triángulos ΔABC y ΔXYZ son **semejantes con orientación opuesta** cuando

$$\vec{\angle} ABC = -\vec{\angle} XYZ \,,\quad \vec{\angle} BCA = -\vec{\angle} YZX \quad \text{y} \quad \vec{\angle} CAB = -\vec{\angle} ZXY$$



21.11.3 Proposición. Triángulos semejantes y directamente orientados.
Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, son equivalentes:
a) Los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes y directamente orientados.
b) $\frac{a-b}{c-b}=\frac{a'-b'}{c'-b'}$
c) $0=\begin{vmatrix} a & a' & 1 \\ b & b' & 1 \\ c & c' & 1 \end{vmatrix}$
d) Existe una semejanza espiral que envía ΔABC a $\Delta A'B'C'$.



Demostración. $a \Leftrightarrow b)$ Por el criterio SAS de semejanza de triángulos, dos triángulos serán semejantes si y solo si (a) Tienen dos lados proporcionales:

$$\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{|A'C'|}{|A'B'|} \Leftrightarrow \frac{|AC|}{|AB|}=\frac{|A'C'|}{|A'B'|} \Leftrightarrow \frac{|c-a|}{|b-a|}=\frac{|c'-a'|}{|b'-a'|} \Leftrightarrow \left|\frac{c-a}{b-a}\right|=\left|\frac{c'-a'}{b'-a'}\right|$$

y (b) son iguales los ángulos que abarcan estos dos lados:

$$\angle BAC=\angle B'A'C', \text{ que por 21.3.3b equivale a } Arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=Arg\left(\frac{c'-a'}{b'-a'}\right)$$

Dos números complejos son iguales si y solo si son iguales en módulo y argumento, por lo que las dos condiciones anteriores equivalen a $\frac{a-b}{c-b}=\frac{a'-b'}{c'-b'}$

$b \Leftrightarrow c)$ Basta con aplicar las propiedades básicas del determinante:

$$0=\begin{vmatrix} a & a' & 1 \\ b & b' & 1 \\ c & c' & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-b & a'-b' & 0 \\ b-c & b'-c' & 0 \\ c & c' & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-b & a'-b' \\ b-c & b'-c' \end{vmatrix} \Leftrightarrow (a-b)(b'-c')=(b-c)(a'-b') \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{b-c}=\frac{a'-b'}{b'-c'} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b-c}=\frac{a'-b'}{b'-c'} \Leftrightarrow \frac{a-b}{c-b}=\frac{a'-b'}{c'-b'}$$

$d \Rightarrow b)$ Supongamos que existe una semejanza espiral $z \mapsto q(z-p)+p$ tal que

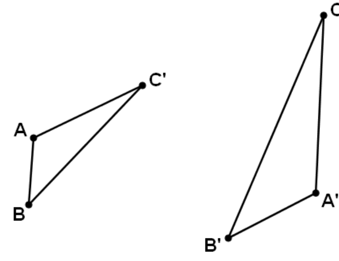
$$\left.\begin{array}{l} a \mapsto a' \Leftrightarrow a'=q(a-p)+p \\ b \mapsto b' \Leftrightarrow b'=q(b-p)+p \\ c \mapsto c' \Leftrightarrow c'=q(c-p)+p \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b'-a'=q(b-p)+p-q(a-p)-p=q(b-p-a+p)=q(b-a) \Rightarrow \frac{b'-a'}{b-a}=q$$

Y de la misma forma llegamos a $\frac{c'-a'}{c-a}=q$, luego $\frac{c'-a'}{c-a}=\frac{b'-a'}{b-a}$

Problemas propuestos: Problema #25 de **[Prob4]**, #7 de **[Prob5]**.

21.11.4 Proposición. Triángulos semejantes opuestamente orientados.
Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, son equivalentes:
a) Los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes y negativamente orientados.



b)

$$\frac{a-b}{c-b} = \overline{\left(\frac{a'-b'}{c'-b'}\right)} = \frac{\overline{a'}-\overline{b'}}{\overline{c'}-\overline{b'}}$$

c)

$$0 = \begin{vmatrix} a & \overline{a'} & 1 \\ b & \overline{b'} & 1 \\ c & \overline{c'} & 1 \end{vmatrix}$$

21.12 Razón doble compleja. Puntos cocíclicos.

21.12.1 Definición. La razón doble compleja.

Dados cuatro números complejos a,b,c,d, con $b \neq c$ y $a \neq d$, definimos su razón **doble compleja** como

$$(a,b;c,d) = \frac{c-a}{c-b} \div \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a)\cdot(d-b)}{(c-b)\cdot(d-a)}$$

Es decir, es el equivalente complejo de la razón doble definida en 12.1.1.

21.12.1 Lema.

$(a,b;c,d) \in IR \Leftrightarrow$

$$Arg(a,b;c,d) = \left[Arg(c-a) - Arg(c-b)\right] - \left[Arg(d-a) - Arg(d-b)\right] = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

Demostración. Pasamos a forma exponencial:

$c-a = r_{AC}e^{i\alpha_{AC}}$, $d-b = r_{BD}e^{i\alpha_{BD}}$, $c-b = r_{BC}e^{i\alpha_{BC}}$, $d-a = r_{AD}e^{i\alpha_{AD}}$.

$$(a,b;c,d) = \frac{(c-a)\cdot(d-b)}{(c-b)\cdot(d-a)} = \frac{r_{AC}e^{i\alpha_{AC}} \cdot r_{BD}e^{i\alpha_{BD}}}{r_{BC}e^{i\alpha_{BC}} \cdot r_{AD}e^{i\alpha_{AD}}} = \frac{r_{AC} \cdot r_{BD}}{r_{BC} \cdot r_{AD}} \frac{e^{i\alpha_{AC}} \; e^{i\alpha_{BD}}}{e^{i\alpha_{BC}} \; e^{i\alpha_{AD}}} =$$

$$= \frac{r_{AC} \cdot r_{BD}}{r_{BC} \cdot r_{AD}} \frac{e^{i(\alpha_{AC}-\alpha_{BC})}}{e^{i(\alpha_{AD}-\alpha_{BD})}} = \frac{r_{AC} \cdot r_{BD}}{r_{BC} \cdot r_{AD}} e^{i((\alpha_{AC}-\alpha_{BC})-(\alpha_{AD}-\alpha_{BD}))} \in IR \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{i((\alpha_{AC}-\alpha_{BC})-(\alpha_{AD}-\alpha_{BD}))} \in IR \Leftrightarrow e^{i((\alpha_{AC}-\alpha_{BC})-(\alpha_{AD}-\alpha_{BD}))} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_{AC} - \alpha_{BC}) - (\alpha_{AD} - \alpha_{BD}) = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

Por otro lado, está claro que

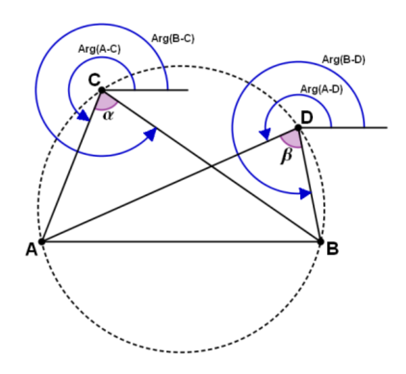
$$Arg(a,b;c,d) = (\alpha_{AC} - \alpha_{BC}) - (\alpha_{AD} - \alpha_{BD}) =$$
$$= \left(Arg(c-a) - Arg(c-b)\right) - \left(Arg(d-a) - Arg(d-b)\right)$$

21.12.2 Proposición.
Dados cuatro puntos A,B,C,D del plano, no colineales,

$$A,B,C,D \text{ son cocíclicos } \Leftrightarrow (a,b;c,d) = \frac{(c-a)\cdot(d-b)}{(c-b)\cdot(d-a)} \in IR$$

Demostración. Sean $\alpha = |\angle ACB|$ y $\beta = |\angle ADB|$. Utilizaremos la caracterización de 10.4.4, y por lo tanto distinguimos los casos:

a) Si C y D son colaterales respecto de $\overleftrightarrow{AB}$:

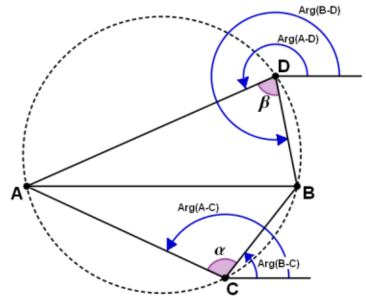


$$Arg(a-c) - Arg(b-c) = -\alpha\,,\ Arg(a-d) - Arg(b-d) = -\beta$$
$$Arg(a,b;c,d) = \left[Arg(a-c) - Arg(b-c)\right] - \left[Arg(a-d) - Arg(b-d)\right] =$$
$$= -\alpha - (-\beta) = \beta - \alpha$$

$(a,b;c,d) \in IR \Leftrightarrow Arg(a,b;c,d) = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$. El valor π no se puede dar, luego

$(a,b;c,d) \in IR \Leftrightarrow Arg(a,b;c,d) = 0 \Leftrightarrow \beta - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow$ son puntos cocíclicos

b) Si C y D están en lado opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$:



$$Arg(a-c) - Arg(b-c) = \alpha\,,\ Arg(a-d) - Arg(b-d) = -\beta$$
$$Arg(a,b;c,d) = \left[Arg(a-c) - Arg(b-c)\right] - \left[Arg(a-d) - Arg(b-d)\right] =$$
$$= \alpha - (-\beta) = \alpha + \beta$$

$(a,b;c,d) \in IR \Leftrightarrow Arg(a,b;c,d) = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$. En este caso, el valor 0 no se puede dar, luego

$(a,b;c,d) \in IR \Leftrightarrow Arg(a,b;c,d) = \pi \Leftrightarrow \alpha + \beta = \pi \Leftrightarrow$ son puntos cocíclicos .

21.12.3 Teorema.
Dados cuatro puntos A, B, C y D del plano complejo, son equivalentes:

a) A, B, C y D son cocíclicos o colineales.

b) $\left(a,b;c,d\right)=\dfrac{(c-a)\cdot(d-b)}{(c-b)\cdot(d-a)}\in IR$

c) $\dfrac{(c-a)\cdot(d-b)}{(c-b)\cdot(d-a)}=\dfrac{(\bar{c}-\bar{a})\cdot(\bar{d}-\bar{b})}{(\bar{c}-\bar{b})\cdot(\bar{d}-\bar{a})}$

Y si se cumplen estas condiciones, $(A,B;C,D)=(a,b;c,d)$.

Demostración.
$a\Leftrightarrow b)$ El caso de puntos cocíclicos se ha demostrado en la proposición anterior.
Si A,B,C,D son colineales, entonces, por 21.6.2c,
$\dfrac{c-a}{c-b}\in IR$ y $\dfrac{d-b}{d-a}\in IR$, y por tanto está claro que se cumple b. Falta ver el recíproco.
$b\Leftrightarrow c)$ Basta tener en cuenta que si $z,w\in C$, $\dfrac{z}{w}\in IR\Leftrightarrow\dfrac{z}{w}=\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}\Leftrightarrow\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{w}{\bar{w}}$.

Problema propuesto: Problema #44 de **[Prob4]**.

21.13 Isometrías en el plano complejo.

21.13.1 Proposición.
Las traslaciones, la conjugación y las rotaciones son isometrías.

Demostración.
Sea $f(z)=z+w$ una traslación de vector $w\in C$. Entonces

$$|f(z_1)-f(z_2)|=|z_1+w-(z_2+w)|=|z_1+w-z_2-w|=|z_1-z_2|$$

Sea $f(z)=\bar{z}$ la conjugación. Entonces

$$|f(z_1)-f(z_2)|=|\overline{z_1}-\overline{z_2}|=|\overline{z_1-z_2}|=|\overline{z_1-z_2}|=|z_1-z_2|$$

Sea $f(z)=e^{i\alpha}z$ una rotación de ángulo α. Entonces

$$|f(z_1)-f(z_2)|=|e^{i\alpha}z_1-e^{i\alpha}z_2|=|e^{i\alpha}(z_1-z_2)|=|e^{i\alpha}||z_1-z_2|=|z_1-z_2|$$

21.13.2 Lema.
Sea una isometría $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ con 0 y 1 como puntos fijos: $f(0)=0$, $f(1)=1$.
a) Si $f(i)=i$ entonces f es la identidad.
b) Si $f(i)=-i$ entonces f es la conjugación.
c) Solo se puede dar uno de los dos casos anteriores.

Demostración.
a) Sea z un número complejo cualquiera y $w=f(z)$.

$$|f(z)-f(0)|=|z-0|\Leftrightarrow|w-0|=|z|\Rightarrow|w|^2=|z|^2\Rightarrow w\overline{w}=z\bar{z}$$

$$|f(z)-f(1)|=|z-1|\Leftrightarrow|w-1|=|z-1|\Rightarrow|w-1|^2=|z-1|^2$$

$$\Rightarrow(w-1)\overline{(w-1)}=(z-1)\overline{(z-1)}\Rightarrow(w-1)(\overline{w}-1)=(z-1)(\bar{z}-1)$$

$$\Rightarrow w\overline{w}-w-\overline{w}+1=z\bar{z}-z-\bar{z}-1\Rightarrow -w-\overline{w}=-z-\bar{z}\Rightarrow w+\overline{w}=z+\bar{z} \quad (1)$$

b) Sea $g:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, $g(z)=\overline{f(z)}$. Claramente $g(0)=0$, $g(1)=1$, y $g(i)=\overline{-i}=i$, luego, aplicando el apartado a, tenemos $g=Id$, luego $z=\overline{f(z)}\Rightarrow f(z)=z$.
c) Sea $w=f(i)$. $|w-f(0)|=|i-0|\Leftrightarrow|w-0|=|i|\Rightarrow|w|=|i|=1$

$$|w-f(1)|=|i-1|\Leftrightarrow|w-1|=|i-1|=\sqrt{2}$$

Luego w pertenece a las circunferencias de centro 0 y radio 1 y de centro 1 y radio $\sqrt{2}$, por lo tanto solo puede ser i o $-i$, es decir, se tiene que cumplir uno de los dos casos anteriores.

21.13.3 Proposición. Genealogía de las isometrías del plano complejo.
Toda isometría del plano complejo es de la forma

$$f(z)=az+b \text{ o } f(z)=a\bar{z}+b$$

para ciertos $a,b\in C$ con $|a|=1$.

De esto se deduce que toda isometría del plano complejo es de la forma $t \circ r$ o $t \circ r \circ s$, con t es una traslación, r es una rotación alrededor del origen y s es la conjugación (es decir, la simetría respecto del eje X).

Demostración. Está claro que las funciones $az+b$ y $a\bar{z}+b$, con $|a|=1$ son isometrías, pues son composiciones de traslaciones, rotaciones y conjugación, que son isometrías.
Sea $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ una isometría, y sean $b=f(0)$, $c=f(1)$ y $a=c-b$.
Se cumple $|a|=|c-b|=|f(1)-f(0)|=|1-0|=1$.
Sea $g(z)=az+b$. La función g es una isometría y cumple $g(0)=b$ y $b(1)=a+b=c$.
Sea $h=g^{-1}\circ f$.
La función h es una isometría y cumple $h(0)=0$ y $h(1)=1$, luego, por el lema anterior, solo se pueden dar dos casos:
O bien h es la identidad en $\mathbf{C}$, y por tanto $f(z)=g(z)=az+b$,
O bien h es la conjugación, y por tanto $f(z)=g(\bar{z})=a\bar{z}+b$.

Problema propuesto: Problema #43 de **[Prob4]**.

21.13.4 Corolario.
Toda isometría es invertible, y su inversa es también una isometría.

Demostración.
Si $f(z)=a\,z+b$, con $|a|=1$, entonces $f^{-1}(z)=\dfrac{1}{a}z-\dfrac{b}{a}$, y $\dfrac{1}{a}$ cumple $\left|\dfrac{1}{a}\right|=|\bar{a}|=|a|=1$, y si $f(z)=a\,\bar{z}+b$, entonces $f^{-1}(z)=\dfrac{1}{\bar{a}}\bar{z}-\overline{b/a}$, y $\left|\dfrac{1}{\bar{a}}\right|=|\bar{a}|=|a|=1$. En ambos casos se satisface la condición de la proposición anterior.

21.13.5 Lema.
Si una isometría deja fijos tres puntos no colineales del plano complejo, entonces es la identidad.

Demostración.

21.13.6 Proposición.
Toda isometría queda determinada por sus valores en tres puntos no colineales del plano, es decir, si dos isometrías coinciden en tres puntos no colineales del plano serán iguales.

Demostración.

21.13.7 Proposición. El grupo de las isometrías del plano complejo.
La composición de dos isometrías es una isometría, la inversa de una isometría es también una isometría, y claramente la identidad es una isometría, por lo que el conjunto de todas las isometrías del plano complejo tiene estructura de grupo con respecto a la composición de funciones, que denotaremos por $Iso(C)$.

El conjunto de todas las traslaciones es un subgrupo de $Iso(C)$.

21.14 Homotecias y semejanzas en el plano complejo.

21.13.1 Proposición.
El conjunto de las homotecias $f(z) = kz$, con $k \in IR$ tiene estructura de grupo con respecto a la composición de funciones, y su elemento unidad es la homotecia de magnitud 1, es decir, la identidad.

Las homotecias preservan las razones de las distancias y por tanto preservan todos los objetos que pueden definirse mediante las mismas, como los puntos medios, las medianas o el baricentro.

21.13.2 Definición. Semejanza.
Una semejanza es una composición de una homotecia y una isometría.

21.15 Transformaciones de Möbius.

21.15.1 Definición. Transformación de Möbius.
Una transformación de Möbius es una función $f : C \to C$ de la forma

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

para ciertos $a,b,c,d \in C$ tales que $ad-bc \neq 0$.

21.15.2 Definición. Notación matricial.
Una transformación de Möbius se puede representar mediante una matriz de $C_{2\times 2}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a una transformación de Möbius no es única. Obtendremos la misma transformación si multiplicamos la matriz por cualquier número complejo no nulo:

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

21.15.3 Proposición. Inversa de una transformación de Möbius.
Toda transformación de Möbius tiene inversa y su inversa es también una transformación de Möbius:

$$f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

La matriz asociada a la transformación inversa es la inversa de la matriz.

Demostración. Aislamos la z:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow w(cz+d) = az+b \Rightarrow czw+dw = az+b \Rightarrow dw-b = az-czw$$

$$\Rightarrow dw-b = z(a-cw) \Rightarrow \frac{dw-b}{a-cw} = z$$

Puesto que la matriz asociada es invariante por multiplicación de escalares, y $ad-bc \neq 0$, la matriz asociada a la transformación inversa será la matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cong \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = M^{-1}$$

21.15.4 Corolario. Dominio e imagen de una transformación de Möbius.
Si $c \neq 0$, el dominio de una transformación de Möbius es el plano complejo punteado

$$Dom(f) = C - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$$

La imagen de una transformación de Möbius será el dominio de su función inversa, es decir,

$$\text{Imagen}\,(f) = C - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

Así pues, una transformación de Möbius es una biyección entre el plano punteado $C - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$ y el plano punteado $C - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$.

Si $c = 0$ entonces $d \neq 0$ y la función es de la forma

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{d} = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$$

y tanto su dominio como su imagen son todos los números complejos sin excepción.

21.15.5 Proposición.
La composición de dos transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius. Y su matriz asociada es el producto de las dos matrices:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

Demostración. Sean $f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$ y $g(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$.

Entonces

$$(f \circ g)(z) = \frac{a\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) + b}{c\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) + d} = \frac{\frac{aa'z + ab'}{c'z + d'} + b}{\frac{ca'z + cb'}{c'z + d'} + d} = \frac{\frac{aa'z + ab' + b(c'z + d')}{c'z + d'}}{\frac{ca'z + cb' + d(c'z + d')}{c'z + d'}} =$$

$$= \frac{aa'z + ab' + b(c'z + d')}{ca'z + cb' + d(c'z + d')} = \frac{aa'z + ab' + bc'z + bd'}{ca'z + cb' + dc'z + dd'} = \frac{(aa'+bc')z + ab'+bd'}{(ca'+dc')z + cb'+dd'}$$

21.15.6 Proposición.
La identidad es una transformación de Möbius, asociada a la matriz Identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. $f(z) = z = \frac{1z + 0}{0z + 1}$

21.15.7 Proposición.
La traslación horizontal

$$T_a(x,y)=(x+a,y)\ ,\ a\in IR$$

es una transformación de Möbius.

Demostración. Si $a\in IR$, entonces para todo $z=x+i\,y$, $T_a(x,y)=(x+a,y)=z+a$ que tiene asociada la matriz

$$T_a=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

21.15.8 Lema.
Sea $f:C\to C$ una transformación de Möbius

$$f(z)=\frac{a\,z+b}{c\,z+d}$$

Entonces

$$f(z)-f(w)=\frac{a\,d-b\,c}{(c\,z+d)(c\,w+d)}(z-w)$$

Demostración.

$$f(z)-f(w)=\frac{a\,z+b}{c\,z+d}-\frac{a\,w+b}{c\,w+d}=\frac{(a\,z+b)(c\,w+d)-(a\,w+b)(c\,z+d)}{(c\,z+d)(c\,w+d)}=$$

$$=\frac{azcw+azd+bcw+bd-(awcz+awd+bcz+db)}{(c\,z+d)(c\,w+d)}=$$

$$=\frac{azd+bcw-awd-bcz}{(c\,z+d)(c\,w+d)}=\frac{z(ad-bc)+w(bc-ad)}{(c\,z+d)(c\,w+d)}=\frac{(ad-bc)(z-w)}{(c\,z+d)(c\,w+d)}=$$

$$=\frac{ad-bc}{(c\,z+d)(c\,w+d)}(z-w)$$

21.15.9 Teorema.
Toda transformación de Möbius conserva la razón doble.

Demostración. Dados cuatro puntos del plano, es decir, cuatro números complejos z_1, z_2, z_3 y z_4, y una transformación de Möbius $f(z)=\dfrac{a\,z+b}{c\,z+d}$,
tenemos que ver que $(z_1,z_2;z_3,z_4)=(f(z_1),f(z_2);f(z_3),f(z_4))$ (ver 12.1.1)

La distancia entre dos números complejos es el módulo de su diferencia: $|z_1z_3|=|z_3-z_1|$

Basta aplicar el lema anterior:

$$|f(z_1)\,f(z_3)|=|f(z_3)-f(z_1)|=\left|\frac{a\,d-b\,c}{(c\,z_3+d)(c\,z_1+d)}(z_3-z_1)\right|$$

$$(f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)) = \frac{|f(z_1)\, f(z_3)|}{|f(z_2)\, f(z_3)|} \cdot \frac{|f(z_2)\, f(z_4)|}{|f(z_1)\, f(z_4)|} =$$

$$= \frac{\left| \frac{ad-bc}{(cz_3+d)(cz_1+d)}(z_3-z_1) \right|}{\left| \frac{ad-bc}{(cz_3+d)(cz_2+d)}(z_3-z_2) \right|} \cdot \frac{\left| \frac{ad-bc}{(cz_4+d)(cz_2+d)}(z_4-z_2) \right|}{\left| \frac{ad-bc}{(cz_4+d)(cz_1+d)}(z_4-z_1) \right|} =$$

$$= \frac{\left| \frac{ad-bc}{(cz_3+d)(cz_1+d)} \right|}{\left| \frac{ad-bc}{(cz_3+d)(cz_2+d)} \right|} \cdot \frac{\left| \frac{ad-bc}{(cz_4+d)(cz_2+d)} \right|}{\left| \frac{ad-bc}{(cz_4+d)(cz_1+d)} \right|} \frac{|(z_3-z_1)|}{|(z_3-z_2)|} \cdot \frac{|(z_4-z_2)|}{|(z_4-z_1)|} =$$

$$= (z_1, z_2; z_3, z_4)$$

21.15.10 Teorema.
Toda transformación de Möbius es conformal, es decir, conserva los ángulos.

Demostración. La composición de transformaciones conformales es conformal, por lo tanto, basta con escribir una transformación de Möbius como composición de transformaciones conformales elementales:
Si $c = 0$, $f(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ y la transformación se puede escribir como la composición de la homotecia $\frac{a}{d}z$ seguida de la traslación $z + \frac{b}{d}$.

Si $c \neq 0$, dividimos $az+b$ entre $cz+d$ para obtener

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - ad/c}{cz+d} = \left(b - \frac{ad}{c}\right)\frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}$$

La función, escrita de esta manera, es una composición de funciones elementales:

$z \to cz$	(rotación)
$z \to z + d$	(traslación)
$z \to \bar{z}$	(conjugación)
$z \to \frac{1}{\bar{z}}$	(inversión)
$z \to \left(b - \frac{ad}{c}\right)z$	(rotación)
$z \to z + \frac{a}{c}$	(traslación)

21.15.11 Proposición.
Si $a,b,c \in C$ son tres números complejos diferentes, la transformación

$$T(z) = (z,a;b,c) = \frac{z-b}{z-c} \cdot \frac{a-c}{a-b}$$

es una transformación de Möbius, y es la única que cumple la siguiente propiedad:

$$T(a) = 1,\ T(b) = 0,\ T(c) = \infty$$

Demostración. Sea $e = \frac{a-c}{a-b}$, entonces

$$T(z) = (z,a;b,c) = \frac{z-b}{z-c} \cdot \frac{a-c}{a-b} = e\frac{z-b}{z-c} = \frac{ez-eb}{z-c}$$

$e(-c)-(-eb)1 = -ec+eb = e(b-c) = \frac{a-c}{a-b}(b-c) \neq 0$ pues suponemos que los tres números son diferentes.

Problemas propuestos para este tema.

Los problemas #23 a #38 de **[Prob4]** están dedicados a la aplicación de los números complejos a la resolución de problemas geométricos.

Problema #1 de **[Prob5]**

Bibliografía de este tema.

Fuente principal de este capítulo: Complex Numbers from A to... Z (Chapter 4: More on Complex Numbers and Geometry) Andreescu, T.; Andrica, D. (2014)

Volumen IV: Geometría no euclídea

22 Geometría hiperbólica.

“...Sin embargo, hay que advertir que si Dios existe, si verdaderamente ha creado la Tierra, la ha hecho, como es sabido, de acuerdo con la geometría de Euclides, puesto que ha dado a la mente humana la noción de las tres dimensiones, y nada más que tres, del espacio. Sin embargo, ha habido, y los hay todavía matemáticos y filósofos… que dudan si todo el Universo o, para decirlo de manera más amplia, toda existencia, fue creada solo de acuerdo con los principios de Euclides, e incluso se atreven a soñar que dos rectas paralelas que, de acuerdo con Euclides nunca se pueden cortar en la Tierra, quizás puedan hacerlo en el infinito. En vista de que ni siquiera esto soy capaz de comprender, he decidido no intentar comprender a Dios. Confieso humildemente mi incapacidad para resolver estas cuestiones. En esencia, mi mentalidad es la de Euclides: una mentalidad terrestre. ¿Para qué intentar resolver cosas que no son de este mundo? Te aconsejo que no te tortures el cerebro tratando de resolver estas cuestiones, y menos aún el problema de la existencia de Dios. ¿Existe o no existe? Estos puntos están fuera del alcance de la inteligencia humana, que sólo tiene la noción de las tres dimensiones....”

Los hermanos Karamázov, Fiodor Dostoyevski

22.1 El Disco de Poincaré.

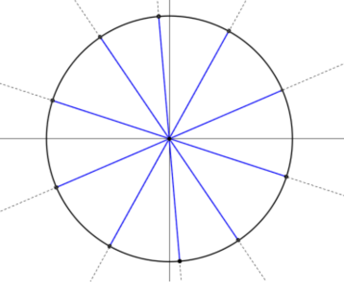
22.1.1 Definición. Disco de Poincaré.

Definimos el **Disco de Poincaré** ID como el conjunto de los números complejos con módulo inferior a 1:

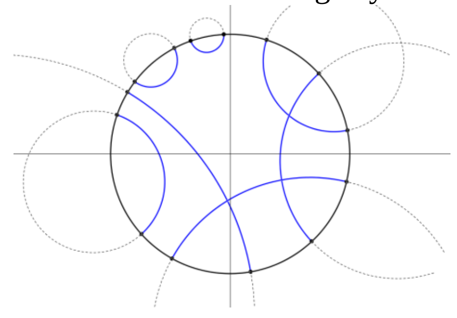
$$ID = \left\{ z \in C \mid |z| < 1 \right\}$$

Definimos las rectas del Disco de Poincaré de dos tipos:

- $r \cap ID$ para cualquier recta r que pase por el origen.



- $c \cap ID$ para cualquier circunferencia ortogonal c, es decir, circunferencia perpendicular a la circunferencia centrada en el origen y radio 1.



Diremos que un punto P pertenece a una recta r si $P \in r$ en el sentido habitual del término.

22.1.2 Definición. Frontera del Disco de Poincaré.
Definimos la frontera del Disco de Poincaré como la circunferencia unidad:

$$\partial ID = \{ z \in C \mid |z| = 1 \}$$

El Disco de Poincaré ID es un disco abierto: Los puntos de la circunferencia unidad ∂ID no forman parte del mismo.

22.1.3 Nota histórica.
Jules Henri Poincaré (1854-1912) fue un gran genio matemático francés. Un científico científico teórico, físico y filósofo de la ciencia que hizo considerables aportaciones a la Teoría del Caos y la Teoría de la Relatividad.
En 1887, mientras intentaba dar solución al problema de los tres cuerpos, un problema relacionado con la estabilidad del Sistema Solar, Poincaré describió dos modelos de Geometría Hiperbólica en dos dimensiones. Uno de ellos ocupa el interior del disco unidad y otro el semiplano superior. En el primero se representan las rectas como arcos de circunferencia que intersecan perpendicularmente al disco en su interior y en el semiplano, las rectas son líneas verticales y semicircunferencias que inciden perpendicularmente sobre el eje real.



22.1.4 Proposición. Ecuación de las circunferencias ortogonales.
Los puntos $x + iy$ de una circunferencia ortogonal con centro en $z = h + ik$ satisfacen la ecuación

$$x^2 - 2xh + y^2 - 2yk = -1$$

Demostración. Sea c_1 la circunferencia centrada en el origen $O = (0,0)$ y radio 1.
Sea c_2 una circunferencia cualquiera con centro $C = h + ik$ y ortogonal a c_1.
Sea Q uno de los puntos de intersección entre c_1 y c_2.
Por ser c_1 y c_2 ortogonales, el ángulo $\angle OQC$ es recto, y por tanto el triángulo OQC es rectángulo en Q. Así pues, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$|OQ|^2 + |QC|^2 = |OC|^2$$

Pero $|OQ| = 1 \Rightarrow |OQ|^2 = 1$

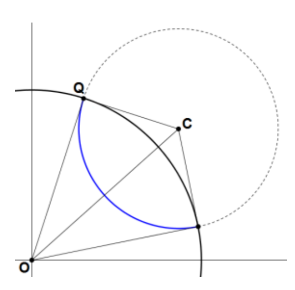
$$|OC| = \sqrt{h^2 + k^2} \Rightarrow |OC|^2 = h^2 + k^2$$

y por tanto

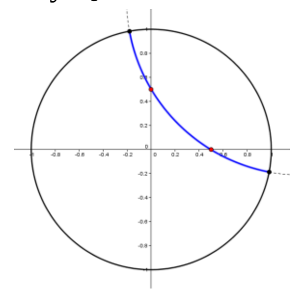
$$|QC|^2 = |OC|^2 - |OQ|^2 = h^2 + k^2 - 1$$

Los puntos $P = x + iy$ de c_2 vienen determinados por $|PC| = |QC|$, es decir:

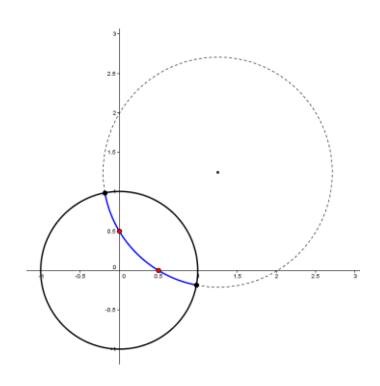
$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=\sqrt{h^2+k^2-1}$$
$$(x-h)^2+(y-k)^2=h^2+k^2-1$$
$$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=h^2+k^2-1$$
$$x^2-2xh+y^2-2yk=-1$$



22.1.5 Ejercicio.
Determinar la ecuación de la circunferencia ortogonal que pasa por los puntos $P=(0.5,0)$ y $Q=(0,0.5)$. ($P=0.5$ y $Q=0.5i$ en forma compleja)



Demostración. Vamos a calcular el centro $P=h+ik$ de la circunferencia.
Los puntos de la circunferencia han de cumplir la ecuación:
$$x^2-2xh+y^2-2yk=-1$$
Y por simetría podemos suponer que $h=k$. Por lo tanto
$$x^2-2xh+y^2-2yh=-1$$
Sustituyendo en $x=0.5, y=0$:
$$0.5^2-2\cdot 0.5\cdot h+0^2-2\cdot 0\cdot h=-1$$
$$\frac{1}{4}-h=-1\Rightarrow \frac{1}{4}+1=h\Rightarrow \frac{5}{4}=h=k$$
Luego la ecuación de la circunferencia buscada es:
$$x^2-\frac{5x}{2}+y^2-\frac{5y}{2}+1=0$$



22.2 Distancia hiperbólica.

22.2.1 Definición. Distancia entre dos puntos.

Sean A y B dos puntos del Disco de Poincaré. La recta $\overleftrightarrow{AB}$ (su existencia y unicidad se demostrará más adelante) cortará la circunferencia unidad en dos puntos P y Q.
Definimos la distancia entre los puntos A y B como

$$d_H(A,B) = \left| \ln\left((A,B;P,Q) \right) \right|$$

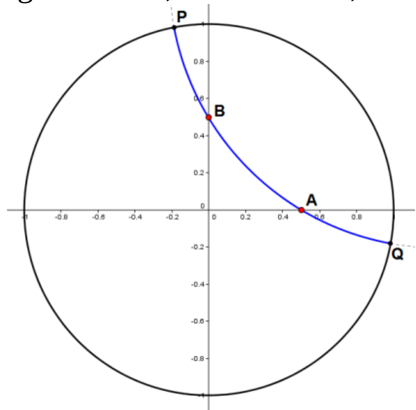
El orden de los puntos A y B no importa, puesto que

$$d_H(B,A) = \left| \ln\left((B,A;P,Q) \right) \right| = \left| \ln\left((A,B;P,Q)^{-1} \right) \right| = \left| -\ln\left((A,B;P,Q) \right) \right| =$$

$$= \left| \ln\left((A,B;P,Q) \right) \right| = d_H(A,B)$$

22.2.3 Ejemplo.

Determinar la longitud del segmento AB, donde A=1/2, B=1/2i



Ya hemos visto (22.1.5) que AB tiene asociada la ecuación $x^2 - \frac{5}{2}x + y^2 - \frac{5}{2}y = -1$

Vamos ahora a calcular sus puntos ideales:

$$\begin{cases} x^2 - \frac{5}{2}x + y^2 - \frac{5}{2}y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y = -1 \Rightarrow 2 = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y$$

$$\Rightarrow 4 = 5x + 5y \Rightarrow x = \frac{4}{5} - y$$

$$\left(\frac{4}{5} - y \right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} - 2\frac{4}{5}y + y^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} - \frac{8}{5}y + 2y^2 = 1$$

Que tiene por soluciones

$$y = \begin{cases} \dfrac{4-\sqrt{34}}{10} \approx -0.183 \\ \dfrac{4+\sqrt{34}}{10} \approx 0.983 \end{cases} \quad \text{que dan lugar a los valores } x = \begin{cases} \dfrac{4+\sqrt{34}}{10} \\ \dfrac{4-\sqrt{34}}{10} \end{cases}$$

Es decir:

$$P = \left(\left(4 - \sqrt{34}\right)/10, \left(4 + \sqrt{34}\right)/10 \right) \approx (-0.18, 0.98)$$

$Q = \left(\left(4+\sqrt{34}\right)/10, \left(4-\sqrt{34}\right)/10\right) \approx (0.98, -0.18)$

$$(A,B;P,Q) = \frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BQ|}{|AQ|}$$

$$|AP| = |BQ| = \sqrt{\left(\frac{4-\sqrt{34}}{10} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4+\sqrt{34}}{10}\right)^2} \approx 1.1971$$

Con ayuda de Mathematica obtenemos los resultados:

$|BP| = |AQ| \approx 0.5166$

$$(A,B;P,Q) \approx \frac{1.1971}{0.5166} \cdot \frac{1.1971}{0.5166} = 5.3697$$

$$d_H(A,B) = \left|\ln\left(\left[A,B,P,Q\right]\right)\right| \approx \left|\ln\left(5.3697\right)\right| = 1.6808$$

22.2.4 Proposición. Distancia de un punto al origen.

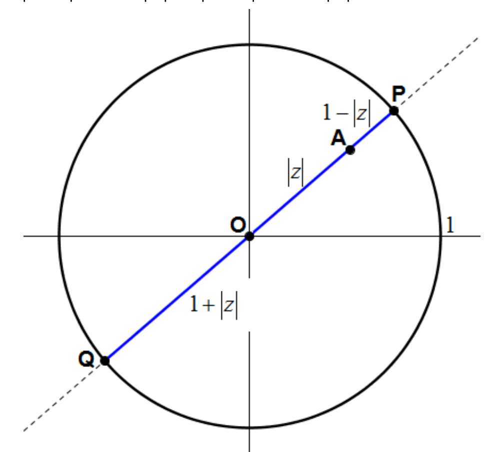
La distancia de un punto $A = x + iy$ al origen $O = 0 + i0$ viene dada por la fórmula

$$d_H(A,O) = \ln\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)$$

Demostración. La recta OA cortará la circunferencia unidad en dos puntos P y Q. Vamos a suponer que P es el punto más cercano a A.

Entonces:

$|OA| = |z|$, $|OP| = |OQ| = 1$, $|AP| = 1-|z|$, $|AQ| = 1+|z|$



$$(O,A;P,Q) = \frac{|OP|}{|AP|} \cdot \frac{|AQ|}{|OQ|} = \frac{1}{1-|z|} \cdot \frac{1+|z|}{1} = \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

$$d_H(A,O) = \left|\ln\left((A,O;P,Q)\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)\right|$$

Observamos que

$$1+|z|>1-|z| \Rightarrow \frac{1+|z|}{1-|z|}>1 \Rightarrow \ln\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)>0 \Rightarrow \left|\ln\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)\right| = \ln\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)$$

Y por lo tanto podemos prescindir del valor absoluto:

$$d_H(A,O) = \ln\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)$$

Ejemplo.

Un método alternativo para calcular la distancia entre los puntos A=1/2 y B=1/2i es aplicar al Disco de Poincaré la isometría

$$\phi(z) = \frac{z-1/2}{1-1/2z}$$

Que transforma el punto A en O:

$$\phi(A) = \frac{1/2-1/2}{1-(1/2)(1/2)} = 0$$

Entonces:

$$\phi(B) = \frac{1/2i-1/2}{1-(1/2)(1/2i)} = \frac{i/2-1/2}{1-i/4} = \frac{2(i-1)}{4-i} = \frac{6i-10}{17}$$

Y por tanto

$$|\phi(B)| = \frac{1}{17}|6i-10| = \frac{1}{17}\sqrt{6^2+10^2} = \frac{2\sqrt{34}}{17} \approx 0.6860$$

$$d_H(A,B) = d_H(\phi(A),\phi(B)) = d_H(O,\phi(B)) = \ln\left(\frac{1+\phi(B)}{1-\phi(B)}\right) \approx 1.6807$$

22.2.5 Definición. Razones trigonométricas hiperbólicas.
Definimos el seno y el coseno hiperbólicos para cualquier número complejo en términos de exponenciales:

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

La tangente hiperbólica se define como cociente entre ambas:

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{(e^z - e^{-z})/2}{(e^z + e^{-z})/2} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

22.2.6 Proposición. La inversa de la tangente hiperbólica.

$$\tanh^{-1}(z) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

Demostración.

$$z = \tanh(w) = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}} \Rightarrow z(e^w + e^{-w}) = e^w - e^{-w} \Rightarrow z\,e^w + z\,e^{-w} = e^w - e^{-w} \Rightarrow$$

$$z\,e^w - e^w = -e^{-w} - z\,e^{-w} \Rightarrow e^w(z-1) = -e^{-w}(1+z) \Rightarrow \frac{1+z}{z-1} = \frac{e^w}{-e^{-w}} = -e^w e^w = -e^{2w} \Rightarrow$$

$$e^{2w} = \frac{1+z}{1-z}$$

Y por lo tanto

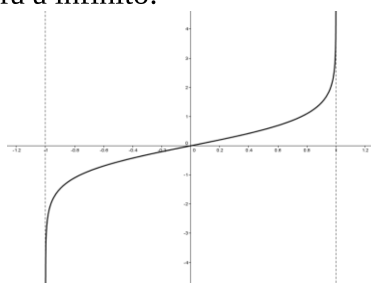
$$2w = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \Rightarrow w = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

22.2.7 Corolario.

$$d_H(A,O) = 2\tanh^{-1}(|z|)$$

Demostración. Basta aplicar la proposición anterior a 22.2.4.

Proposición.
Observamos en la gráfica de la función $f(x) = \tanh^{-1}(x)$, para valores de x reales, un comportamiento asintótico: Se aproxima a 0 para x cercanos a 0, pero cuando x se acerca a 1 la función se dispara a infinito:



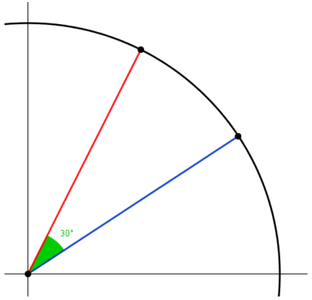
Así pues, los puntos del disco de Poincaré cercanos al origen tendrán una distancia cercana a 0, y a medida que se alejan del origen y se acercan al disco unidad la distancia será cada vez mayor sin limitación.

22.3 Ángulo hiperbólico.

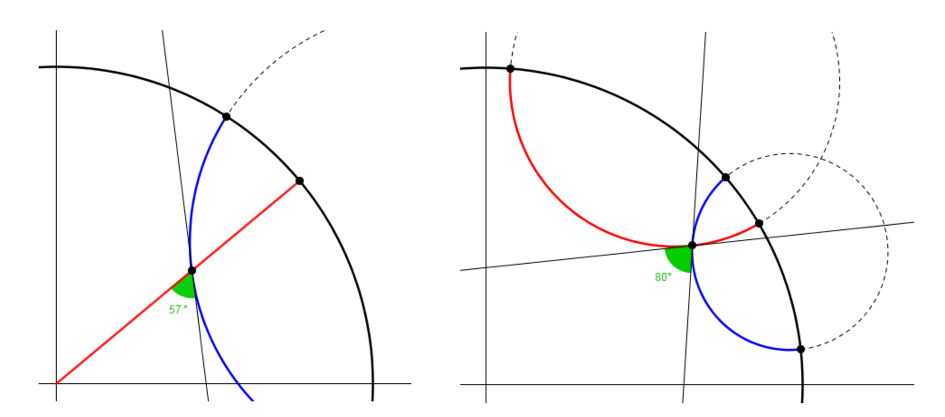
22.3.1 Definición. Ángulo hiperbólico.

Definimos el ángulo hiperbólico entre dos rectas de la siguiente manera:

Si ambas rectas son rayos, se define el ángulo hiperbólico como el ángulo euclídeo que determinan.

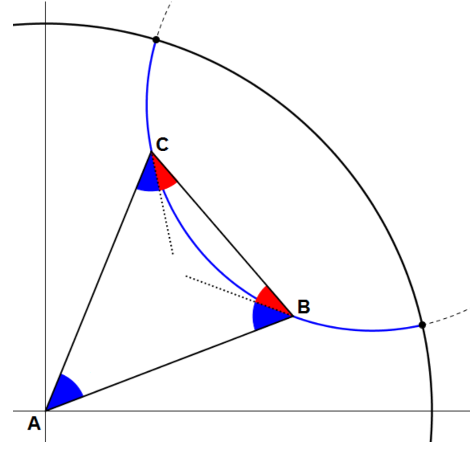


Si una o ambas son circunferencias ortogonales, se define el ángulo hiperbólico como el ángulo euclídeo que determinan las dos rectas tangentes en su punto de intersección.



Observación.

Con esta definición de ángulo, la suma de los ángulos de un triángulo en el Disco de Poincaré será menor de 180, pues trasladando el triángulo hasta que el vértice A sea el origen, vemos que encaja en el interior de un triángulo convencional euclidiano, y los ángulos hiperbólicos en B y C serán estrictamente menores que los ángulos euclidianos correspondientes.



22.4 El Disco de Poincaré como modelo incidental.

El Disco de Poincaré es un modelo para la geometría incidental plana, pues cumple los tres axiomas asociados a ésta.

22.4.1 Proposición. Axioma I1.
Si A y B son dos puntos diferentes, existe una única recta r tal que $A \in r$ y $B \in r$.

Demostración. Tomamos dos puntos diferentes del Disco de Poincaré $A = a + ib$ y $B = c + id$ para ciertos $a, b, c, d \in IR$.
Ya hemos visto que si dichos puntos pertenecen a un arco ortogonal deberán satisfacer una ecuación de la forma $x^2 - 2xh + y^2 - 2yk = -1$ para ciertos $h, k \in IR$, es decir:

$$\begin{cases} a^2 - 2ah + b^2 - 2bk = -1 \\ c^2 - 2ch + d^2 - 2dk = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2ah - 2bk = -1 - a^2 - b^2 \\ -2ch - 2dk = -1 - c^2 - d^2 \end{cases}$$

Estamos ante un sistema lineal en h y k que será compatible determinado (es decir, tendrá solución única) si y sólo si

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b \\ -2c & -2d \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

El caso $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ corresponde al caso en que los puntos A y B están en una única recta que pasa por el origen. En todo caso están contenidos en una única recta hiperbólica.

22.4.2 Proposición. Axiomas I2 e I3.
En toda recta hay al menos dos puntos diferentes.
Existirán tres puntos A, B y C diferentes que no están contenidos en la misma recta, es decir, que si r es una recta, al menos uno de ellos no pertenece a r.

Demostración. Estos axiomas se cumplen trivialmente puesto que estamos tomando en consideración segmentos y arcos de IR^2.

22.5 El Disco de Poincaré como modelo no euclídeo.

El Disco de Poincaré es un modelo para la geometría ordenada plana, pues cumple los cuatro axiomas asociados a ésta.

22.5.1 Proposición.
El Disco de Poincaré no satisface el axioma de paralelismo.

Demostración. Por poner un ejemplo, las rectas y=0 y x=0 no tienen ningún punto en común con la recta hiperbólica

$$x^2 - \frac{3x}{2} + y^2 - \frac{3y}{2} + 1 = 0$$

Efectivamente,

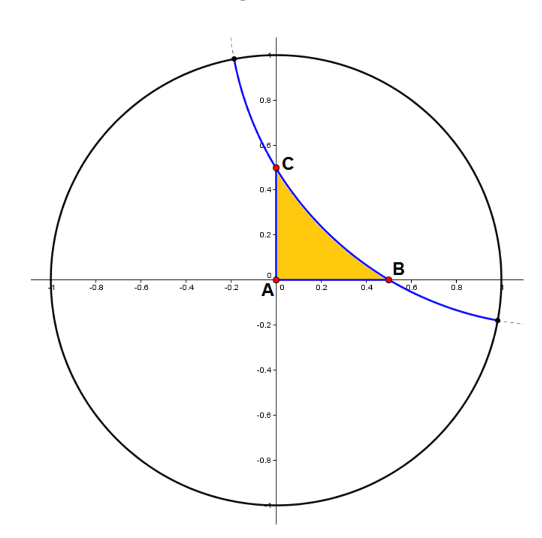
$$x^2 - \frac{3x}{2} + 0^2 - \frac{3\cdot 0}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3x}{2} + 1 = 0$$

En donde nos encontramos un discriminante negativo:

$$\Delta = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = \frac{9}{4} - 4 = \frac{-7}{4} < 0$$

Ambas rectas pasan por el origen (0,0). Así pues, nos encontramos con dos rectas diferentes que tienen un punto en común y las dos son paralelas a una tercera recta.

22.5.2 Proposición.
Vamos a demostrar que la fórmula $Área = Base \times Altura / 2$ no tiene sentido en el contexto de la geometría hiperbólica, pues obtenemos diferentes resultados dependiendo de la altura del triángulo que tomemos.
Lo veremos en un caso concreto: El triángulo ΔABC, donde A=0, B=1/2 y C=1/2i.



Demostración.
Primera opción: Base AB y altura AC.

$$|AB| = |OB| = d_H(B,O) = \ln\left(\frac{1+1/2}{1-1/2}\right) = \ln\left(\frac{3/2}{1/2}\right) = \ln(3)$$

Igualmente, $|AC| = \ln(3)$, por lo tanto, $\frac{|AB| \cdot |AC|}{2} = \frac{\ln^2(3)}{2} \approx 0.6035$

Segunda opción: Tomamos como base el segmento BC.
Ya hemos calculado anteriormente (22.2.4) que $\left|\overline{BC}\right| \approx 1.6808$
Vamos a determinar la altura que pasa por el vértice A.
La base de la altura que pasa por A en el segmento $\overline{BC}$ será, por simetría, el punto medio del segmento $\overline{BC}$, es decir, la intersección de la bisectriz principal $x = y$ con el arco ortogonal.

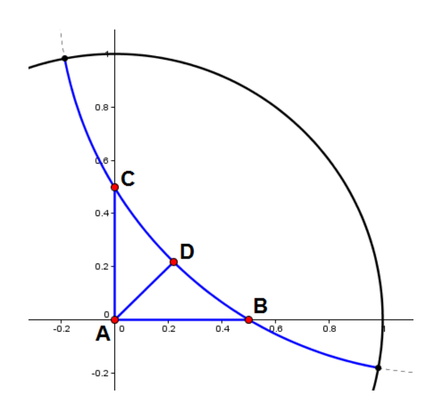
$$\begin{cases} x^2 - \frac{5x}{2} + y^2 - \frac{5y}{2} + 1 = 0 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{5x}{2} + x^2 - \frac{5x}{2} + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 1 = 0$$

Cuyas soluciones son $x = \frac{5-\sqrt{17}}{4} \approx 0.2192$ y $x = \frac{5+\sqrt{17}}{4} \approx 2.2808$

Nos quedamos con la primera y obtenemos el punto

$$D = \left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}, \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right) \approx (0.2192, 0.2192)$$

$$|D| = \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)^2 + \left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(5-\sqrt{17}\right)^2/8} \approx 0.3100$$



$$|AD| = |OD| = d_H(D,O) \approx \ln\left(\frac{1+0.31}{1-0.31}\right) = 0.6411$$

Y por tanto $\frac{|AD| \cdot |BC|}{2} \approx \frac{0.6411 \cdot 1.6808}{2} \approx 0.5388$

Así pues, observamos que tomando diferentes alturas del triángulo obtenemos diferentes áreas.

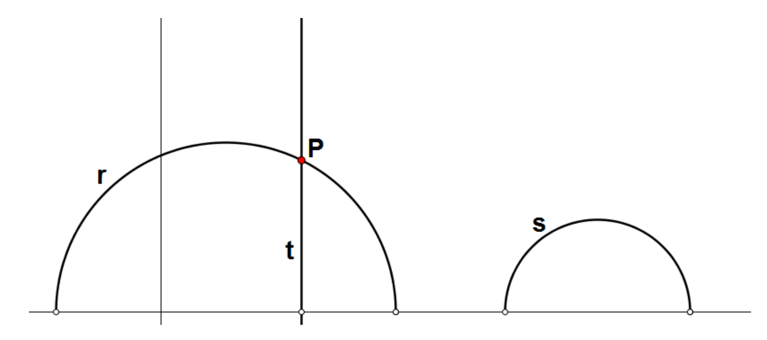
22.6 El semiplano de Poincaré.

22.6.1 Definición.

Este modelo consiste en todos los puntos en el semiplano superior abierto:

$$IH = \{(x,y) \mid y > 0\}$$

Las rectas en este modelo son semicircunferencias euclidianas cuyos centros están sobre el eje real, y las semirrectas euclidianas verticales, que podemos considerar como semicircunferencias de radio infinito.



Definimos su frontera como $\partial IH = \{(x,y) \mid y = 0\}$. La frontera ∂IH no pertenece al semiplano de Poincaré.

22.6.2 Proposición. Relación entre IH y ID.

La transformación

$$h(z) = \frac{z-i}{iz-1}$$

es una biyección de IH en ID, y tiene como inversa la transformación

$$g(z) = \frac{-z+i}{-iz+1}$$

Además, es una biyección entre ∂IH y ∂ID.

Demostración. La transformación h corresponde a una transformación de Möbius con $a = 1$, $b = -i$, $c = i$ y $d = -1$. Efectivamente:

$ad - bc = 1 \cdot (-1) - (-i)i = -1 + i^2 = -1 - 1 = -2 \neq 0$.

Su inversa $h^{-1}(z) = \dfrac{dz - b}{-cz + a}$ corresponde a $g(z) = \dfrac{-z+i}{-iz+1}$.

Así pues, h es una biyección entre el plano punteado $C - \left\{\dfrac{-d}{c}\right\} = C - \left\{\dfrac{1}{i}\right\} = C - \{-i\}$ y el plano punteado $C - \left\{\dfrac{a}{c}\right\} = C - \left\{\dfrac{1}{i}\right\} = C - \{-i\}$.

Veamos que $g(ID) \subset IH$: Sea $z = a + bi \in ID$

$-z + i = -a - bi + i = -a + (1-b)i$

$-iz + 1 = -i(a + bi) + 1 = -ai + b + 1 = b + 1 - ai$

$$g(z)=\frac{-z+i}{-iz+1}=\frac{-a+(1-b)i}{b+1-ai}=\frac{\left[-a+(1-b)i\right]\left(b+1+ai\right)}{\left(b+1-ai\right)\left(b+1+ai\right)}=$$
$$=\frac{-a\left(b+1+ai\right)+(1-b)i\left(b+1+ai\right)}{(b+1)^2+a^2}$$

Simplificamos el numerador:

$$-a\left(b+1+ai\right)+(1-b)i\left(b+1+ai\right)=-ab-a-a^2i+(1-b)\left(bi+i-a\right)=$$
$$=-ab-a-a^2i+(1-b)bi+(1-b)i-(1-b)a=$$
$$=-ab-a-a^2i+bi-b^2i+i-bi-a+ab=$$
$$=-a-a^2i-b^2i+i-a=-2a+(1-a^2-b^2)i$$

Y nos queda:

$$g(z)=\frac{-2a+(1-a^2-b^2)i}{(b+1)^2+a^2}\Rightarrow \mathrm{Im}(g(z))=\frac{1-(a^2+b^2)}{(b+1)^2+a^2}>0\Rightarrow g(z)\in IH,$$

puesto que $z\in ID\Rightarrow a^2+b^2<1\Rightarrow 1-\left(a^2+b^2\right)>0$.

Veamos que $h(IH)\subset ID$:

Sea $z=a+bi\in IH$

$z-i=a+bi-i=a+(b-1)i$

$iz-1=i(a+bi)-1=ai-b-1=-b-1+ai$

$$h(z)=\frac{z-i}{iz-1}=\frac{a+(b-1)i}{-b-1+ai}=\frac{\left[a+(b-1)i\right](-b-1-ai)}{\left(-b-1+ai\right)(-b-1-ai)}=\frac{\left[a+(b-1)i\right](-b-1-ai)}{\left(-b-1\right)^2+a^2}$$

$$\left[a+(b-1)i\right](-b-1-ai)=a(-b-1-ai)+(b-1)i(-b-1-ai)=$$
$$=-ab-a-a^2i-(b-1)ib-(b-1)i-(b-1)iai=$$
$$=-ab-a-a^2i-(b-1)ib-(b-1)i-(b-1)a(-1)=$$
$$=-ab-a-a^2i-ib^2+ib-ib+i+ab-a=-2a-a^2i-ib^2+i=-2a+(1-a^2-b^2)i$$

$$h(z)=\frac{-2a+(1-a^2-b^2)i}{(-b-1)^2+a^2}$$

$$|h(z)|^2=\frac{4a^2+(1-a^2-b^2)^2}{\left((b+1)^2+a^2\right)^2}$$, queremos ver que $b>0\Rightarrow |h(z)|^2<1$.

$$\frac{4a^2+(1-a^2-b^2)^2}{\left((b+1)^2+a^2\right)^2}<1\Leftrightarrow 4a^2+(1-a^2-b^2)^2<\left((b+1)^2+a^2\right)^2\Leftrightarrow$$
$$\left((b+1)^2+a^2\right)^2-4a^2-(1-a^2-b^2)^2>0\Leftrightarrow$$
$$4b(a^2+(b+1)^2)>0$$

Siempre $a^2+(b+1)^2>0$, y por tanto, si $b>0$ entonces $4b(a^2+(b+1)^2)>0$

Veamos que $h(\partial IH)\subset \partial ID$:

Sea $z=a\in \partial IH$ (hacemos $b=0$)

$$h(a)=\frac{a-i}{ia-1}=\frac{(a-i)(ia+1)}{(ia-1)(ia+1)}=\frac{(a-i)(ia+1)}{1+a^2}=\frac{a(ia+1)-i(ia+1)}{1+a^2}=$$

$$=\frac{ia^2+a+a-i}{1+a^2}=\frac{2a+(a^2-1)i}{1+a^2}$$

$$|h(a)|^2=\frac{4a^2+(a^2-1)^2}{(a^2+1)^2}=\frac{4a^2+a^4-2a^2+1}{(a^2+1)^2}=\frac{2a^2+a^4+1}{(a^2+1)^2}=\frac{(a^2+1)^2}{(a^2+1)^2}=1$$

es decir, $h(a)\in\partial ID$.

Veamos que $g(\partial ID)\subset\partial IH$:
Sea $z=a+bi\in ID$.
Ya hemos calculado anteriormente que

$$g(z)=\frac{-2a+(1-a^2-b^2)i}{(b+1)^2+a^2}\Rightarrow \mathrm{Im}(g(z))=\frac{1-(a^2+b^2)}{(b+1)^2+a^2}$$, pero ahora $a^2+b^2=1$

y por tanto

$$\mathrm{Im}(g(z))=\frac{1-1}{(b+1)^2+a^2}=0$$, es decir $g(a)\in\partial IH$.

Longitud.
La longitud de una curva

$$s:[a,b]\to IR^2$$
$$t\mapsto(x(t),y(t))$$

viene dada por la fórmula

$$l=\int_a^b\frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{t}dt$$

Todo segmento vertical entre $P=(c,a)$ y $Q=(c,b)$ se podrá parametrizar como

$$s:[a,b]\to IR^2$$
$$t\mapsto(c,t)$$

y por tanto $\frac{dx}{dt}=0$, $\frac{dy}{dt}=1$ y

$$l=\int_a^b\frac{\sqrt{0^2+1^2}}{t}dt=\int_a^b\frac{1}{t}dt=\ln(b)-\ln(a)=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

22.7 Transformaciones de Möbius en el plano hiperbólico.

22.7.1 Proposición.
Toda transformación de Möbius conserva distancia y ángulo hiperbólico.

Demostración. Hemos visto que toda transformación de Möbius conserva la razón doble y es conformal, las dos claves para medir distancias y ángulos.

22.7.2 Teorema.
Sea $\partial D = \{z \in C \mid |z| = 1\}$, y sea una transformación de Möbius $f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$ es tal que $f(\partial D) \subset \partial D$. Si $|a|$ y $|d|$ son mayores que $|b|$ y $|c|$, entonces f es una biyección de D en D.

Demostración. El único punto para el cual la función f no está definida es $-d/c$, y puesto que $|d| > |c|$, este punto queda fuera de la frontera.

(queda por demostrar el final).

22.7.3 Corolario.
Para todo $\alpha \in D$, la función

$$f_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

es una biyección en D que conserva distancia y ángulo hiperbólicos.

Demostración. Es una transformación de Möbius, por lo tanto conserva distancia y ángulo hiperbólico. Para ver que es una biyección en D, para lo cual basta comprobar que cumple las condiciones del teorema anterior.
Puesto que $\alpha \in D$, $|\alpha| = |\overline{\alpha}| < 1$, por lo que únicamente tenemos que comprobar que $f(\partial D) \subset \partial D$.
Sea $z \in \partial D$, es decir, $|z| = 1$.

$f_\alpha(z) \cdot \overline{f_\alpha(z)} = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$

Bibliografía.

Descarga la versión más actualizada de este libro en
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica.pdf

[Prob1] Problemas de Geometría Vol. 1
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria1.pdf

[Prob2] Problemas de Geometría Vol. 2
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria2.pdf

[Prob3] Problemas de Geometría Vol. 3
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria3.pdf

[Prob4] Problemas de Geometría Vol. 4
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria4.pdf

[Prob5] Problemas de Geometría Vol. 5
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria5.pdf

[Hilbert] David Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 14. Auage, B.G.Teubner, Stuttgart, Leibzig, 1999. Versión en inglés: David Hilbert, Foundations of Geometry, 2nd English edition, Open Court, LaSalle, 1971.

"Coordenadas Baricéntricas" (Francisco J. García Capitán)

"Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas. Algunos tópicos" (Angel Montesdeoca)

La primera parte de este libro sigue el desarrollo de los documentos “pdf” del profesor **Wayne Aitken** que se encuentran en su página web personal:
http://public.csusm.edu/aitken_html/m410/